

# Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz

(Fortsetzung der Publikationsreihe  
«Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz»)

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission  
(Organ der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften)

**Dreiundvierzigster Band**

## **GRAVIMETRISCHES GEOID DER SCHWEIZ:**

**Potentialtheoretische Untersuchungen  
zum Schwerefeld im Alpenraum**

Alain Geiger

1990



# Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz

(Fortsetzung der Publikationsreihe  
«Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz»)

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission

(Organ der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften)

**Dreiundvierzigster Band**

## **GRAVIMETRISCHES GEOID DER SCHWEIZ:**

**Potentialtheoretische Untersuchungen  
zum Schwerefeld im Alpenraum**

Alain Geiger

1990

Adresse der Schweizerischen Geodätischen Kommission:

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
Eidg. Technische Hochschule Zürich  
ETH-Hönggerberg  
CH-8093 Zürich

Redaktion des 43. Bandes:

Dr. A. Geiger  
Prof. Dr. Hans-Gert Kahle  
Dr. B. Bürki

Druck: OWADRUCK, 3173 Oberwangen

# Vorwort

## GRAVIMETRISCHES GEOID DER SCHWEIZ: POTENTIALTHEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ZUM SCHWEREFELD IM ALPENRAUM

Als die NASA 1975 damit begann, die Meeresoberfläche mit Hilfe von radargestützten Satelliten zu kartieren, erwarteten die Ozeanographen Informationen über globale Meeresströmungen und Seegangshöhen. Eines der sensationellen Teilergebnisse war dabei die Entdeckung, dass die zirkumpazifischen Tiefseegräben mit relativ grossen Depressionen der Meeresoberfläche verbunden waren. Diese sich über Tausende von Kilometern hinziehende Vertiefung des Meeresniveaus liess sich weder mit ozeanographischen noch mit meteorologischen Phänomenen erklären. Stattdessen musste sie als Störung im Schwerfeld der Erde interpretiert werden. Inzwischen liegen globale Karten des Reliefs der Meeresoberfläche vor, die eine Reihe von interessanten Strukturen aufweisen. Viele bisher unbekannte submarine Gebirge, Seamounts und Bruchzonen konnten anhand ihrer gravitativen Wirkungen auf das Ozeanwasser identifiziert und plattentektonisch interpretiert werden. Wenn man sich die Ozeane durch die Kontinente hindurch mit Kanälen weltweit verbunden vorstellt, so ergibt sich eine Fläche, die, physikalisch gesehen, eine Äquipotentialfläche des Schwerfeldes der Erde darstellt. Diese Niveaufäche wird als Geoid bezeichnet, und ihre Höhen gegenüber dem Referenzellipsoid nennt man Geoidundulationen. Auch bereits die ersten Schwere- und Lotrichtungsmessungen in der Schweiz, ausgeführt von Mitarbeitern der Schweizerischen Geodätischen Kommission anfangs dieses Jahrhunderts, haben die Existenz von relativ starken lateralen Änderungen dieser Höhen-Bezugsfläche im Alpenraum aufgezeigt und damit physikalisch/theoretische Untersuchungen von Stokes, Gauss und Helmert bestätigt.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein Beitrag der Physikalischen Geodäsie zum Problemkreis der gravimetrischen Geoidbestimmung bearbeitet und vorgestellt. Als "geodätische" Signale analysiert Herr Dr. A. Geiger die Schwereanomalien in der Schweiz. Er untersucht die Frage, wie weit die potentialtheoretischen Relationen zwischen der Physik der Schwereanomalien und der Geometrie der Äquipotentialflächen in der Schweiz geeignet sind, qualitative und quantitative Randbedingungen für die Struktur des Geoids festzulegen.

Ausgangspunkt der Bearbeitung ist das sogenannte Geodätische Randwertproblem, dessen Lösungsziel darin besteht, aus den punktuell auf der Erdoberfläche gemessenen Gradienten des Schwerepotentials die geometrische Form der Äquipotentialflächen zu bestimmen. Während beim Dirichlet'schen, Neumann'schen und Cauchy'schen Randwertproblem das Potential, dessen Gradienten oder eine Linearkombination dieser Grössen auf einer als bekannt angenommenen Fläche vorgegeben sind, ist dies beim Geodätischen Randwertproblem streng genommen nicht der Fall, da in den terrestrischen Messungen inhärent das zunächst unbekannte Schwerfeld enthalten ist. Es ist gerade diese Einschränkung, welche die Lösung des Geodätischen Randwertproblems sowohl in der mathematischen Formulierung als auch in der praktischen Umsetzung als schwierig erscheinen lässt.

Die Anfangsaufgabe bestand daher darin, Zusammenhänge für die Hochauflösung der Feinstruktur des Schwerfeldes herauszuarbeiten und auf eine mathematische Grundlage zu stellen. Anschliessend waren Lösungsansätze für das Geodätische Randwertproblem zu entwickeln und auf funktionaler Basis einsatzfähig zu machen. Hierzu gehören ausführliche

## Diskussionen zur

- LAPLACE-Gleichung
- FOURIER-Transformation, zu den
- Integraloperatoren und reproduzierenden Kernen, zur
- GREENschen Funktion
- Spektralanalyse
- Schwereflussberechnung und zum Stokes'schen Integral
- Kugelfunktionsentwicklung sowie zur
- Bestimmung von Trendfunktionen

Dabei hat Herr Geiger ein weiteres Mal sein in vielen wissenschaftlichen Publikationen gezeigtes Talent unter Beweis gestellt, komplizierte physikalische Zusammenhänge mathematisch vertieft analysieren und in übergeordnete Konzepte einfügen zu können. Die von ihm entwickelten Algorithmen haben sich nicht nur in der Forschung, sondern auch in einer Reihe von Praktika und Semesterarbeiten bewährt, so dass jetzt Pläne für die Weiterentwicklung in der Praxis der Landesvermessung in den Bereich der Möglichkeiten gerückt sind.

Im zweiten Teil stellte sich Herrn Geiger die Aufgabe, die mathematisch/theoretische Analyse des ersten Teils in einer operationellen Synthese mit realen Daten aus der Schweiz zu testen. Dabei kamen viele der im Teil I entwickelten Formeln und Algorithmen zur Anwendung. Als Datenmaterial benutzte Herr Geiger die Kugelfunktionskoeffizienten des Goddard Earth Schweremodells 10C bis zur 180. Ordnung, mehr als 100'000 mittlere europäische Freiluftanomalien im Raster 6'x10', sowie 2'400 Schwerewerte in der Schweiz, die von der Schweizerischen Geophysikalischen Kommission und den ETH-Instituten für Geophysik sowie für Geodäsie und Photogrammetrie erhoben worden waren.

Ein nicht unwichtiger Schlussteil der Arbeit bestand darin, das gravimetrische Geoid mit dem astrogeodätischen Geoid zu vergleichen und das letztere auf das neue Internationale GRS80-Ellipsoid zu transformieren. Dazu war es nötig, umfangreiche eigene Software-Entwicklungen zu realisieren. Die Stokes' - Integration liefert im Ergebnis Geoidundulationen in der Genauigkeit von  $\pm 10$  cm für das Mittelland sowie  $\pm 30$  cm für das Hochgebirge und die Ivreazone.

Herr Geiger hat zusätzlich ein Kapitel über die geophysikalische Interpretation ergänzt, das sich im Laufe der letzten Monate zu einem interessanten Diskussionsthema entwickelt hat: Es geht um die Frage nach der Referenztiefe, bezüglich der der Krusten/Manteleffekt berechnet werden muss, um die Frage nach dem Dichtekontrast an der Mohorovicic-Diskontinuität, nach der Dichte der Topographie sowie um allfällige langwellige Trendanteile, die tieferen Masseninhomogenitäten zugeordnet werden müssten. Diese Probleme sind zur Zeit Gegenstand von aktuellen Forschungsarbeiten im Rahmen des nationalen Forschungsprogramms NFP 20 "Geologische Tiefenstruktur der Schweiz". Herrn Geigers Berechnungen zeigen interessante Strukturen auf, wie z.B. Segmentierungen der Molasse im Mittelland, Dichteanomalien im Bündnerland und im südlichen Wallis sowie signifikante Schwereeffekte von Talfüllungen des unteren Rhonetals und des St.Galler Rheintals bis in die Umgebung von

Chur.

Zusammen mit diesen Ergebnissen und dem Aufzeigen der Möglichkeiten und Grenzen der gravimetrischen Geoidbestimmung im Rahmen der gegenwärtig verfügbaren Messtechniken hat Herr Geiger eine wichtige wissenschaftliche Grundlage geschaffen. Die Arbeit ist disziplinübergreifend und integrierender Bestandteil der Internationalen Geoidkommission der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG). Herr Geiger zeigt neue Wege auf, die zur wesentlichen Erweiterung unserer Kenntnis über das Schwerefeld im Alpenraum beitragen. Insbesondere wird die Geoidbestimmung massgeblich gestützt werden können. Auch im Zuge der zukünftigen Anwendung von satellitengestützten Messverfahren (GPS) wird der erarbeitete Datensatz eine wertvolle wissenschaftliche Basis bilden.

Die Schweizerische Geodätische Kommission (SGK) der Schweizerischen Akademie für Naturwissenschaften (SANW) dankt Herrn Dr. Geiger für seinen wertvollen Beitrag zur Geodäsie in der Schweiz. Herr Prof. Dr. H. Sünkel, Institut für Theoretische Geodäsie, TU Graz, hat diese Arbeit mit vielen wertvollen Anregungen bereichert. Ihm sei an dieser Stelle in aller Form für seine Kooperation und seine Beiträge gedankt. Von der SANW wurden die Druckkosten für diesen Band übernommen, wofür die SGK ihren Dank ausspricht.

Im Namen der Schweizerischen Geodätischen Kommission

Der Vizepräsident  
F. Jeanrichard

Der Präsident  
H.-G. Kahle

# Préface

## GÉOÏDE GRAVIMÉTRIQUE DE LA SUISSE:

### RECHERCHES THÉORIQUES SUR LE CHAMP DE GRAVITÉ DANS LES ALPES

Lorsque, en 1975, la NASA commença à cartographier la surface des mers à l'aide de mesures radar par satellites, les océanographes attendaient des informations sur les courants marins et l'amplitude des marées. Un des résultats les plus sensationnels fut la découverte de dépressions relativement grandes de la surface océanique en relation avec les fosses circumpacifiques. Ces dépressions, qui s'étendent sur des milliers de kilomètres, n'étaient explicables ni par des phénomènes océanographiques, ni météorologiques. Il fallut donc en déduire qu'elles résultaient d'une perturbation du champ de la pesanteur. Entretemps, des cartes du relief de la surface océanique ont paru, montrant une série de structures intéressantes. De nombreuses chaînes montagneuses sous-marines inconnues jusqu'ici, ainsi que des "seamounts" et des zones de failles, ont été identifiées grâce à leur effet gravimétrique sur la surface des océans et ont pu être interprétées du point de vue de la tectonique des plaques. Si l'on imagine les océans reliés par des canaux à travers les continents, on obtient ainsi une surface qui correspond à une surface équipotentielle du champ de la pesanteur. Cette surface de niveau est appelée "géoïde" et les distances entre cette surface et l'ellipsoïde de référence sont appelées "cotes du géoïde". D'ailleurs, les premières mesures de la pesanteur et de la direction de la verticale entreprises en Suisse par des collaborateurs de la Commission géodésique suisse au début de ce siècle, ont montré l'existence de variations latérales relativement grandes de cette surface de référence des altitudes dans les Alpes et ont confirmé ainsi les recherches physico-théoriques de Stokes, Gauss et Helmert.

Cette dissertation représente une contribution de la géodésie dynamique au problème de la détermination gravimétrique du géoïde. M. A. Geiger analyse les anomalies de la pesanteur en Suisse en tant que signaux "géodésiques". Il étudie dans quelle mesure les relations théoriques entre la physique des anomalies de la pesanteur et la géométrie des surfaces équipotentielles sont appropriées pour fixer des limites aussi bien qualitatives que quantitatives relatives à la structure du géoïde en Suisse.

Le point de départ du travail est le problème géodésique des limites dont la solution a pour but la détermination de la forme géométrique des surfaces équipotentielles à partir des gradients du potentiel de la pesanteur mesurés ponctuellement à la surface de la terre. Tandis que dans le problème des limites selon Dirichlet, Neumann et Cauchy, le potentiel dont les gradients ou une combinaison linéaire de ces valeurs se rapportent à une surface connue, ce n'est pas le cas, rigoureusement, dans le problème géodésique des limites, car le champ de la pesanteur, à priori inconnu, influence les mesures terrestres. C'est justement cette limitation qui rend la solution du problème géodésique des limites difficile, aussi bien dans la formulation mathématique que dans la transposition pratique.

Le travail préliminaire consista à élaborer des relations concernant la haute résolution de la structure détaillée du champ de la pesanteur et de leur donner une base mathématique. Ensuite, il fallut développer des éléments de solutions pour le problème géodésique des limites et les rendre utilisables sur une base fonctionnelle. Des discussions exhaustives ont lieu ici sur:

- l'équation de LAPLACE

- la transformation de FOURIER
- les opérateurs intégrals et noyaux reproducteurs
- la fonction de GREEN
- l'analyse spectrale
- le calcul du flux de la pesanteur et l'intégrale de STOKES
- le développement de fonctions sphériques
- la détermination de fonctions de dérive

Une fois de plus, M. Geiger a mis son talent à l'épreuve, comme il l'avait déjà fait dans de nombreuses publications scientifiques, en analysant de façon approfondie des relations physiques compliquées et en les intégrant en synthèses générales. Les algorithmes qu'il a développés ont fait leurs preuves non seulement dans la recherche, mais aussi dans une série d'exercices pratiques et de travaux de semestre. Ainsi, actuellement, il est possible d'envisager les plans d'un développement futur d'application pratique en mensuration nationale.

Dans la deuxième partie, M. Geiger s'est fixé pour tâche de tester l'analyse mathématique et théorique de la première partie dans une synthèse opérationnelle avec des données réelles d'origine suisse. De nombreuses formules et de nombreux algorithmes développés dans la première partie ont ainsi été appliqués. Les données utilisées par M. Geiger sont les coefficients des fonctions sphériques du modèle gravimétrique Goddard Earth 10C jusqu'au 180e ordre; cela signifie, pour l'Europe, plus de 100'000 anomalies à l'air libre avec une grille de 6'x10' ainsi que, pour la Suisse, 2400 valeurs de la gravité provenant des mesures de la Commission géodésique suisse, de l'Institut de géophysique et de celui de géodésie et de photogrammétrie.

Dans une dernière partie non moins importante, le travail consista à comparer le géoïde gravimétrique au géoïde astro-géodésique et de transformer ce dernier sur le nouvel ellipsoïde international GRS80. Ceci exigea le développement personnel de nombreux logiciels. L'intégration de Stokes fournit, comme résultat, des cotes du géoïde avec une précision de  $\pm 10$  cm pour le Plateau et  $\pm 30$  cm pour les Alpes et la zone d'Ivrée.

En complément, M. Geiger a ajouté un chapitre consacré à l'interprétation géophysique qui, au cours des derniers mois, s'est développée en un thème de discussion intéressant. Il s'agit de la question de la profondeur de référence par rapport à laquelle l'effet croûte/manteau doit être calculé, de celle du contraste de densité à la discontinuité de Mohorovicic et enfin de la densité de la topographie ainsi que d'éventuels éléments de dérive à longues ondes, dus à des inhomogénéités de masses plus profondes. Actuellement, ces problèmes font l'objet d'investigations dans le cadre du programme de recherche PNR 20 " Exploration du soubassement géologique de la Suisse ". Les calculs de M. Geiger révèlent d'intéressantes structures telles que, par exemple, des segmentations de la molasse du Plateau, des anomalies de densité dans les Grisons et le Valais méridional ainsi que des effets gravimétriques significatifs provenant du comblement de la vallée du Rhone dans sa partie inférieure et celle du Rhin, du Rheintal saint-gallois jusqu'aux environs de Coire.

Par ces résultats et la démonstration des possibilités et des limites de la détermination du géoïde gravimétrique avec les techniques de mesures actuelles, M. Geiger a créé une base scientifique importante. Ce travail couvre plusieurs disciplines et fait partie intégrante des travaux de la Commission internationale du géoïde de l'Association internationale de géodésie (AIG). M. Geiger montre des voies nouvelles contribuant à un élargissement important de nos connaissances concernant le champ de la pesanteur dans les Alpes. La détermination du géoïde pourra être ainsi appuyée de façon prépondérante. La base de données élaborée dans ce travail procurera aussi une base scientifique précieuse aux applications futures des procédés de mesures par satellites (GPS).

La Commission géodésique suisse (CGS) de l'Académie suisse des sciences naturelles (ASSN) remercie Monsieur A. Geiger, dr ès sc. tech., de sa précieuse contribution en faveur de la géodésie helvétique. Le professeur dr H. Sünkel de l'Université technique de Graz a enrichi ce travail de ses nombreuses et précieuses suggestions. Qu'il trouve ici l'expression de nos chaleureux remerciements. En outre, la Commission géodésique suisse remercie l'Académie suisse des sciences naturelles de la prise en charge des frais d'impression de ce volume.

Au nom de la Commission géodésique suisse

Le vice-président  
F. Jeanrichard

Le président  
H.-G. Kahle

---

## Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Abstract	3

### 1 Einleitung

1.1	Vorbemerkungen zum Geoid	5
1.2	Bisherige Arbeiten zum Geoid in der Schweiz	10

## Teil I Theoretische Betrachtungen zum Geoid

### 2 Mathematische Zusammenhänge

2.1	Lösung der Laplace Gleichung in verschiedenen Koordinatensystemen	16
2.2	Allgemeines zur Separation der Laplacegleichung	17
2.3	Kartesische Koordinaten	19
2.3.1	Separation	19
2.3.2	Zusammenhang mit dem Fourierintegral und der Fouriertransformation	22
2.3.3	Homogene Polynome	25
2.4	Kugelkoordinaten	27
2.4.1	Zusammenhang mit Homogenen Polynomen	30
2.5	Ellipsoidische Koordinaten	31
2.6	Zur Konstruktion spezieller harmonischer Funktionen	33
2.7	Approximation von Funktionen im Hilbertraum $H^0$	36
2.7.1	Norm und Approximation	36
2.7.2	Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten	39
2.7.3	Einfluss der Ordnung der Entwicklung auf die Koeffizienten	41
2.7.4	Einfluss der Stützpunktverteilung	43
2.7.5	Häufig verwendete Systeme	44
2.8	Operatoren im Funktionalraum	45
2.8.1	Selbstadjungierte Operatoren	45
2.8.2	Integraloperatoren	48
2.8.3	Reproduzierende Kerne	50
2.9	Fehlerfortpflanzung bei Integralformeln und Reihenentwicklungen	52
2.9.1	Integraldarstellung	52
2.9.2	Reihenentwicklungen	54
2.9.3	Fehler von Reihenentwicklungen	55
2.9.4	Allgemeiner Kovarianz- und Gewichtsansatz bei reproduzierenden Kernen	55

<b>3</b>	<b>Zum Randwertproblem</b>	
3.1	Problemstellung	57
3.2	Integrallösungen	59
3.2.1	Zur Bestimmung der Green'schen Funktion	61
3.2.2	Greensche Funktion als Integraloperator	63
3.3	Variationsproblem	67
3.3.1	Energie des Schwerefeldes	67
3.3.2	Variationsgleichung und Poissongleichung	69
3.4	Numerische Lösungen	71
3.4.1	Finite Differenzen und Finite Elemente	71
3.4.1	Spektralanalyse	72
3.4.1	Approximation und Interpolation	73
<b>4</b>	<b>Beschreibung des Schwerefeldes</b>	
4.1	Funktionaldarstellung	74
4.2	Differentialgeometrisch	80
4.3	Flussberechnung im Gravitationsfeld	85
4.3.1	Zum Gauss'schen Satz	85
4.3.2	Verallgemeinerte Stokesformel	86
4.3.3	Kugelsymmetrische Massenverteilungen	88
4.3.4	Ebene Bouguer - Korrektur	90
4.3.5	Bestimmung der Störmassen aus der Schwereanomalie	91
4.4	Berechnung von Potentialfeldern mittels Fouriertransformation	
4.4.1	Allgemeines zur Fouriertransformation	94
4.4.2	Allgemeine Formel zur Berechnung von Masseneffekten im Spektralbereich	95
4.5	Schwerefeldberechnungen mittels Multipolentwicklungen	104
4.5.1	Kugelfunktionsentwicklung des reziproken Abstandes	104
4.5.2	Multipolentwicklung im Aussenraum einer Massenverteilung	105
4.5.3	Schwerefeld einer schwach deformierten Kugel	106
4.5.4	Schwerefeld innerhalb von Massenverteilungen	108
4.6	Bestimmung von Trendfunktionen im Schwerefeld	110

---

## Teil II Praktische Berechnung des Geoides

### 5 Störgrößen des Normal-Schwerefeldes

<b>5.1</b>	<b>Zeitliche Änderungen des Schwerfeldes</b>	<b>118</b>
5.1.1	Gezeiten	118
5.1.2	Rotationsschwankungen	119
5.1.3	Änderung der Drehachse	122
5.1.4	Massenumlagerungen	124
5.1.5	Zeitliche Änderung der Gravitationskonstanten	126
<b>5.2</b>	<b>Dichteinhomogenitäten</b>	<b>128</b>
5.2.1	Mathematisches Modell zur Dichtebestimmung	129
5.2.2	Schätzung variabler Dichten und Bestimmung von Moho-Parametern	134
<b>5.3</b>	<b>Einfluss der Atmosphäre auf das Schwerfeld</b>	<b>144</b>
5.3.1	Höhenabhängige Korrektur	146
5.3.2	Druckabhängige Korrektur	148
5.3.3	Einfluss auf das Potential	149

### 6 Gravimetrisches Geoid

<b>6.1</b>	<b>Die Daten</b>	<b>152</b>
6.1.1	Verwendete Daten	152
6.1.2	Referenzanomalien und Referenzgeoid	155
6.1.3	Bestehendes Astro-Geoid in der Schweiz	160
6.1.4	Zur Reduktion der Schweredaten	161
6.1.5	Stochastisches Verhalten der Daten	170
<b>6.2</b>	<b>Zur Berechnung des Geoids</b>	<b>173</b>
6.2.1	Vorgehen bei der Berechnung	173
6.2.2	Näherung der Stokes Funktion	174
6.2.3	Genauigkeitsabschätzungen des Integrals	175
6.2.4	Korrektur der einfachen Integration	180
6.2.5	Beziehung zwischen Höhenanomalie und Geoidundulation	184
<b>6.3</b>	<b>Gravimetrisches Geoid</b>	<b>188</b>
6.3.1	Verschiedene Geoide	188
6.3.2	Bestimmung von Datumparametern	193
6.3.3	Fehler	203

<b>7</b>	<b>Zum Schluss</b>	<b>212</b>
----------	--------------------	------------

<b>8</b>	<b>Literatur</b>	<b>217</b>
----------	------------------	------------



## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Teile gegliedert, die allerdings nicht völlig getrennt voneinander betrachtet werden dürfen. Dies soll die durchgehende Nummerierung der Kapitel andeuten.

In dem eher theoretischen Teil I werden einige mathematische Zusammenhänge bei der Approximation des Schwerefeldes zusammengestellt.

Die Lösung der Laplace-Gleichung, eines der zentralen Probleme der physikalischen Geodäsie, ist denn auch an den Anfang gestellt. Die Lösung erfolgt systematisch durch die Separation mit Hilfe der Stäkel-Bedingungen, primär in kartesischen und sphärischen Koordinaten und als Vervollständigung auch in ellipsoidischen Koordinaten. Dabei geht es darum, Zusammenhänge zwischen den Lösungen in den verschiedenen Koordinatensystemen aufzuzeigen. So ergeben sich zwangslos die Fourieransätze als Lösung in kartesischen Koordinaten. Ebenso wird gezeigt, dass die Kugelfunktionen völlig äquivalent zu den kartesischen Lösungen sind und auch aus diesen durch die Formulierung von homogenen Polynomen in Kugelkoordinaten ableitbar sind.

Begriffe aus der Funktionentheorie werden, soweit sie gebraucht werden zusammengestellt. Die Approximation durch Reihenentwicklungen, wie sie in der Geodäsie auftreten, werden behandelt. Insbesondere wird die Möglichkeit einer Orthogonalentwicklung bei ungleich-abständigen Stützwerten sowie deren Äquivalenz mit entsprechenden Schätzungen nach kleinsten Quadraten gezeigt. Der Begriff des Operators wird im Hinblick auf die Schwerefeldanwendung dargestellt und auf selbstadjungierte Operatoren spezialisiert. Daraus ergibt sich durch die Betrachtung von Eigenwertproblemen zwangsläufig der Begriff des reproduzierenden Kerns. Die Fehlerfortpflanzung wird ebenfalls funktional dargestellt.

Zur Behandlung des Randwertproblems werden die aufgearbeiteten Zusammenhänge verwendet und so die Herleitung der Stokes'schen Lösung konsequent auf einer funktionalen Basis erarbeitet. Dabei wird die Stokes'sche Lösung über Operatoren als Green'sche Lösung formuliert. Im Hinblick auf zukünftige, in dieser Arbeit nicht behandelte, vollnumerisch orientierte Lösungswege, wird das Randwertproblem als Variationsproblem formuliert. Dabei werden auch gewisse Lösungsansätze, wie die Methode der finiten Elemente, kurz erwähnt.

Ein den Teil I abschliessendes Kapitel soll einige konkrete Rechnungen im Schwerefeld demonstrieren. Der operationelle Ansatz wird wiederum funktional kurz zusammengefasst dargestellt. Ebenso wird auf die differentialgeometrische Beschreibung hingewiesen. Dabei wird die Analogie des Schwerefeldes zur Lichtausbreitung und der konformen Abbildung dargelegt.

Durch die physikalische Betrachtungsweise des Schwerefeldflusses kann man einige Formeln, die sonst umständlich hergeleitet werden müssen, recht einfach gewinnen. An dieses Exerzitium schliesst die spektrale Beschreibung des Schwerefeldes an. Dort wird durch den rigorosen Einsatz der Fouriertransformation eine neue Formel zur Berechnung der Schwere,

Lotabweichung und des Potentials gewonnen. Dabei ergibt sich die bekannte 'Parker'- Formel als Spezialfall. Die Darstellung durch Multipole soll die Anwendung der Kugelfunktionen bei Potentialproblemen erläutern. Im speziellen sind die Potentialberechnungen im Masseninneren und die Berechnung globaler Topographieeffekte von Interesse. Ein letztes Kapitel ist dem immer wiederkehrenden Problem der Trendabspaltung gewidmet. Da der Formalismus bei der Dichte- und Parameterbestimmung appliziert wird, erfolgt die Darstellung relativ ausführlich.

Im Teil II erfolgt die praktische Berechnung des Geoides nach der Stokes'schen Lösung. Dabei kommen etliche im Teil I entwickelte Formeln zum Tragen. Vorgängig werden einige Störgrößen diskutiert, die jedoch für unsere Belange kaum ins Gewicht fallen. In einem neuen Ausgleichsmodell werden Trends, Mohoparameter sowie horizontal variierende Krustendichten geschätzt. Der Dichtekontrast an der Krusten-Mantelgrenze ergibt sich zu 0.33 bis 0.34  $\text{gr/cm}^3$ , während die topographischen Dichten im Bereich von  $\pm 0.2 \text{ gr/cm}^3$  um  $2.67 \text{ gr/cm}^3$  schwanken. Dieser Ansatz erlaubt es bereits mit wenigen Parametern, die Bougueranomalien auf eine Streuung von 6 mgal über die ganze Schweiz zu glätten. Im letzten Kapitel werden die Daten, Berechnungen und die Resultate dargestellt. Zur Integration der Stokesfunktion wird eine einfache Korrekturformel entwickelt, deren Herleitung ausführlich beschrieben ist. Ebenso wird eine Formel abgeleitet, die die Korrektur der Höhenanomalien oder die orthometrische Korrektur mit Hilfe von Bougueranomalien beschreibt.

Die Berechnung des Geoides erfolgt über ein Stokes-Differenzgeoid zum GEM10C-Geoid. Als Daten wurden europäische  $6' \times 10'$  Freiluftanomalien verwendet. Im Gebiet der Schweiz griff man auf die zur Berechnung der Schwerekarte der Schweiz verwendeten Daten und auf Messungen des Institutes für Geodäsie sowie des Institutes für Geophysik zurück. Die Berechnung des Geoides im GRS80 erlaubt die Lagerung des bestehenden Astrogeoides im GRS80. Die Varianzen des gravimetrischen Geoids ergaben sich zu 12 - 30 cm. Dies entspricht auch etwa dem maximalen Relativfehler über die ganze Schweiz. Der Vergleich mit dem astro-geodätischen Geoid liefert 26 cm mittlerer Fehler an der Gewichtseinheit. Dazu ist zu sagen, dass der mittlere Fehler im Mittelland und in den Voralpen bei 16 cm liegt: Dies deckt sich gut mit den a priori Fehlern von 12 cm. Die grossen Klaffen sind alle im Bereich der Ivrea-Zone und des südlichen Wallis situiert. Zur Überprüfung dieser Probleme wurde vom 'Stokes'-Prinzip etwas abgerückt. Einige Freiluft-Problemwerte wurden mit Hilfe der Interpolation von Bougueranomalien und der Berechnung entsprechender Topographieeffekte neu gerechnet. Die Residuen im Geoid blieben, wenn auch weniger dominant, in derselben Gegend bestehen. Ebenso blieb der Transformationsfehler mit etwa 30 cm erhalten.

## Abstract

The presented work is divided into two parts. Nevertheless, the two parts are not to be completely separated. This should be emphasized by the continuous numbering of the chapters.

In a first, more or less theoretical part I some mathematical foundations of the functional gravity field approximation are presented.

One of the most important problem of physical geodesy, the solution of Laplace's equation has systematically been reviewed by the mean of the Stäkel-Separation in cartesian, spherical and ellipsoidal coordinates. Special emphasis has been put onto the demonstration of the relations between the different solutions in different coordinate frames. The relation between spherical harmonics and the cartesian solution is made by means of homogeneous polynomials. The relation between fouriertransforms and the cartesian solution is shown as well.

A possibility to develop some orthogonal series approximation by least-square methods even for unevenly spaced data samples is shown. The Operator-calculus is introduced and specialized for self-adjoint operators like the Laplace-operator. By treating some eigenvalue problems the solution will appear in terms of reproducing kernels. The error propagation is briefly discussed.

The boundary value problem is treated using all the previously established and reviewed formalisms. The Stokes's solution is consequently elaborated by this functional approach. The Stokes'function is derived only by the use of operators solving for the Green's functions. In view of future numerical developments the boundary value problem has been formulated as a variational problem, which can be solved by numerical methods such as finite elements or finite differences. A brief overview of spectral and approximation methodes is given.

The last chapter of part I concentrates on real calculations in the framework of the gravity field. The operational approach is briefly rewied on the bases of functional theory. A small lookout onto differential geometry is given. Especially the analogies of the gravity field, the lightwave propagation and the conformal mapping is pointed out.

Some examples of applying Gauss' formula to describe some physical properties of the gravity field are carried out. The rigorous application of the Fourier transform leads to a new formula for calculating the gravity vector and the potential from known density distributions. 'Parker's'-formula will appear as a special case for the z-component. The multipole development might have some interest for calculating global topographic effects or for gravity field determination inside mass distributions.

In the second part the practical evaluation of Stokes'formula is carried out. Several formulas developed in the previous chapters of part I will be applied. Some disturbing effects, such as time dependent gravity changes etc. are discussed. Most of them are negligible for our purposes. In a newly formulated least squares model trend- and Moho parameters with

---

horizontally varying crustal densities are estimated. The density contrast at the Moho discontinuity ranges from 0.33 to 0.34  $\text{gr}/\text{cm}^3$ . The density of the topography varies in the order of  $\pm 0.2 \text{ gr}/\text{cm}^3$  with respect to  $2.67 \text{ gr}/\text{cm}^3$ . The applied model allows to fit the Bouguer anomalies at the level of 6 mgal rms over the entire area of Switzerland.

A simple algorithm for correcting Stokes' formula in the near zone of integration is developed. The correction of height anomalies or orthometric height corrections are derived from Bouguer anomalies.

For the calculation of the geoid GEM10C in the GRS80 has been used as reference. The 6'x10' free air 'Wenzel' anomalies as well as our own data of Switzerland have been processed. By the calculation in the GRS80 it was possible to calibrate the existing astro-geodetic geoid with respect to this system. The a priori variances of the gravimetric geoid showed values from 12cm to 30 cm. The comparison with the astro-geodetic solution reveals a mean deviation of 26 cm rms. Here it is to say that the regions of the Molasse basin and the Alpine forelands showed a much lower discrepancy of the order of 16cm rms. The major contribution to the residuals are located in the Ivrea-zone and in the southern part of the canton of Valais. To examine this problem the pure 'Stokes' principle of free air anomalies has been left. Some suspect free air anomalies have been calculated by interpolation of Bouguer anomalies and by adding the corresponding topographic effect. The residuals remained in the same regions, but on a lower level. An overall turned out to be of the order of 30 cm.

# 1 Einleitung

## 1.1 Vorbemerkungen zum Geoid

In Anbetracht der Möglichkeit, dass Leser ohne spezielle Kenntnisse der Geodäsie sich dieses Textes annehmen möchten, sollen einige allgemeine Erläuterungen zum Geoid angeführt werden. In dieser oder ähnlicher Form sind sie in sehr vielen, der Geodäsie und Vermessung zugewandten Lehrbüchern und Texten zu finden. Einige Worte zur Frage:

Was ist das Geoid?

Man denke sich die Erde als einen sich um eine feste Achse drehenden und von aussen unbeeinflussten starren Körper. Starr heisst einfach, dass die Massenelemente ihre gegenseitige Lage nicht verändern sollen. Der Begriff 'starr' beinhaltet neben der festen Erde auch Gewässer und Atmosphäre, deren Strömungen jedoch ausgeschlossen werden.

Ein Massenpunkt, der sich mit der Erde mitdreht, wird zwei Kräfte erfahren: Einmal die Gravitationskraft aller vorhandenen Massen und dann die Zentrifugalkraft bedingt durch die Erdrotation. Bekanntlich können Gravitations- und auch Zentrifugalbeschleunigungen durch entsprechende Potentiale beschrieben werden. Potentiale sind skalare Grössen, die sich linear superponieren (zusammenzählen) lassen. Die Beschleunigung entspricht dem Gradienten des Potentials.

Ein Punkt P, der mit der Erde rotiert, 'verspürt' das Potential W(P)

$$W(P) = V(P) + Z(P)$$

$\uparrow$        $\uparrow$  Zentrifugalpotential  
 Gravitationspotential

$$V(P) = G \int_{\substack{\text{alle} \\ \text{Massenelemente}}} \frac{dm}{d} \quad ; \quad Z(P) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

- G      Gravitationskonstante
- $\omega$     Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
- r      Abstand von der Drehachse
- d      Raumdistanz dm - P

Die Beschleunigung g im Punkt P ist demzufolge

$$\begin{aligned}
 -g(P) &= \nabla W(P) = \nabla V(P) + \nabla Z(P) \\
 &\quad \uparrow \\
 \text{Gradient} &= G \int \nabla \left( \frac{1}{d} \right) dm + \omega^2 r \\
 \text{grad} &
 \end{aligned}$$

$r$  ist der Radiusvektor von der Drehachse zum Punkt

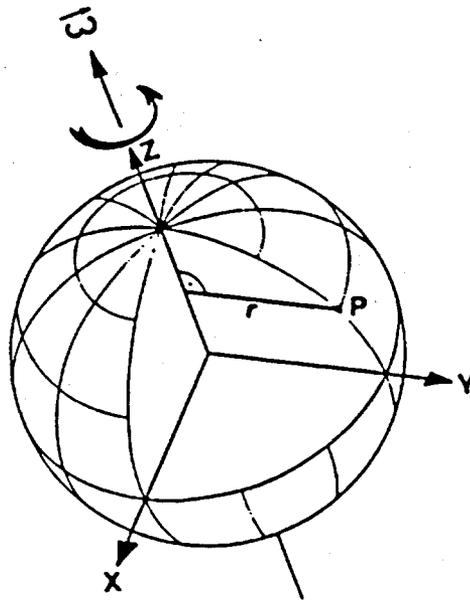


Abb.1.1 Zur Berechnung des Zentrifugalpotential (aus Kahle (1988))

Verbindet man alle Punkte mit gleichem Potential, so erhält man eine Fläche im Raum, die sog. Äquipotentialfläche.

Für eine andere Wahl des Potentialwertes müssen entsprechend andere Punkte verbunden werden. Die entstehenden Äquipotentialflächen schneiden einander i.a. nicht. Mehrdeutigkeiten können erst mit verschwindendem Gradienten auftreten. Für die Erde wäre dies in einem Abstand von etwa 40'000 Kilometern der Fall. Innerhalb dieses Abstandes sind die Äquipotentialflächen jedoch eindeutig und einfachzusammenhängend. Sie umschliessen die Erde schalenförmig. Das Potential ist auch innerhalb der Erde definiert. Demzufolge lassen sich auch hier Äquipotentialflächen definieren. Die Gradienten (oder die Beschleunigungen) stehen immer senkrecht auf den entsprechenden Äquipotentialflächen (Niveauflächen).

Da eine mit Wasser bedeckte idealisierte Erde keine Meeresbewegungen aufweist, schliesst man, dass nur Beschleunigungen senkrecht zur Oberfläche auftreten. Wir haben aber gesehen, dass Flächen, die senkrecht zur Beschleunigung verlaufen, gerade Äquipotentialflächen sind.

Die idealisierte Meeresoberfläche materialisiert also eine Äquipotentialfläche, die man sich unter den Kontinenten fortgesetzt denken kann, etwa durch ein Verbundnetz von Wasserkanälen. Diese spezielle Äquipotentialfläche wurde von Listing (1872) Geoid genannt.

Eng gekoppelt mit dem Geoid ist der Begriff des Normalpotentials, des Erdellipsoids oder Normalsphäroids.

Zur Beschreibung des oben erläuterten Potentials bedarf es, obwohl seine Struktur durch die eingangs erwähnten Annahmen stark vereinfacht wurde, eines gewissen mathematischen Aufwandes. Da Potentiale sich stets superponieren lassen, zur Illustration sei auf die Abbildung 1.1 hingewiesen, ist es statthaft zu schreiben

$$W = U + T .$$

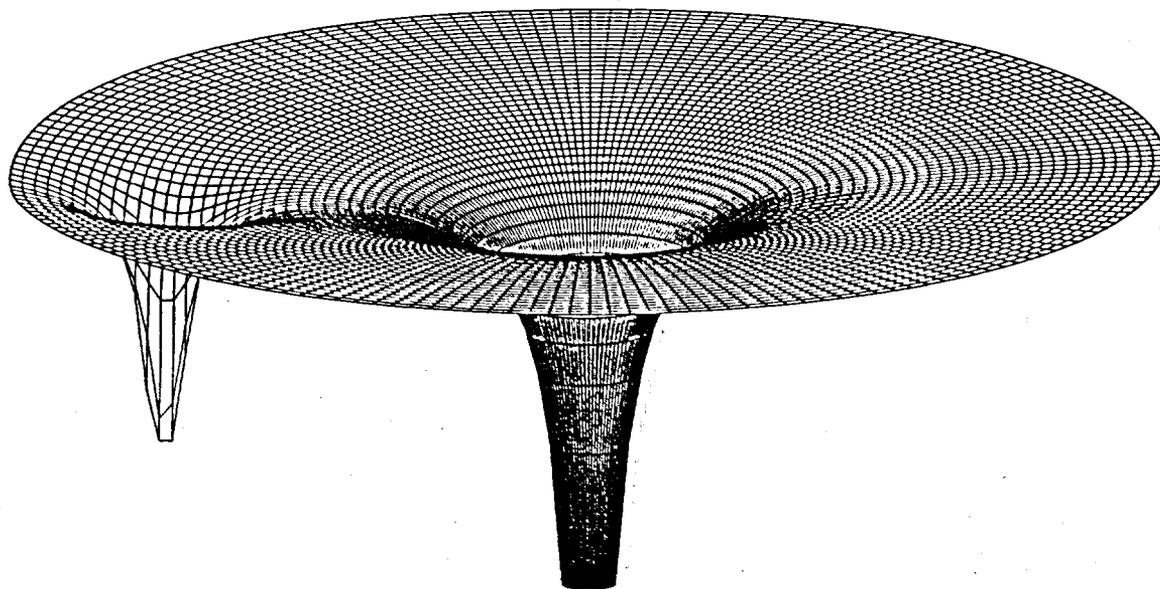
Dabei soll  $U$  eine genügend gute Näherung von  $W$  sein, der Art, dass  $T$  nur als kleiner Störterm in Erscheinung tritt. Der Funktion  $U$  werden nun sinnvolle Auflagen gemacht.

Das Zentrifugalpotential von  $W$  soll in  $U$  enthalten sein. Dies bedeutet, dass sowohl die Rotationsachse als auch die Winkelgeschwindigkeit des Normalsphäroids (Potential  $U$ ) genau mit der Erdachse bzw. mit der Drehgeschwindigkeit der Erde übereinstimmt. Eine ausgezeichnete Äquipotentialfläche, das sogenannte Normalsphäroid von  $U$  soll das Geoid (Äquipotentialfläche des Potentials  $W$ ) möglichst gut annähern.

Wählt man für das etwas allgemeinere Sphäroid die Ellipsoidform, so spricht man vom Erdellipsoid. Die Symmetrie-Achse wird mit der Rotationsachse identifiziert. Weiter wird vereinbart, dass sich keine Massen ausserhalb des Ellipsoids befinden sollen. Mit diesen Bedingungen und der Vorgabe der Gesamtmasse  $M$  ist das Potential  $U$  vollständig bestimmt. Aus dem Potential lässt sich die Normalschwere als  $g_{\text{norm}} = - \text{grad}U$  und deren Änderung mit dem Ort herleiten. Das Normalschwerefeld und dessen Potential sind also vollständig durch die Angabe der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , der Masse  $M$  und der Ellipsoidform (z.B. Halbachsen  $a$  und  $b$ ) bestimmt. Im Prinzip ist das Normalpotential frei wählbar. Dementsprechend wurden auch Normalsphäroide höherer Ordnung, zwei von Bruns und Helmert vorgeschlagen. Wichtige Bedingungen sollten jedoch stets erfüllt sein, damit der Sinn der Näherung erhalten bleibt. Das Normalpotential muss mindestens in der Umgebung des Geoids das Potential  $W$  genügend genau beschreiben, so dass die Restgrösse  $T$  "klein" wird und dementsprechend mit linearen Methoden behandelt werden kann. Weiter soll das Störpotential  $T$  ausserhalb der Erdmassen harmonisch sein ( $\Delta T = 0$ ). Daher muss man fordern, dass das Zentrifugalpotential voll und ganz im Normalpotential enthalten ist.

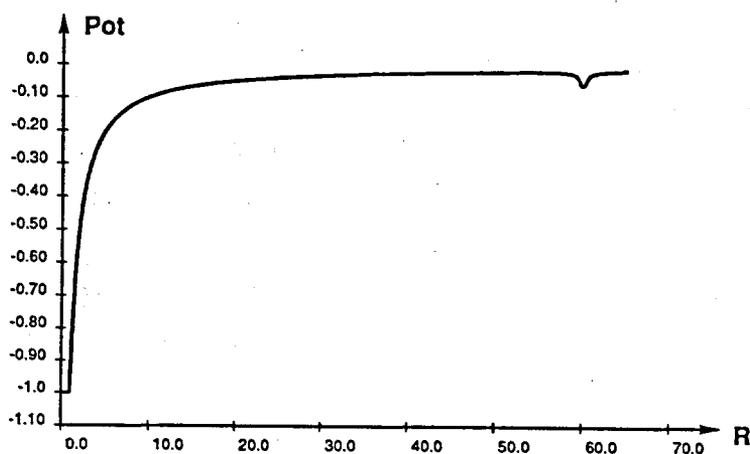
Abb. 1.2 zeigt das Gravitationspotential zweier (anziehender) Massen als 'Potentialtopf'. Im wesentlichen ist der Wert  $-1/r$  aufgetragen. In der 'Topfmitte' sitzt die Erde. Die Wirkung der Anziehung kann nun so interpretiert werden, dass jeder Körper im Schwerefeld ein Energieminimum sucht. Er wird also sozusagen in den 'Topf' hineinfallen oder anders

ausgedrückt, er wird von der Erde angezogen.



**Abb.1.2** Potentialtöpfe zweier Körper

Die Wirkung einer zweiten Masse ist auf Grund des Superpositionsprinzips ebenfalls darstellbar. Jeder andere Körper wird mit seinem eigenen 'Topf' eine 'Delle' im Potentialrand verursachen. In Abbildung 1.3 ist das reale Verhältnis zwischen Erde und Mond (Abstand  $R$  in Erdradien) in einem Schnitt durch den 'Topf' dargestellt.



**Abb.1.3** Potentialtöpfe von Erde und Mond

## Bedeutung und Sinn der Geoidbestimmung

Das Geoid ist eigentlich als Hilfsmittel zur Beschreibung des gesamten Potentials und damit des ganzen Schwerefeldes der Erde aufzufassen. Das Schwerefeld ist in vielen Bereichen von grosser Bedeutung. Viele Anwendungen verlangen eine immer genauere Kenntnis des Schwerefeldes. Umgekehrt liefern neue Methoden und Erkenntnisse ein verfeinertes Bild des Schwerefeldes. Ein Beispiel hierfür ist die Interaktion von Ozeanographie, Altimetrie und Geodäsie. Ähnliche Wechselwirkungen offenbaren sich zwischen Geologie, Geophysik und Geodäsie. Die Kenntnis geologischer Strukturen sowie geophysikalische Messungen unterstützen eine genaue Schwerefeldbestimmung. Umgekehrt können genaue geodätische Messungen, gekoppelt mit geophysikalischen Daten, die geologische Interpretation wesentlich unterstützen. Die Kenntnis von Lotrichtungen ist für die genaue Vermessung unabdingbar. Dem könnte man jedoch entgegenhalten, dass die Vermessung sich auf Satellitensysteme stützen könne. Aber auch da kann man nicht ohne weiteres auf das Schwerefeld verzichten, da die Satellitenbahnen direkt durch das Schwerefeld beeinflusst sind. Umgekehrt können aus den Satellitenbahnen Schwerefeldparameter bestimmt werden. Ganz wichtig jedoch wird die Kenntnis des Geoides bei der Umrechnung der aus Satellitenmessungen gewonnenen ellipsoidischen Daten in geoidische Werte.

## 1.2 Arbeiten zum Geoid in der Schweiz

Einer der ersten Vermesser, die sich in der Schweiz um den Einfluss der Bergmassive auf die Lotlinie gekümmert hat, dürfte wohl Denzler gewesen sein. Seine Arbeiten gehen ins Jahr 1845 zurück, die er als Ingenieur der 1861 gegründeten Schweizerischen Geodätischen Kommission fortsetzte (erste Ausgabe des Jahrbuchs der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft und Jahrbuch des Schweizerischen Alpen Clubs, 1866). Denzler benutzte bereits die Sektorenmethode, um aus mittleren Höhen und den mittleren Abständen zum Aufpunkt die Massenwirkungen zu rechnen. Die Rechnungen wurden für die Stationen Bern, Genf, Zürich und Milano durchgeführt. In den Jahren  $\approx 1860, 1870$  wurden von Plantamour (1866) absolute Schweremessungen mit dem Repsold'schen Reversionspendel der Kommission durchgeführt. Die Stationen waren noch nicht so dicht verteilt (Genf, Bern, Weissenstein, Gäbris, Simplon). Scheiblauer führte Schweremessungen in Neuenburg und Chaumont und Messerschmitt in Zürich und auf Tête-de-Rang, Napf, Gurnigel, Friesenberg durch. Als wesentliche Erleichterung der Messungen wurde ein Relativgravimeter, ein Sterneck'scher Pendelapparat von der Kommission angeschafft. 1896 publiziert Messerschmitt 52 Schwerestationen (Abb.1.4) mit Freiluftanomalien und Bougueranomalien (Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich. Jahrg. XLI, Jubiläumsband II).



Abb. 1.4 Verteilung der Schwerestationen um die Jahrhundertwende  
(nach Messerschmitt, 1887)

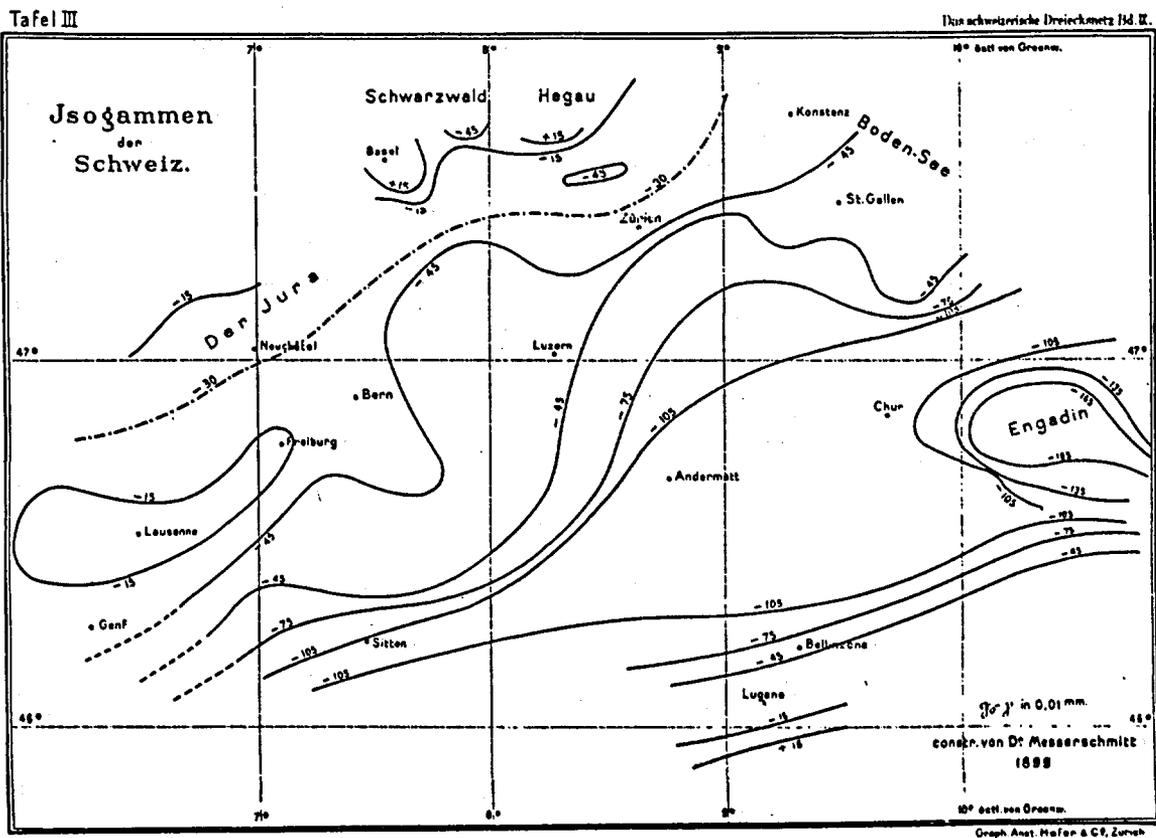


Abb. 1.5 Bougueranomalien ( Messerschmitt, 1901)

Nach 1880 tauchten auch erste Probleme mit Dreiecksschlüssen der Triangulation im Tessin auf, so dass Scheiblauser, damaliger Ingenieur der Geodätischen Kommission, die Berechnung der Massenwirkungen an neun Triangulationspunkten in Angriff nahm. Dazu verwendete er eine Karte im Massstab 1:500000 (Band IV der Publikationen der Schweizerischen Geodätischen Kommission). Das Verfahren der Massenrechnung zur Bestimmung der Lotabweichung wurde später von Rosenmund bei geodätischen Rechnungen im Zusammenhang mit dem Bau des Simplon-Tunnels mit Erfolg angewendet. 1894 präsentiert Du Pasquier, ein Geologe aus Neuchâtel, die Lotabweichungen für fünf Stationen im Meridian von Neuenburg. Zur gleichen Zeit unternahm Messerschmitt, der damalige Ingenieur der Kommission, ähnliche Rechnungen. Er fand auch, dass durch die Berücksichtigung von Massendefekten unter den Alpen die Lotabweichungen wesentlich reduziert werden konnten. 1901 veröffentlichte Messerschmitt Polhöhen- und Azimutmessungen in der Schweiz. In der gleichen Publikation wird auch das erste Geoid der Schweiz publiziert (Messerschmitt, 1901) (Abb.1.6).

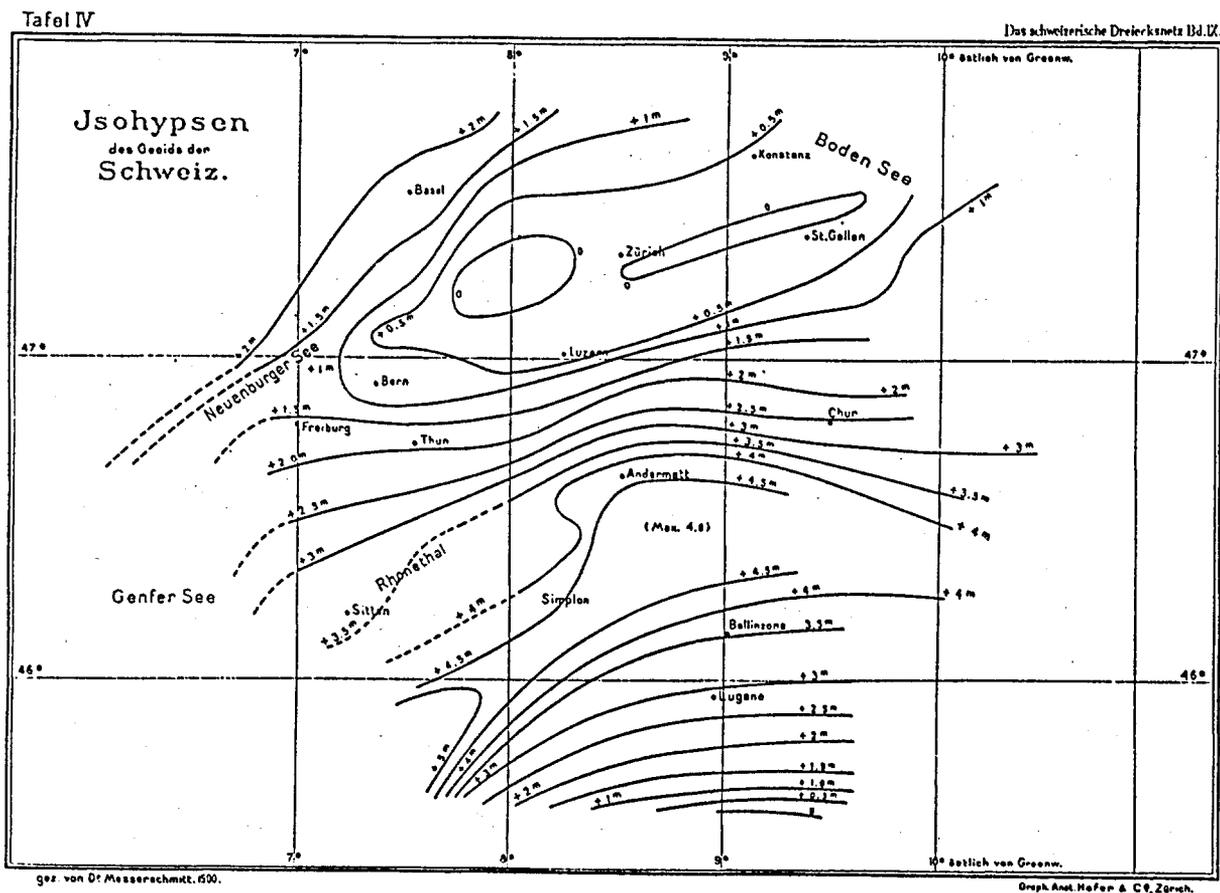


Abb. 1.6 Geoid der Schweiz (Messerschmitt, 1901)

Brillouin (1908) versuchte mit einer Eötvös'schen Drehwaage die 'Elliptizität des Geoides' im Tunnel des Simplon zu bestimmen. Das Problem der Lotabweichungen beschäftigte die Kommission weiterhin. Sie war von den Rechnungen der Vertikalen, eigentlich zu unrecht, auf Grund der auftretenden Diskrepanzen zwischen beobachteten und gerechneten Lotabweichungen nicht recht überzeugt. Auf die Ausschreibung eines Wettbewerbes hin brachten Otti und Lalive 1909 Lösungsansätze bezüglich der Lotabweichung. Allerdings wusste man nicht recht, wie die unsichtbaren Massen zu handhaben wären.

Im gleichen Jahr (1909) brachte die isostatische Theorie von Hayford eine Wende ins Problem "Lotabweichungen". Die erneute Ausschreibung eines Wettbewerbes hatte eine Arbeit von Niethammer und Lalive (1919), die im Band 17 der SGK (1925) publiziert wurde, zur Folge. Dort wurden die isostatischen Hypothesen von Pratt zur Anwendung gebracht. 1922 publizierte Niethammer im Bericht für die IAG Sitzung in Rom eine Isostatische und eine Bouguer Karte der Schweiz. Die Isostasie wurde mit dem Modell von Pratt und einer Ausgleichstiefe von 120 km mit 8 km x 8 km Topographieblöcken gerechnet. In die gleiche Zeitspanne fallen grössere Untersuchungen zur Geoidbestimmung mittels astronomischem Nivellements. 1916-1918 wurden astronomische Beobachtungen auf dem Meridian des St. Gotthard durchgeföhrt ( Band XIX der SGK, 1932). Die Resultate zeigten eine deutliche Beeinflussung des Geoides durch die Alpen (Band XX der SGK, Niethammer, 1939). Zur Bestimmung des Geoidprofils wurden nicht-beobachtete Lotabweichungen aus Massen

berechnet, natürlich mit damals beträchtlichem Aufwand. Den Meridian-Messungen folgten in den Jahren 1934-1936 Beobachtungen im Parallelkreis der Sternwarte Zürich. Sie sind mit den entsprechenden Auswertungen im Band XXII der SGK (Engi, Hunziker, 1944) dokumentiert. Zusätzliche Arbeiten wurden im Tessin zur Stützung und zur weiteren Untersuchung des im südlichen Teil stark abfallenden Geoides durchgeführt (Band XXIV der SGK, 1944).

Arbeiten von Finsterwalder (1937, 1951) veranlassten die Schweizerische Geodätische Kommission, Lotabweichungs- und damit Geoidbestimmungen mittels gegenseitigen Zenitdistanzen vorzunehmen. Vorerst wurden wiederum Messungen auf dem Gotthard-Meridian (Kobold, 1951) mit gutem Erfolg durchgeführt. Umfangreiche Messungen zur Geoidbestimmung mittels Höhenwinkeln erfolgten in den Jahren 1951-1964 (mit Unterbrüchen) im Berner Oberland, Wallis bis zum Gotthardmeridian (Wunderlin, 1967).

Parallel zu den astrogeodätischen Arbeiten wurden wesentliche gravimetrische Projekte realisiert. Die gravimetrische Anwendung zielte jedoch vornehmlich auf die geophysikalischen Implikationen. Durch den Einsatz von statischen Gravimetern, 1949 erstmals in der Schweiz eingesetzt, konnten detaillierte Schwerekarten erstellt werden. Vorerst am Institut für Geophysik der ETH Zürich (Gretener, 1954; Gassmann, 1959), ab 1954 auch am Geophysikalischen Laboratorium der Universität Genf (Poldini, 1963), wurden die Gravimetermessungen vor allem für geophysikalische Studien verwendet. Auf den Vorschlag von Gassmann hin erstellte die Schweizerische Geodätische Kommission in Zusammenarbeit mit dem Institut für Geophysik der ETH-Zürich und der Landestopographie ein Schweizerisches Schweregrundnetz. Die Messungen wurden von Hunziker (1959) zusammengestellt. Fischer hat auch einige Kontroll- und Anschlussmessungen in diesem Netz vorgenommen und eine entsprechende Ausgleichung durchgeführt (Fischer, 1970a, 1970b). Die Schweremessungen wurden bis etwa 1967 mit Worden-Gravimetern durchgeführt. Später waren vorwiegend LaCoste-Romberg Instrumente im Einsatz. Nach der Gründung der Schweizerischen Geophysikalischen Kommission (1971) wurde auf Vorschlag von Prof. C.Meyer de Stadelhofen hin die Erstellung einer neuen gravimetrischen Karte der Schweiz vorangetrieben (Präsident Prof. Dr. St.Müller). Am Projekt war die geophysikalische Gruppe der Universität Lausanne (R. Olivier) und die gravimetrische Gruppe des Geophysikalischen Institutes der ETH-Zürich (E. Klingelé) beteiligt. Die Finalisierung der Karte erfolgte durch Klingelé (Klingelé und Olivier, 1980).

Die Idee der rechnerischen Bestimmung von Lotabweichungen aus Massen wurde von Elmiger (1969) wieder aufgegriffen und sehr ausführlich behandelt. Insbesondere wurden dort Möglichkeiten zur Interpolation von Lotabweichungen und deren Darstellung mittels gewöhnlichen, Tschebicheff und Trigonometrischen Polynomen untersucht. Elmiger wendet sein Verfahren der Regularisierung mittels Massen (heute bekannt unter dem Namen

Remove-Restore-Technik) und der Interpolation (oder Prädiktion) mit Funktionalansätzen im Gebiet des Berner Oberlandes an. Die dort erreichten Genauigkeiten gibt er mit 5 bis 10 cm an. Elmiger präsentiert in (Elmiger, 1975a, 1975b) eine Berechnung des astrogeodätischen Geoides mit der Methode des Flächennivellements über die ganze Schweiz. Gurtner (1978) setzt für die Interpolation der reduzierten Lotabweichungen die Kollokation ein. Zusätzlich fließen für die Reduktionen der Messungen Informationen über den Ivrea-Störkörper und den Verlauf der Krusten-Mantel-Grenze ein. Zur Verdichtung der Lotabweichungsmessungen werden am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Zürich eine transportable Zenitkamera vom Hannoveranschen Typus (TZK 3) eingesetzt (Bürki, 1985a, Seeber, Torge, 1985). Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung stellt Kuhn (1981) in einer Diplomarbeit an. Die dortige, in der Schweiz erstmalige gravimetrische Berechnung des Differenzgeoides basiert auf der Stokes-Integration. Weitere Untersuchungen zur Interpolation von Schwereanomalien macht Frei (1984). Erst kürzlich wurden genaue astrogeodätische Geoidberechnungen in lokalen Gebieten, im speziellen in der Ivrea-Zone, von Marti (1985) durchgeführt. Er verwendet dort ebenfalls Funktionalansätze und in (Marti, 1988) empirische Kovarianzfunktionen. M. V. Müller (1986) wendet im lokalen Testnetz 'Turtmann' die Methoden der Integrierten Geodäsie zur Geoidbestimmung an. Durch die Entwicklungen im Bereich der Satellitengeodäsie, wurde es möglich, genaue ellipsoidische Positionen zu bestimmen. Aus dem Vergleich mit geodätisch bestimmten Positionen lässt sich direkt ein Geoid bestimmen. Eine derartige Geoidbestimmung erfolgte im Rahmen des von Marussi (1982) initiierten ALGEDOP mittels dem TRANSIT-System (Geiger, Wiget, 1986b, Geiger, Müller, 1987).

Gegenwärtig sind Arbeiten zur Geoidbestimmung im Gange, die das gegenüber TRANSIT wesentlich höhere Genauigkeitspotential von GPS ausnützen. Dazu wurde 1989 eine GPS-Kampagne ALGESTAR mit  $\approx 40$  über die Schweiz verteilten und an das Landesnivellement angeschlossenen Punkten gemessen. Ebenso sind Untersuchungen zur Kombination verschiedener Messgrößen im Gange. Die neuesten Arbeiten zur Kombination von Lotabweichungs- und Schweredaten mit Berücksichtigung der Masseneffekte von Topographie und Krustenstruktur werden gegenwärtig von Wirth (1990a) im lokalen Testnetz 'Turtmann' mit Erfolg durchgeführt (wenige mm Genauigkeit). Wirth (1990b) bearbeitet die Ausweitung der Lösungsmethode im Hinblick auf den Einbezug von GPS im schweizerischen Rahmen.

---

# **Teil I**

## **Theoretische Betrachtungen zum Geoid**

**Mathematische Zusammenhänge**

**Zum Randwertproblem**

**Beschreibung des Schwerefeldes**

## 2 Mathematische Zusammenhänge

### 2.1 Lösungen der Laplacegleichung in verschiedenen Koordinatensystemen

Die hier interessierenden Koordinatensysteme sind die

1. Kartesischen
2. Kugel
3. Ellipsoidischen

Koordinatensysteme.

Diese Koordinatensysteme sind sich von der Struktur ihrer Metrik  $g_{ij}$  her äquivalent, indem nur Diagonalterme auftreten. Dies heisst aber nichts anderes, als dass es sich um orthogonale Koordinaten handelt. Derartige Koordinatensysteme können z.B. durch das Studium von Flächenklassen und deren orthogonalen Trajektorien (Darboux, Lamé) konstruiert werden. Marussi führt ein natürliches Koordinatensystem für gravitierende Körper ein, das die Äquipotentialflächen einerseits und deren orthogonalen Trajektorien, die Schwerevektoren, andererseits als Gerüst aufweist.

Die Motivation zur Behandlung der Laplace-Gleichung ist dadurch gegeben, dass das Gravitationsfeld harmonisch ist, also die Laplace-Gleichung erfüllt. Dies liegt im  $1/r$ -Verhalten des Potentials einer kleinen Probemasse begründet. Ob dieses Newtonsche Verhalten in allen Abstandsbereichen (Stacey et al., 1987, Schwarzschild, 1988, Jekeli, Eckhard u.a.) und für alle Materialien (ursprünglich Eötvös et al., 1922, Fischbach, 1986, Thieberger 1987 u.a.) tatsächlich gilt, ist gegenwärtig Gegenstand verschiedenster Untersuchungen. Unter dem Begriff der '5. Kraft' sind viele dieser Experimente bereits popularisiert worden (Spiegel, 1988, Vonarburg, 1988). Nimmt man jedoch die Harmonizität des Potentials weiterhin als gegeben an, was für den hier gebrauchten Genauigkeitsanspruch sicher berechtigt ist, so wird man zwangsläufig auf die Lösung der Laplace-Gleichung geführt. Hier ist allerdings zu bemerken, dass für unsere Betrachtungen ein stationäres Schwerfeld vorausgesetzt wird. Das Schwerfeld ist also konservativ. Geht man jedoch zu zeitlich variablen Feldern über (z.B. Lindlohr, 1987), so ist die Laplace-Gleichung nicht mehr erfüllt. Da in unseren Daten die wesentlichen zeitlichen Änderungen (Gezeiten) eliminiert sind, genügt es für unsere Zwecke, den stationären Fall zu betrachten.

## 2.2 Allgemeines zur Separation der Laplacegleichung

Um die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zu finden, kann man versuchen, durch einen Separationsansatz die partielle Gleichung auf einzelne gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Dieses Vorgehen wird in vielen Büchern explizite am Beispiel der Laplacegleichung vorgeführt. Da meist kartesische oder Kugelkoordinaten verwendet werden, könnte man vermuten, dass ein Separationsansatz in allen orthogonalen Koordinatensystemen zum Erfolg führt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Vielmehr müssen für die Separation der Laplacegleichung folgende notwendigen und hinreichenden Gleichungen erfüllt werden, Moon and Spencer (1971):

$$\frac{g_{ii}}{g_{jj}} = \frac{A_{j1}}{A_{i1}}$$

$$\frac{g^{1/2}}{g_{ii}} = f_1 f_2 f_3 A_{i1}$$

wo  $g_{ij}$  die Komponenten des Metrik-Tensors im unterlegten Koordinatensystem und  $f_i(u^i)$  Funktionen einer Variablen sind.

$g^{1/2}$  bezeichnet die Determinante des Tensors  $g_{ij}$ .

Die  $A_{ij}$  sind die Unterdeterminanten (ohne Zeile  $i$  und Spalte  $j$ ) der Stäckelmatrix  $S$ ,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}(u^1) & S_{12}(u^1) & S_{13}(u^1) \\ S_{21}(u^2) & S_{22}(u^2) & S_{23}(u^2) \\ S_{31}(u^3) & S_{32}(u^3) & S_{33}(u^3) \end{bmatrix}$$

Mit dem Separations-Ansatz

$$W = U^1 U^2 U^3$$

$$U^i = U^i(u^i)$$

und den obigen Bedingungen für die Separierbarkeit zerfällt die Laplacegleichung

$$\Delta W = 0$$

in die folgenden drei separierten Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{du^i} \left( f_i \frac{dU^i}{du^i} \right) + U^i \sum_{j=1}^3 \alpha_j S_{ij} = 0$$

Im Falle der Laplacegleichung ist  $\alpha_1 = 0$

Das Auffinden der Stäkel-Matrix ist jedoch nicht immer einfach. Oftmals führt das direkte Einsetzen des Separationsansatzes in die Laplacegleichung ebenso schnell zu den drei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dazu muss allerdings der Laplaceoperator in den entsprechenden Koordinaten bekannt sein.

Wir wollen nun die Lösungen in den drei erwähnten Koordinatensystemen anschreiben.

## 2.3 Kartesische Koordinaten

### 2.3.1 Separation

Wir setzen:

$$u^1 = z, u^2 = y, u^3 = x$$

und  $U^1 = Z(z), U^2 = Y(y), U^3 = X(x)$

Für die Stäkel-Matrix findet man:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$|S| = 1$$

und

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1.$$

Daraus lassen sich die separierten Gleichungen durch Einsetzen in die allgemeinen Separationsgleichungen gewinnen:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_3 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_2 Y = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (\alpha_2 + \alpha_3) Z = 0$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Einsetzen des Separationsansatzes in die Laplace-Gleichung:

$$\Delta W = \Delta (X \cdot Y \cdot Z) = Y \cdot Z \frac{d^2 X}{dx^2} + X \cdot Z \frac{d^2 Y}{dy^2} + X \cdot Y \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Schliesst man nun die triviale Nulllösung aus, so darf die Gleichung durch  $W = X \cdot Y \cdot Z$  dividiert werden. Es ergibt sich mit der Bezeichnung " für die zweite Ableitung nach dem

jeweiligen Argument der Funktion:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Jeder Term der Summe hängt nur von einem Argument ab. Die drei Argumente  $x, y, z$  sind völlig unabhängig voneinander. Dies bedeutet, dass jeder Term für sich konstant sein muss. Man kann also setzen

$$\frac{X''}{X} = -\alpha_3 \quad \text{und} \quad \frac{Y''}{Y} = -\alpha_2$$

Es muss dann gelten:

$$\frac{Z''}{Z} = \alpha_2 + \alpha_3$$

Dies sind aber genau die obigen Separationsgleichungen.

Da  $Y$  gegenüber  $X$  nicht ausgezeichnet ist, setzen wir für  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  gleiches Vorzeichen.

$$\alpha_2 = p^2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2$$

oder

$$X'' + q^2 X = 0$$

$$Y'' + p^2 Y = 0$$

$$Z'' - (p^2 + q^2)Z = 0$$

Die Lösungen dieser drei Gleichungen können ohne weitere Rechnung angeschrieben werden:

$$X = A \sin qx + B \cos qx$$

$$Y = A \sin py + B \cos py$$

$$Z = A e^{(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} z} + B e^{-(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} z}$$

Da die Laplace-Gleichung homogen ist, können bekanntlich alle partikulären Lösungen überlagert werden. Den  $q$  und  $p$  werden keine weiteren Auflagen gemacht, wie etwa bei Kugelkoordinaten etc. Die Lösung  $W$  wird also:

$$W = X \cdot Y \cdot Z = \int X(q) \cdot Y(p) \cdot Z(q,p) \, dqdp$$

Die Integrationskonstanten A und B müssen den vorgegeben Randwerten der Funktion W angepasst werden. In unserem Fall ist eine Randbedingung für W die Beschränktheit der Potentialfunktion. Identifizieren wir die positive z-Achse mit der zunehmenden Höhe, so muss verlangt werden, dass A(q,p) in Z verschwindet.

Durch einfaches Ableiten zeigt man, dass auch die Form

$$W = A e^{c \cdot x},$$

c beliebiger isotroper Vektor (d.h.  $|c| = 0$ ),  
die Laplacegleichung ebenfalls erfüllt.

$$\Delta W = A \Delta e^{c \cdot x} = A c^2 e^{c \cdot x} = 0.$$

Die Verwandtschaft dieses Lösungsansatzes mit dem eben skizzierten, üblicherweise praktizierten Separationsansatz, ist durch die Wahl der Komponenten des isotropen Vektors c gegeben. Die Komponenten müssen offensichtlich imaginäre Terme enthalten, da mindestens ein Quadrat negativ wird. Es können demnach auch periodische Lösungen produziert werden. Zur Bestimmung der 3 Komponenten steht eine Gleichung und damit zwei Freiheitsgrade zur Verfügung. Folgender Ansatz zur Bestimmung isotroper Vektoren (Stiefel, 1973) führt zum Ziel:

$$c_1 = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2), \quad c_2 = \frac{1}{2i} (\alpha^2 + \beta^2), \quad c_3 = -\alpha\beta$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind beliebige komplexe Zahlen.

### 2.3.2 Zusammenhang mit dem Fourierintegral und der Fouriertransformation

Die X- und Y-Anteile des Separationsansatzes können in ein komplexes Fourierintegral umgewandelt werden. Wir betrachten vorerst nur den X-Term. Der Y-Term ist analog zu behandeln. Dazu setzen wir

$$A(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \sin q\xi \, d\xi$$

und

$$B(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \cos q\xi \, d\xi$$

Damit wird der X-Term:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) (\cos qx \cos q\xi + \sin qx \sin q\xi) \, d\xi \, dq$$

Mit der trigonometrischen Formel  $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$  wird das Integral vereinfacht zu:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \cos q(x-\xi) \, dq \, d\xi$$

Da die sin-Funktion ungerade ist, verschwindet das Integral über ein um den Nullpunkt symmetrisches Intervall. Das obige Integral kann daher um einen Summanden in folgender Weise erweitert werden:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) (\cos q(x-\xi) + i \sin q(x-\xi)) \, dq \, d\xi$$

Und mit der Euler'schen Formel wird

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) e^{iq(x-\xi)} dq d\xi$$

Wir führen nun noch einen "Wellenzahl"-Vektor  $k$  ein:

$$k = (u, v) = 1/2\pi (q, p)$$

Setzt man weiter den Koeffizienten

$$C(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) e^{-2\pi i u \xi} d\xi \quad ,$$

so erhält man schlussendlich

$$X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(u) e^{2\pi i u x} du \quad .$$

Dies entspricht aber der Fourierdarstellung von  $X$ , wie sie in Kapitel 3.3 verwendet wird.

Wir können anhand dieser Herleitung die Funktion

$$W = \int X(x, q) Y(y, p) Z(z, q, p) dq dp$$

umschreiben in

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-|k|z} e^{2\pi i kx} du dv$$

Dabei ist die Funktion  $C$  gegeben durch

$$C(k) = \iint_{-\infty}^{+\infty} X(x) Y(y) e^{-2\pi i kx} dx dy$$

Jede harmonische Funktion  $W(x,z)$  lässt sich also, ausgehend von den Randwerten  $W(x,z_0)$  in der Ebene  $z_0$ , in kartesischen Koordinaten in folgender Weise ausdrücken:

$$W(x,z) = F_{uv} \left\{ e^{-|k|(z-z_0)} F_{xy} \{ W(x, z_0) \} \right\}$$

$F_{uv} \{ . \}$  bezeichnet die Inverse-2D-Fouriertransformation

$u,v \rightarrow x,y$ .

$F_{xy} \{ . \}$  bezeichnet die 2D-Fouriertransformation

$x,y \rightarrow u,v$ .

Dies ist eine Formel zur analytischen Feldfortsetzung nach oben. Sie kann auch auf anderem Wege gefunden werden, z.B. Jekeli (1984). Diese Formel zeigt deutlich den Effekt der Fortsetzung nach oben. Mit zunehmendem  $z$  nimmt der Einfluss des von  $z$  unabhängigen Koeffizienten  $C$  ab. D.h. die auf der Höhe  $z_0$  bestimmten  $C(k)$  werden in einer Höhe  $z$  stark abgeschwächt auftreten. Diese Abschwächung nimmt mit anwachsendem  $|k|$  zu. Dies entspricht der Aussage, dass höher frequente Terme stärker "herausgefiltert" werden als tiefer frequente.

### 2.3.3 Homogene Polynome

Wir wollen einen weiteren Lösungsansatz in kartesischen Koordinaten beschreiben, der einen direkten Zusammenhang mit den Kugelfunktionen beinhaltet. Er geht von einer Potenzreihenentwicklung nach harmonischen Polynomen aus. Als harmonische Polynome werden homogene Polynome eingesetzt, die in einem  $\text{dim}$ -dimensionalen Raum die allgemeine Form haben:

$$P_n(x) = \sum_{|p|=n} A_p x^p$$

mit den Bezeichnungen

$$p = (p_1, \dots, p_{\text{dim}})$$

$$|p| = p_1 + \dots + p_{\text{dim}}$$

$$p_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$x^p = x_1^{p_1} \dots x_{\text{dim}}^{p_{\text{dim}}}$$

Für den uns hier interessierenden 3 dim. Fall schreibt sich ein solches Polynom

$$P_n(x) = \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = n} A_{p_1 p_2 p_3} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}$$

Dass harmonische Funktionen in solche Polynome entwickelt werden können, folgt aus dem folgenden Satz aus der Potentialtheorie:

Ist  $W$  harmonisch in einem Gebiet  $G$ , dann ist  $W$  analytisch in  $G$ , d.h.,  $W$  lässt sich um jeden Punkt  $x_0 \in G$  in eine  $\text{dim}$ -fache Potenzreihe

$$W(x) = \sum_p a_p (x-x_0)^p$$

entwickeln. Für den Beweis und für Konvergenzbetrachtungen sei z.B. auf Walter (1971, p.45) verwiesen. Dabei ist  $\text{dim}$  die Dimension des behandelten Raumes, hier  $\text{dim} = 3$ .

Es ist offensichtlich, dass die Terme der Potentialreihenentwicklung neu arrangiert werden können und die Reihe dann in eine Summe homogener Polynome übergeht

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

Wir wollen nun eine derartige Entwicklung für den 3 dim Fall berechnen. Ein homogenes Polynom kann in 3-dim z.B die Form

$$P_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^n = (ax + by + cz)^n$$

haben.

Dabei ist  $\mathbf{c} = (a,b,c)$  ein konstanter Koeffizientenvektor. Dieses Polynom soll nun die Laplacegleichung erfüllen, also:

$$\Delta P_n = n(n-1) \mathbf{c}^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^{n-2} = 0$$

Es muss also gefordert werden:

$$\mathbf{c}^2 = 0$$

Sämtlichen isotropen (Länge = 0) Vektoren  $\mathbf{c}$  sind demnach homogene (harmonische) Polynome als partikuläre Lösungen der Laplacegleichung zugeordnet.

Die Aufgabe besteht also darin, alle Vektoren  $\mathbf{c}$  zu finden, deren Länge 0 ist. Diese Aufgabe wurde bereits bei der Separation in kartesischen Koordinaten vorgeführt (Kap. 2.3.1). Dort fand man:

$$c_1 = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2), \quad c_2 = \frac{1}{2i} (\alpha^2 + \beta^2), \quad c_3 = -\alpha\beta$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind beliebige komplexe Zahlen. Setzen wir diese Koeffizienten in den Polynomansatz ein, so erhält man

$$P_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^n} \left( \alpha^2 (x-iy) - \beta^2 (x+iy) - 2\alpha\beta z \right)^n$$

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{x})$$

Die komplexen Größen  $\alpha$  und  $\beta$  müssen den Randbedingungen angepasst werden. Der Zusammenhang mit den Kugelfunktionen wird im nächsten Kapitel kurz gestreift.

## 2.4 Kugelkoordinaten

Meistens werden für die sphärischen Koordinaten die Größen

$$\begin{aligned} u^1 &= r & \text{Radius} & \quad 0 \leq r < \infty \\ u^2 &= \vartheta & \text{Poldistanz} & \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ u^3 &= \varphi & \text{Länge} & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

eingeführt. Die Separationsfunktionen sind dann

$$U^1 = R(r), \quad U^2 = \Theta(\vartheta), \quad U^3 = \Phi(\varphi)$$

Die Transformationsgleichungen sind mit obigen Variablen dann bekanntlich:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die metrischen Koeffizienten zu

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta \quad ; \quad |g| = r^2 \sin^2 \vartheta$$

Die Stäkel-Matrix wird

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus gewinnt man die Separationsgleichungen

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{\alpha_2}{r^2} R = 0$$

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left( \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

$$\Phi'' + \alpha_3 \Phi = 0$$

Dabei werden die Separationskonstanten

$$\alpha_2 = p(p+1) \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2 \quad \text{gesetzt.}$$

Partikuläre Lösungen dieser Gleichungen lauten:

$$R = A r^p + B r^{-(p+1)}$$

$$\Theta = A P_p^q(\cos \vartheta) + B Q_p^q(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin q\varphi + B \cos q\varphi$$

$P$  und  $Q$  sind die Legendre-Funktionen 1. bzw. 2. Art. Diese Funktionen sind vorerst noch zu unterscheiden von den spezielleren Legendre-Polynomen, die erst durch die Randbedingungen oder vielmehr durch die Periodizitätsbedingungen der Lösung entstehen.

Obige Differentialgleichung in  $\vartheta$  ist ein Spezialfall der allgemeinen Legendre-Wellengleichung:

$$(z^2 - 1) Z'' + 2z Z' + \left( \tau^2 a^2 (z^2 - 1) - p(p+1) - \frac{q^2}{z^2 - 1} \right) Z = 0$$

Lösungen davon sind:

$$Z(z) : P_p^q(\tau a, z) \quad \text{und} \quad Q_p^q(\tau a, z)$$

Dabei muss weder  $p$  noch  $q$  ganzzahlig sein.

Unsere Gleichung erhält man mit  $\tau = 0$  und durch die Variablensubstitution  $z = \cos \vartheta$ . Dabei wird  $Z = \Theta$  gesetzt:

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left( p(p+1) - \frac{q^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

Als Folge der Geschlossenheit der Kugeloberfläche müssen wir im Azimut nur  $2\pi$ -periodische Funktionen betrachten. Also muss für den azimutabhängigen Teil gelten:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

Es gilt demnach

$$\text{trig}(q\varphi) = \text{trig}(q(\varphi + 2\pi)) = \text{trig}(q\varphi + q2\pi)$$

was nur erfüllt werden kann, wenn  $q$  eine ganze Zahl  $q = m$  ist. Zudem ergeben sich

physikalisch interessante Lösungen nur bei ganzzahligem  $p$ . Dies wird im nächsten Kapitel klargelegt. Die Partikulärlösungen werden also:

$$R = A r^n + B r^{-(n+1)}$$

$$\Theta = A P_n^m(\cos \vartheta) + B Q_n^m(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi$$

Hierin sind nun die  $P$  und  $Q$  die für ganzzahlige Indizes spezialisierten Legendre-Funktionen 1. bzw. 2. Art, die sogenannten zugeordneten Legendre-Polynome. Die Koeffizienten müssen den gegebenen Randbedingungen angepasst werden. Fordert man etwa die Beschränktheit des Potentials für  $r \rightarrow \infty$ , so muss der Term  $A$  in  $R$  verschwinden. (Die Lösung ist dann aber im Nullpunkt nicht regulär.) Ebenso  $B$  in  $\Theta$ , da  $Q_n$  an den Polen (Argument =  $\pm 1$ ) divergiert. Wir finden also als Partikulärlösung der Laplacegleichung in gebräuchlicher Schreibweise

$$W_n^m = R_n \Theta_n^m \Phi^m = r^{-(n+1)} P_n^m(\cos \vartheta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi)$$

und mithin die Gesamtlösung:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n Y_n^m$$

Dass die Summation über  $m$  nur bis  $n$  zu laufen braucht, ist direkt aus der Definition der zugeordneten Legendre-Polynome zu entnehmen

$$P_n^m = \frac{d^m}{dz^m} P_n = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n$$

Die höchste vorkommende Potenz beträgt  $2n$ . Alle Ableitungen grösser als  $2n$  werden also 0. Damit kann man schreiben  $n+m \leq 2n$  oder  $m \leq n$ . Dies wird auch durch Betrachtungen der Vollständigkeit des Kugelfunktionssystems gezeigt.

### 2.4.1 Zusammenhang mit Homogenen Polynomen

Im Kapitel 2.3.3 hatten wir ein homogenes Polynom  $P_n$  in kartesischen Koordinaten gefunden, das für beliebige komplexe  $\alpha$  und  $\beta$  die Laplacegleichung erfüllt.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \left( \alpha^2 (x-iy) - \beta^2 (x+iy) - 2\alpha\beta z \right)^n$$

Führt man nun Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) ein, so kann man schreiben:

$$x \pm iy = r \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta$$

$$P_n = r^n \frac{1}{2^n} \left( \alpha^2 e^{-i\varphi} \sin \vartheta - \beta^2 e^{i\varphi} \sin \vartheta - 2\alpha\beta \cos \vartheta \right)^n$$

oder:  $P_n = r^n \cdot Y_n$

Nach längerer Rechnung (z.B. Stiefel, 1973) findet man aus den erzeugenden Funktionen  $Y_n$  durch Ableiten die Kugelfunktionen  $Y_n^m$

$$Y_n^m = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(m+n)!} \sin^m \vartheta e^{im\varphi} \frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}} (1-z^2)^n$$

oder

$$Y_n^m = (-1)^n \frac{n!}{(m+n)!} e^{im\varphi} P_n^m$$

Dabei ist  $z = \cos \vartheta$  und  $-n \leq m \leq +n$ .

Dies ist eine komplexe Schreibweise der bekannten Kugelfunktionen, die sich sofort als Real- und Imaginärteil der obigen Funktion ergeben. Dann allerdings muss  $m$  nur von 0 bis  $n$  laufen. Die auf der Einheitskugel normierten Kugelflächenfunktionen sehen dann wie folgt aus:

$$Y_n^m = (-1)^{n+m} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\varphi} P_n^m$$

Es gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\iint Y_n^{m*} Y_n^{m'} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

dabei ist

$$Y_n^{m*} = (-1)^m Y_n^{-m}$$

## 2.5 Ellipsoidische Koordinaten

Wir setzen entsprechend Moon and Spencer (1971) für die Variablen in ellipsoidischen Koordinaten die Größen

$$u^1 = \eta \quad \text{Radius} \quad 0 \leq \eta < \infty$$

$$u^2 = \vartheta \quad \text{Poldistanz} \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$u^3 = \varphi \quad \text{Länge} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Die Separationsfunktionen heissen dann

$$U^1 = H(\eta), \quad U^2 = \Theta(\vartheta), \quad U^3 = \Phi(\varphi)$$

Als konstanter Parameter wird die lineare Exzentrizität  $E = e \cdot a$  eingeführt.

Die Transformationsgleichungen sind mit obigen Variablen dann:

$$x = E \cosh \eta \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = E \cosh \eta \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = E \sinh \eta \cos \vartheta$$

Daraus ergeben sich die metrischen Koeffizienten zu

$$g_{11} = g_{22} = E^2 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \vartheta), \quad g_{33} = E^2 \cosh^2 \eta \sin^2 \vartheta,$$

$$|g| = E^3 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \vartheta) \cosh \eta \sin \vartheta$$

Die Stäkel-Matrix wird

$$S = \begin{bmatrix} E^2 \cosh^2 \eta & -1 & \frac{1}{\cosh^2 \eta} \\ -E^2 \sin^2 \vartheta & 1 & -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die Separationsgleichungen

$$H'' + \tanh \eta H' + \left( -\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\cosh^2 \eta} \right) H = 0$$

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left( \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

$$\Phi'' + \alpha_3 \Phi = 0$$

Dabei werden die Separationskonstanten wiederum

$$\alpha_2 = p(p+1) \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2 \quad \text{gesetzt.}$$

Interessanterweise unterscheidet sich nur die erste Gleichung von den Kugelgleichungen. Die ellipsoidische Form hat sozusagen nur einen Effekt auf den 'radialen Term'. Die Gleichung in  $H$  stellt ebenfalls eine Legendre-Differentialgleichung dar. Durch gleiche Betrachtungen, wie im Falle des Kugelproblems, kommt man zum Schluss, dass sowohl  $p$  als auch  $q$  ganzzahlig sein müssen.

Partikuläre Lösungen der Separationsgleichungen lauten mit  $p = n$  und  $q = m$ :

$$H = A P_n^m(i \sinh \eta) + B Q_n^m(i \sinh \eta)$$

$$\Theta = A P_n^m(\cos \vartheta) + B Q_n^m(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi$$

$P$  und  $Q$  sind, da  $n$  und  $m$  bereits ganzzahlig gesetzt sind, wie bei der Kugellösung die zugeordneten Legendre-Polynome 1. bzw. 2. Art. Die Beschränktheit des Potentials fordert wiederum, dass  $B$  in  $\Theta$  verschwindet. Wenn wir auch hier den Nullpunkt ausklammern, also  $0 < \eta < \infty$ , so muss zusätzlich  $A$  in  $H$  verschwinden, da die  $P$ 's mit zunehmendem Argument divergieren. Wir gelangen somit zur Partikulärlösung der Laplace-Gleichung

$$W_n^m = H_n \Theta_n^m \Phi^m = P_n^m(i \sinh \eta) P_n^m(\cos \vartheta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) .$$

Die Gesamtlösung sieht formal gleich wie die Kugellösung aus, allerdings muss man beachten, dass die Koeffizienten  $a_{nm}$  und  $b_{nm}$  imaginär sind:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(i \sinh \eta) Y_n^m$$

Die Laplace-Gleichung ist also in die Funktionen  $H, \Theta, \Phi$  separierbar. Dabei ist zu beachten, dass  $H$  eine Funktion der ellipsoidischen Koordinaten  $\eta$  ist und nicht der geodätisch definierten Höhe  $h$  entspricht. Im geodätischen System  $(\phi, \lambda, h)$  ist die Gleichung nicht separierbar. Dies zeigt Grafarend (1988) ebenfalls anhand der Separationsbedingungen mit Stäckelfunktionen.

## 2.6 Zur Konstruktion spezieller harmonischer Funktionen

Es sollen hier einfache Funktionen, die bei verschiedenen Rechnungen und Herleitungen auftreten können, auf ihre Harmonizität hin untersucht werden.

$u$  sei eine harmonische Funktion,

$$\Delta u = 0 .$$

Damit erhält man für den Gradienten in euklidischen Koordinaten

$$\mathbf{g} = \nabla u \quad \text{und} \quad \Delta g_i = \Delta u_{,i} = (\Delta u)_{,i} = 0$$

D.h. die Komponenten des Gradienten sind wieder harmonisch.

Diese Konstruktion kann verallgemeinert werden durch den Ausdruck

$$H = \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$$

$H$  ist wieder harmonisch.

Dies ist anhand der Vertauschbarkeit der Ableitungen leicht zu zeigen.

$$\Delta H = \Delta \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \Delta u = 0$$

Über diese Konstruktion (Courant, Hilbert) kommt man zur Maxwell(-Sylvester'schen) Darstellung der Kugelfunktionen (siehe Kap. 3.4) und zu den Multipolen. Diese Formulierung kommt bei Flächenbelegungspotentialen wieder zum Vorschein (Meissl, Hofmann-Wellenhof, 1983).

Weitere nützliche Funktionen lassen sich einfacher in Kugelkoordinaten beschreiben. Der Laplace-Operator kann dann geschrieben werden als:

$$\Delta u = \frac{1}{r} (ru)'' + \frac{1}{r^2} \Lambda u$$

oder in der selbstadjungierten Form (siehe Kap. 2.9) des Radialteils:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u')' + \frac{1}{r^2} \Lambda u$$

mit den Abkürzungen

$$\partial/\partial r = '$$

$\Delta$  Laplace(-Beltrami)-Operator auf der Kugel (Winkelanteil).

Für harmonische Funktionen muss also gelten

$$\Delta u = -r(ru)''$$

Setzt man etwa

$$u = r^n ,$$

dann ergibt sich wegen  $\Delta r^n = 0$  sofort

$$(n+1)n r^{n-1} = 0 .$$

Dies ist für beliebige  $r$  nur mit  $n = -1$  erfüllbar.

Eine weitere Klasse von Funktionen wäre

$$u = r^n H ,$$

$H$  harmonisch, d.h. es muss gelten

$$\Delta H = -r(rH)''$$

und mithin

$$n r^{n-1} ((n+1)H + 2H') = 0 .$$

Dies ist für ein beliebiges  $H$  nur im Falle von  $n = 0$  erfüllt. Dies heisst also, dass mit  $r$  multiplizierte harmonische Funktionen nicht mehr harmonisch sein können.

Ein interessanter Fall ergibt sich bei Funktionen der Form:

$$u = r^n H' ,$$

wo  $H$  wiederum harmonisch ist. Beachtet man die Linearität der Ableitungsoperatoren, d.h:

$$(\Delta H') = (\Delta H)' = -r(rH)''',$$

so bleibt

$$(n-1)r^{n-2}((n+2)H' + 2rH'') = 0$$

und damit  $n = 1$ . Die Multiplikation mit  $r$  von Radialableitungen harmonischer Funktionen ist wieder harmonisch. Setzt man in der letzten Formel  $n = 0$ , so ist ersichtlich, dass  $H'$  alleine i.a. nicht harmonisch sein kann. Diese Tatsache wird bei der Stoke'schen-Lösung des Randwertproblems berücksichtigt. Dort gilt in sphärischer Approximation

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial r} = T',$$

was i. a. nicht harmonisch ist, ganz im Gegensatz zu  $rT'$ .

Beim Lösen des Randwertproblems für die Kugel taucht manchmal die Kelvintransformation auf. Die Transformation entspricht der Spiegelung an der Einheitskugel. In z.B. Courant-Hilbert ist gezeigt, dass falls

$$u(\mathbf{x}) \text{ harmonisch ist}$$

auch

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{\mathbf{x}}{r^2}\right)$$

harmonisch wird ( $n =$  Dimension des betrachteten Raumes).

Für  $n = 3$  Dimensionen gilt also

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} u\left(\frac{\mathbf{x}}{r^2}\right)$$

Aus der Funktion  $u$  lässt sich somit sofort eine weitere harmonische Funktion konstruieren.

## 2.7 Approximation von Funktionen im Hilbertraum $H^0$

In diesem Kapitel wird kurz auf die Approximation von Funktionen eingegangen. Im speziellen können die Formeln auf die Kugelfunktionsentwicklungen angewendet werden. Es wird ein Verfahren (2.7.4) aufgezeigt, wie auch unregelmässig verteilte Stützpunkte durch entsprechende Gewichtung in Ausgleichsansätze (oder Kollokation) einzuführen sind.

### 2.7.1 Norm und Approximation

Wir betrachten Funktionen im Hilbertraum  $H^0$  über  $G$ , wo die folgende übliche Norm definiert sein soll (Sobolevnorm 0. ter Ordnung, Lebesgue-Norm)

$$\|f\| := \int_G f^2 dG$$

Das Skalarprodukt schreibt sich dann

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \cdot g dG$$

Definitionsgemäss existiert in  $H^0$  ein vollständiges ortho(normiertes) Basissystem  $e_i$  mit  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Etwas allgemeiner kann ein "gewichtetes" Skalarprodukt definiert werden

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \cdot g \cdot \mu dG$$

mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion

$$\mu = \mu(x), \quad x \in G$$

Bei komplexwertigen Funktionen ist  $f^*$  zu setzen.

Die Funktion  $f$  kann als Reihe dargestellt werden ([ ] stelle die Summe dar):

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i = [c_i \cdot e_i]_0^{\infty}$$

Wird die Funktion  $f$  nur bis zum Term  $N$  approximiert, so bleibt ein Approximationsfehler von

$$\Delta f_N = f - [c_i e_i]_0^N$$

Offensichtlich (z.B. Stiefel, 1973) ist der Fehler  $\Delta f_N$  normal zum Unterraum  $R^N$ , der durch  $\{e_i \mid i = 0, \dots, N\}$  aufgespannt wird und damit auch senkrecht auf der Approximation  $f_N$ . Dies zeigt man durch folgende Multiplikation (man beachte dabei die Linearität des Skalarproduktes):

$$\begin{aligned} \langle \Delta f_N, f_N \rangle &= \langle f, f_N \rangle - \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \langle f, [c_i e_i]_0^N \rangle - \langle [c_i e_i]_0^N, [c_j e_j]_0^N \rangle \\ &= [c_i \langle f, e_i \rangle]_0^N - [[c_i c_j \langle e_i, e_j \rangle]_0^N]_0^N \\ &= [c_i^2]_0^N - [[c_i c_j \delta_{ij}]_0^N]_0^N \\ &= [c_i^2]_0^N - [c_i^2]_0^N = 0 \end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Rechnung zeigt man, dass die obige Approximation die Funktion  $f$  im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert. Es gilt also zu zeigen, dass

$$\int_G (f - f_N)^2 dG = \min.$$

gilt, oder in obiger Schreibweise:

$$\langle f - f_N, f - f_N \rangle = \min.$$

Die Stationarität im Parameterraum muss also gewährleistet sein:

$$\begin{aligned} d \langle f - f_N, f - f_N \rangle &= -2 \langle f - f_N, df_N \rangle = -2 \langle f - f_N, [dc_i e_i] \rangle \\ &= -2 \left( [dc_i \langle f, e_i \rangle] - [dc_i \langle [c_j e_j] e_i \rangle] \right) \\ &= -2 \left( [dc_i c_i] - [dc_i c_i] \right) = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die obige orthogonale Reihenentwicklung tatsächlich eine beste Approximation im Sinne der Kleinsten Quadrate. Die Koeffizienten ergeben sich sofort aus den entsprechenden Projektionen

$$c_i = \langle f, e_i \rangle$$

Dass eine Reihe mit zunehmendem  $N$  eine monoton besser werdende Approximation einer Funktion  $f$  liefert, kann auf Grund der Definition der Norm gezeigt werden:

$$\|\Delta f_N\| = \langle \Delta f_N, \Delta f_N \rangle = \langle f - f_N, \Delta f_N \rangle = \langle f, \Delta f_N \rangle - \langle f_N, \Delta f_N \rangle$$

Mit der oben gezeigten Orthogonalität der Näherung und des Fehlers erhält man:

$$\|\Delta f_N\| = \langle f, \Delta f_N \rangle$$

Weitere Umformungen liefern:

$$\begin{aligned} \|\Delta f_N\| &= \langle f, f - f_N \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, f_N \rangle = \|f\| - \langle f, [c_i e_i]^N \rangle \\ &= \|f\| - [c_i \langle f, e_i \rangle]^N \end{aligned}$$

oder

$$\|\Delta f_N\| = \|f\| - [c_i^2]^N$$

Dies ist die bekannte Bessel'sche Formel.

Es gilt offensichtlich:

$$\|\Delta f_{N+1}\| \leq \|\Delta f_N\|$$

Der Fehlerbetrag im Sinn der oben definierten Norm wird also im allgemeinen tatsächlich mit zunehmendem  $N$  kleiner. Ob er gegen 0 konvergiert, ist damit jedoch nicht gezeigt. Betrachten wir jedoch Funktionen im Hilbertraum, so muss der Fehler infolge der Vollständigkeit des Basissystems definitionsgemäss gegen 0 konvergieren. Die Norm der Funktion wird also (vergl. Satz von Pythagoras):

$$\|f\| = [c_i^2]^\infty$$

Wählt man etwa Polynome als Basisfunktionen, so ist die gleichmässige Konvergenz der Reihenentwicklung einer stetigen Funktion (wie sie durch das Potential gegeben ist) laut dem Weierstrass'schen Approximationssatz gewährleistet (z.B. Smirnov, II, 509). Vergleichbares gilt für Fourier-Entwicklungen. Da ist jedoch der Satz von Dirichlet anzuwenden (z.B. Smirnov, II, 465).

### 2.7.2 Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten

Das Problem liegt nun darin, die Koeffizienten  $c_i$  aus einer endlichen Anzahl diskreter Messungen (Stützwerten) von  $f$  zu bestimmen. Insbesondere stellen sich zwei Fragen: Ändern sich die Koeffizienten  $c_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), falls ein weiterer Näherungsterm  $N+1$  hinzugefügt wird und ergeben sich aus einem least square fit und aus der Projektion die gleichen Koeffizientensätze?

Im kontinuierlichen Fall wurden beide Fragen im vorangestellten Abschnitt beantwortet. Da orthogonale Basisfunktionen verwendet werden, sind auch die Koeffizienten entkoppelt und ändern sich beim Hinzufügen höherer Terme nicht mehr. Es wurde ebenfalls gezeigt, dass eine Entwicklung im obigen Sinne genau einem least square fit gleichkommt.

Die Antworten komplizieren sich im Falle einer diskreten Stützwertverteilung. Die diskretisierte Form der Projektion  $c_i = \langle f, e_i \rangle$  lautet dann:

$$c_i = [ f_k e_{ik} \Delta G_k ]_k$$

- $f_k$  Funktion  $f$  an der Stelle  $x_k$
- $e_{ik}$  Basisfunktion  $e_i$  an der Stelle  $x_k$
- $\Delta G_k$  Integrationselement
- $P_k$  Gewichtsfunktion

Diese Formel entspricht der Mittelpunktsregel im Eindimensionalen. Sie hat, wie die Trapezregel einen Näherungsfehler der Ordnung  $O(h^2)$  (Henrici, 1972).  $h$  ist die Schrittweite und entspricht  $\Delta G_k$ . Zur diskreten Berechnung des Skalarproduktes können auch andere ausgefeiltere Methoden der numerischen Integration benutzt werden.

Die Koeffizientenbestimmung kann auch durch eine Parameterschätzung nach kleinsten Quadraten erfolgen:

$$[ P_k (f_N - f_k)^2 ] = [ P_k ( [c_i e_{ik}]_i - f_k )^2 ]_k = \min$$

Damit erhält man nach der Ableitung in üblicher Weise die Gleichungen für die gesuchten  $c_j$ :

$$[ P_k ( [c_i e_{ik}]_i - f_k ) e_{jk} ]_k = 0$$

Die Lösung ergibt sich als:

$$c_i = \left[ \left[ e_{jk} P_k e_{ik} \right]_k^{-1} \cdot \left[ e_{jk} P_k f_k \right]_k \right]_j$$

Dabei ist das Inverse  $-1$  als Matrixinversion aufzufassen.

Die Formeln werden in Matrixnotation etwas übersichtlicher. Dazu setzen wir:

$$\begin{aligned} c_i &\rightarrow \mathbf{c} \\ f_k &\rightarrow \mathbf{f} \\ e_{ik} &\rightarrow \mathbf{A} \\ \Delta G_k &\rightarrow \mathbf{G} \\ P_k &\rightarrow \mathbf{P} \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\mathbf{G}$  diagonal ist.

Die Bestimmung der Koeffizienten durch Projektion lautet dann:

$$\mathbf{c}_{\text{Proj}} = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{f}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert:

$$\mathbf{c}_{\text{Quad}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

Identifiziert man nun die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  mit der Matrix  $\mathbf{G}$  der Integrationsschritte, so kann man sofort schreiben:

$$\mathbf{c}_{\text{Quad}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{c}_{\text{Proj}}$$

Wäre die Matrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$  gleich der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ , so würden die Lösungen beider Methoden absolut gleich ausfallen. Die Matrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$  entspricht dem Skalarprodukt der Basisfunktionen untereinander. Da wir orthonormierte Basen voraussetzen wollen, wird die Matrix bis auf die Effekte der Diskretisation der  $\mathbf{E}$ -Matrix entsprechen. (Die numerische Integration liefert eine Fehlermatrix  $\mathbf{S}$  von der Ordnung  $O(h^2)$ .) Wir setzen demzufolge:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \approx \mathbf{E} + \mathbf{S}$$

Die Inverse wird dann näherungsweise

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \approx \mathbf{E} - \mathbf{S} .$$

Damit findet man eine Abschätzung für die Übereinstimmung der beiden Lösungen

$$c_{\text{Quad}} = c_{\text{Proj}} - S c_{\text{Proj}}$$

Die Übereinstimmung ist also ebenfalls von der Ordnung  $O(h^2)$ . Im übrigen ist zu bemerken, dass die Lösungen mit  $O(h^2)$  gegen  $c$  konvergieren.

### 2.7.3 Einfluss der Ordnung der Entwicklung auf die Koeffizienten

Die Frage nach der Änderung von  $c$  infolge der Erweiterung der Reihenentwicklung auf  $N+1$  Terme ist im Falle der Projektion sofort zu beantworten. Anhand der Gleichung  $c_{\text{Proj}} = A^T G f$  ist ersichtlich, dass das Hinzufügen eines Terms oder entsprechend einer Zeile in  $A^T$  keinen Einfluss auf die  $N$  ersten Koeffizienten hat.

Dagegen werden bei der Minimumsapproximation durch Hinzufügen eines  $N+1$  ten Terms alle früheren  $N$  Terme verändert. Die Grössenordnung dieser Änderung wollen wir grob abschätzen.

Wir setzen

$$I = A^T G f \quad \text{und}$$

$$N = A^T G A.$$

Dann werden die  $N$  Terme  $c_0$  durch folgende Gleichung gegeben:

$$c_0 = N^{-1} I$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

Werden nun die Zusatzkoeffizienten  $d$  angefügt, so erhält das System eine Ränderung in folgender Weise:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & Q \\ Q^T & U \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & R \\ R^T & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ k \end{bmatrix}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die ersten  $N$  Terme nun lauten

$$\mathbf{c} = \mathbf{M} \mathbf{l} + \mathbf{R} \mathbf{k}$$

und

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}^T \mathbf{l} + \mathbf{V} \mathbf{k}$$

Aus der Bedingung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

erhält man:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{U} - \mathbf{Q}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q})^{-1}$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{V}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{R}^T)$$

Die ersten  $N$  Koeffizienten werden also

$$\mathbf{c} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}^T \mathbf{l} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{k} = \mathbf{c}_0 - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{d}$$

Für orthonormierte Basissysteme muss gelten:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{S} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \mathbf{O}(h^2)$$

und

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0} + \mathbf{O}(h^2)$$

Die  $N$  ersten Koeffizienten werden demnach

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 - (\mathbf{E} - \mathbf{S}) \mathbf{Q} \mathbf{d} \approx \mathbf{c}_0 - \mathbf{Q} \mathbf{d}$$

Wird demnach ein  $N+1$  ter Term  $c^{N+1}$  der Entwicklung zugefügt, so ändern sich die alten  $N$  Terme nach folgender Gleichung:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 - c^{N+1} \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0} + \mathbf{O}(h^2)$$

### 2.7.4 Einfluss der Stützpunktverteilung

Mit dem vorhin entwickelten Formalismus ist diese Frage relativ leicht zu lösen. Die Wahl der Gewichte  $G$  im ungleichabständigen Fall ist nicht ganz einfach zu treffen. Wir nehmen an, dass  $G$  die richtige sei. Dann wird ein Fehler  $\delta G$  auf einen Fehler in den durch Projektion erhaltenen Koeffizienten führen:

$$c_{\text{Proj}} + \delta c_{\text{Proj}} = A^T(G + \delta G)f$$

$$\delta c_{\text{Proj}} = A^T \delta G f$$

Der Fehler geht hier also linear ein. Bei der Lösung über kleinste Quadrate wird

$$c_{\text{Quad}} + \delta c_{\text{Quad}} = (A^T(G + \delta G)A)^{-1} A^T(G + \delta G)f$$

Die Inverse wird unter der Beachtung eines kleinen numerischen Fehlers  $S$ :

$$(A^TGA + A^T \delta GA)^{-1} \approx (E + S + A^T \delta GA)^{-1} \approx E - S - A^T \delta GA$$

Vernachlässigt man quadratische Terme in  $\delta G$  und  $S$ , so erhält man:

$$\delta c_{\text{Quad}} = A^T \delta G f - A^T \delta G A A^T G f = A^T \delta G (E - A A^T G) f$$

Wir berechnen den Klammerausdruck und setzen vorübergehend:

$$D = E - A A^T G \quad \text{und} \quad DA = A - A A^T GA = -AS$$

Daraus ergibt sich:

$$D = -AS A^T G$$

und damit

$$\delta c_{\text{Quad}} = -A^T \delta G A S A^T G f \approx 0$$

Ist die numerische Integration 'genau', so wird

$$\delta c_{\text{Quad}} = 0$$

Dies heisst aber, dass der Einfluss durch die Ungleichabständigkeit durch die Ausgleichung mindestens mit  $O(h^2)$  zum Verschwinden gebracht wird, während bei der Projektion der

Fehler  $\delta G$  linear eingeht. Führt man als Gewichte in der Ausgleichung das Mass für das durch die entsprechende Stützstelle repräsentierte Raumelement (Matrix  $G$ ) ein, so wird die Orthogonalität lediglich im Rahmen von  $O(h^2)$  zerstört. Auf diese Weise lässt sich also auch bei ungleichabständigen Stützpunktverteilungen eine orthogonale Entwicklung durch kleinste Quadrate Ausgleichung gewinnen.

### 2.7.5 Häufig verwendete Systeme

Als Beispiele seien die in der Geodäsie häufig angetroffenen orthogonalen Systeme erwähnt. Im Intervall  $[-1,1]$  und mit der Gewichtsfunktion  $\mu \equiv 1$  bilden die (zugeordneten) Legendre Polynome bezüglich

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f \cdot g \, dG$$

ein orthogonales System. Es gilt bekanntlich:

$$\langle P_k^m, P_n^m \rangle = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk}$$

Führt man die Gewichtsfunktion

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ein, so erhält man das Orthogonal-System der Tschebyscheff-Polynome 1. Art

$$\langle T_m, T_n \rangle = \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{n0} \right) \delta_{nm}$$

In zwei Dimensionen kommt in der Geodäsie häufig die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen (über der Einheitskugel) zum Tragen:

$$\langle Y_k^l, Y_n^m \rangle = \int Y_k^l \cdot Y_n^m \, d\Omega = \delta_{lm} \delta_{kn}$$

Die Integration wird ausgeschrieben als:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$$

## 2.9 Operatoren im Funktionalraum

Da im Zusammenhang mit der Lösung des Randwertproblems die Greensche Funktion als Operator aufgefasst wird (Kap. 3.2.2), soll hier der Operator-Begriff im Zusammenhang mit dem Funktionalraum kurz erwähnt werden.

Lineare Operatoren bilden die Elemente  $f_i$  eines linearen Raumes in folgender Weise ab:

$$f \rightarrow Af \quad \text{und} \quad A[\alpha_i f_i] = [\alpha_i Af_i]$$

Falls der Raum endlich-dimensional ist und durch die orthonormierte Basis  $e_i$  aufgespannt wird, kann die Koeffizientenmatrix

$$a_{ik} = \langle Ae_k, e_i \rangle$$

definiert werden. Der Operator kann also bezüglich einer Basis  $e_i$  in Matrixschreibweise dargestellt werden (die Elemente sind abhängig von der gewählten Basis). Insbesondere werden die für die Lösung des Randwertproblems wichtigen reproduzierende Kerne (Kap. 2.8.3) nochmals hergeleitet.

### 2.8.1 Selbstadjungierte Operatoren

Für unsere Betrachtungen sind hermitesche oder selbstadjungierte Operatoren von Bedeutung. Für sie gilt:

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

Die entsprechende Matrix wird:

$$a_{ik} = \langle Ae_k, e_i \rangle = \langle e_k, Ae_i \rangle = \langle Ae_k, e_i \rangle^* = a_{ki}^*$$

\* bezeichnet die komplex konjugierte. Damit ist  $a_{ik}$  hermitesch. Im reellen Raum, wie er hier vorliegt ist die Matrix symmetrisch. Man kann nun in einem Funktionalraum die Metrik so wählen, dass ein bestimmter Operator gerade selbstadjungiert wird. Der Operator  $A$  wird so gewählt, dass das Eigenwertproblem die einfache Gestalt

$$A f = \lambda f$$

erhält.

In Smirnov (IV, 1973, p.370) ist gezeigt, dass Differentialoperatoren der Form

$$L(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + c f$$

selbstadjungiert sind. Setzt man  $\alpha_{ik} = \delta_{ik}$  und  $c = 0$ , so erhält man für  $L$  den Laplace-Operator:

$$L(f) = \Delta f$$

Dies gilt auch in anderen Koordinatensystemen. Schreibt man den  $\Delta$ -Operator in Kugelkoordinaten (Kap 2.10)

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta f$$

so ist direkt ersichtlich, dass der Radialanteil

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

genau der obigen Formulierung entspricht.

Ein weiterer interessanter Operator ist durch die Fundamentalgleichung der Physikalischen Geodäsie gegeben. In der bekannten (genäherten) Form wird

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

oder

$$\Delta g = L T$$

mit

$$L = - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}$$

Im Raum der regulären Funktionen mit homogenen Randwerten wird  $L$  bezüglich der  $L^2$ -Norm selbstadjungiert, da gilt:

$$\langle Lf, g \rangle = - \int \left( f g + \frac{2}{r} f g \right) dr$$

$$\langle f, Lg \rangle = - \int \left( f g' + \frac{2}{r} f g \right) dr$$

$$\Rightarrow \langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

Eine wichtige Eigenschaft bilden nun die Inversen von selbstadjungierten Operatoren. Gilt etwa

$$u = Af$$

$$v = Ag$$

und

$$Bu = f$$

$$Bv = g$$

mit

$$AB = E,$$

so folgt

$$\langle Af, g \rangle = \langle ABu, Bv \rangle = \langle u, Bv \rangle$$

und da nach Voraussetzung  $A$  selbstadjungiert ist

$$= \langle f, Ag \rangle = \langle Bu, ABv \rangle = \langle Bu, v \rangle$$

also ist der Inverse Operator  $B$  ebenfalls selbstadjungiert. Falls ein Operator lediglich in einem Unterraum des anderen operiert, so gilt die Beziehung  $AB = E$  nur im Unterraum.

Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators sind reell, dies zeigt folgende Rechnung (Stiefel, 1973):

Aus  $Af = \lambda f$  folgt

$$\langle Af, f \rangle = \lambda \langle f, f \rangle \text{ und } f \neq 0 \text{ also } \langle f, f \rangle > 0$$

also

$$\lambda = \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

und

$$\langle Af, f \rangle = \langle f, Af \rangle^* = \langle f, Af \rangle \in \mathfrak{R}$$

damit wird

$$\lambda = \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in \mathfrak{R}$$

Ist der Operator zudem positiv

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

so sind sämtliche Eigenwerte positiv

$$\lambda \geq 0$$

Für die Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren lässt sich nach ähnlichen Rechnungen (z.B. Messiah, 1975, p.232) zeigen, dass sie ein orthogonales System bilden müssen:

$u$  und  $v$  sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda$  und  $\mu$ , es gilt also:

$$Au = \lambda u$$

$$Av = \mu v$$

und da nach Voraussetzung  $A$  selbstadjungiert ist, folgt

$$0 = \langle v, Au \rangle - \langle Av, u \rangle = (\lambda - \mu) \langle v, u \rangle$$

damit gilt

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \text{für } \lambda \neq \mu$$

### 2.8.2 Integraloperatoren

Eine weitere in der physikalischen Geodäsie häufige Form von Operatoren stellen die Integraloperatoren dar. Speziell seien die Integrale mit Kernfunktionen betrachtet

$$Af(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

Man kann nun einfach zeigen, dass im Falle von selbstadjungierten Operatoren  $A$  der Kern symmetrisch sein muss.

$$\langle Af, g \rangle = \iint K(x, y) f(y) g(x) dx dy$$

$$\langle f, Ag \rangle = \iint f(x) K(x, y) g(y) dx dy = \iint f(y) K(y, x) g(x) dx dy$$

Da  $A$  selbstadjungiert ist:

$$\langle Af, g \rangle - \langle f, Ag \rangle = 0 = \iint [K(x,y) - K(y,x)] f(y) g(x) dx dy$$

Daraus folgt aber, dass der Kern symmetrisch in den Argumenten sein muss:

$$K(x,y) = K(y,x)$$

Existiert das Eigenwertproblem

$$Af = \lambda f$$

für den Integraloperator A, so kann man auch von reproduzierenden Integralkernen sprechen. Z.B. stellen Greensche Funktionen im Falle vom Dirichletproblem reproduzierende Kerne dar. Im diskretisierten Fall stellen zum Beispiel Kovarianzmatrizen bei Interpolationsproblemen reproduzierende Kerne dar. In gewissen regulären Fällen ist es möglich reproduzierende Kerne mit Hilfe des inversen Operators zu erzeugen:

- A Differentialoperator
- B dazu inverser Integraloperator

$$Ag = f(x) = ABf = A \int K(x,y) f(y) dy = \int A_x K(x,y) f(y) dy$$

Es gilt also

$$f = Cf$$

mit

$$C = \int A K(x,y) \cdot dy$$

AK ist dann offensichtlich ein reproduzierender Kern. Gehören x und y zum gleichen Gebiet, so folgt, dass

$$A K(x,y) = \delta(x,y)$$

sein muss, da die Ausblendungseigenschaft

$$f(x) = \int \delta(x,y) f(y) dy$$

gilt.

### 2.8.3 Reproduzierende Kerne

Das Problem besteht nun darin, den Kern  $\delta(x,y)$  tatsächlich zu berechnen oder darzustellen. Das Integral

$$f(x) = \int \delta(x,y) f(y) dy$$

kann als Definition der Distribution  $\delta$  herangezogen werden. Betrachtet man nun Funktionen  $f$  in  $H^0$  mit der entsprechenden Norm (siehe Kap 2.7.1), so kann man versuchen den Kern im unterlegten Raum darzustellen. Den Integraloperator

$$Af = \int K(x,y) f(y) dy$$

kann man als Skalarprodukt  $\langle f(y), K(x,y) \rangle$  auffassen. D.h. es gilt:

$$Af = \langle f, K \rangle$$

Damit erhält man erneut die Schreibweise, wie sie in der Funktionaltheorie verwendet wird. Nach z.B. Tscherning (1986) kann ein reproduzierender Kern linear durch die Basisvektoren des betrachteten Vektorraumes dargestellt werden:

$$K(x,y) = [ e_i(x) \cdot e_i(y) ]$$

Die eckigen Klammern bezeichnen die Summe. Sie erstreckt sich über die Dimension des betrachteten Vektorraumes (Index  $i$ ). Die  $e_i$  stellen die Basisvektoren (-funktionen) dar. Wird dies in  $Af$  eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} Af &= \langle f, [ e_i(x) \cdot e_i(y) ] \rangle = \langle f, [ e_i(x) \cdot e_i(y) ] \rangle \\ &= [ \langle f, e_i(x) \cdot e_i(y) \rangle ] = [ \langle f, e_i(y) \rangle e_i(x) ] = [ c_i e_i(x) ] = f \end{aligned}$$

Mit obiger Vorgehensweise findet man tatsächlich einen reproduzierenden Kern. Im vorangehenden Kapitel 2.8.2 hatten wir eine Möglichkeit der Konstruktion von reproduzierenden Kernen mit Hilfe der inversen Operatoren gezeigt. Da bei der Lösung des Randwertproblems die Harmonischen Funktionen eine Rolle spielen, sei hier der reproduzierende Kern auf der Einheitssphäre angeschrieben. Der betrachtete Vektorraum sei der Unterraum der harmonischen Funktionen mit der Norm

$$\langle f, g \rangle = \int f^* g d\Omega$$

Dazu verwenden wir als Basis die auf der Einheitssphäre normierten Kugelflächenfunktionen (Kap 2.4). Für sie gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\langle Y_n^m, Y_{n'}^{m'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

Die Y-Funktionen können in Kugelkoordinaten sehr einfach von der Einheitssphäre analytisch fortgesetzt werden (siehe auch die Lösung der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten, Kap.2.4). Wir erhalten dann für unsere Basis  $e_i$  oder  $e_{nm}$  die folgenden Funktionen:

$$e_{nm} = \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n^m$$

Des weiteren wird das Additionstheorem verwendet:

$$P_n(\cos(x,y)) = \frac{4\pi}{2n+1} \left[ Y_n^{m*}(x) Y_n^m(y) \right]_{m=-n}^n$$

Der reproduzierende Kern wird also mit:

$$K_0(x,y) = [ e_i(x) \cdot e_i(y) ]_i = [ [ e_{nm}(x) \cdot e_{nm}(y) ]_m ]_n$$

und mit obiger Basis und dem Additionstheorem:

$$\begin{aligned} K_0(x,y) &= \left[ \left[ \left( \frac{R}{r(x)} \right)^{n+1} Y_n^{m*}(x) \left( \frac{R}{r(y)} \right)^{n+1} Y_n^m(y) \right]_m \right]_n \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ (2n+1) \left( \frac{R^2}{r(x)r(y)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n \end{aligned}$$

## 2.9 Fehlerfortpflanzung bei Integralformeln und Reihenentwicklungen

Da das Problem der Fehlerfortpflanzung in Integralformeln immer wieder auftaucht, etwa beim Stokes-Integral, sollen hier die im jeweiligen Fall zu spezialisierenden allgemeinen Formeln hergeleitet werden.

### 2.9.1 Integraldarstellung

Betrachtet man die stochastische Funktion  $\varepsilon(x)$  und eine Funktion  $S(x,y)$  mit  $x,y \in G$  ( $G$  ist meistens in  $\mathfrak{R}^2$ ) und setzt man etwa eine zentrierte Normalverteilung voraus, so kann man für die Erwartungswerte schreiben:

$$E\{ \varepsilon(x) \} = 0$$

$$E\{ \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) \} = C(x,y)$$

Dabei steht der Erwartungswert-Operator für:

$$E\{ \cdot \} = \int \cdot dG / \int dG$$

Betrachten wir das folgende Integral

$$F(y) = \int_G f(x) \cdot S(x,y) dG$$

wo  $f(x)$  mit dem Fehler  $\varepsilon(x)$  behaftet ist, so wird der Erwartungswert für die Funktion  $F(y)$ :

$$\begin{aligned} E\{ F(y) \} &= E\left\{ \int_G (f(x) + \varepsilon(x)) \cdot S(x,y) dG \right\} \\ &= \int_G E\{ (f(x) + \varepsilon(x)) \} \cdot S(x,y) dG \\ &= \int_G (f(x) + E\{ \varepsilon(x) \}) \cdot S(x,y) dG = F(y) \end{aligned}$$

Für die Streuung erhält man

$$\begin{aligned}\sigma_F^2(y) &= E \left\{ \int_G \varepsilon(x) S(x,y) dG \cdot \int_G \varepsilon(x') S(x',y) dG' \right\} \\ &= \int_G E \left\{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \right\} S(x,y) S(x',y) dG dG' \\ &= \int_G C(x,x') S(x,y) S(x',y) dG dG'\end{aligned}$$

Durch ein isotropes, homogenes Verhalten der stochastischen Funktion  $\varepsilon(x)$

$$C(x,x') = \sigma_f^2 \delta(x-x')$$

vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\begin{aligned}\sigma_F^2(y) &= \sigma_f^2 \int_G \delta(x-x') S(x,y) S(x',y) dG dG' \\ &= \sigma_f^2 \int_G [S(x,y)]^2 dG\end{aligned}$$

Setzt man etwa ein isotropes, nicht aber ein homogenes Verhalten voraus, so erhält man das etwas allgemeinere Resultat:

$$C(x,x') = \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x')$$

$$\sigma_F^2(y) = \int [\sigma_f(x) S(x,y)]^2 dG$$

oder für die Kovarianzen erhält man analog:

$$\sigma_F(y,y') = \int \sigma^2(x) S(x,y) S(x,y') dG$$

### 2.9.2 Reihenentwicklungen

Hier interessieren die Fehler, die bei der Bestimmung von Reihenentwicklungen an den Koeffizienten  $c_i$  auf Grund des Fehlers in der Funktion  $f$  selbst entstehen. Werden die Koeffizienten durch eine Ausgleichung bestimmt, so erhält man die Fehler direkt durch  $N^{-1}$  (siehe Kap.2.8.2 zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten). Um die Fehler bei der Bestimmung der Koeffizienten durch Projektion zu behandeln, verwenden wir die Notation aus Kapitel 2.8. Danach kann man schreiben:

$$c_i = \langle f, e_i \rangle$$

Für den Fehler schreiben wir :

$$\sigma_i^2 = E \{ \langle \varepsilon(x), e_i(x) \rangle \langle \varepsilon(x'), e_i(x') \rangle \}$$

und unter Beachtung der Linearität des Skalarproduktes und des Erwartungswert-Operators kann man setzen:

$$= \langle \langle E \{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \} e_i(x), e_i(x') \rangle \rangle$$

Für den Erwartungswert schreiben wir :

$$E \{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \} = C(x, x') = \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x')$$

eingesetzt in obige Formel

$$\sigma_i^2 = \langle \langle \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x') e_i(x), e_i(x') \rangle \rangle$$

und Integration nach  $x'$  ergibt:

$$\sigma_i^2 = \langle \sigma_f(x) \sigma_f(x) e_i(x), e_i(x) \rangle$$

Bei isotropem Verhalten von  $f$  erhält man

$$\sigma_i^2 = \sigma_f^2 \langle e_i(x), e_i(x) \rangle = \sigma_f^2 \| e_i(x) \|^2$$

Wird zusätzlich eine normierte Basis gewählt, so ergibt sich die einfache Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_i^2 = \sigma_f^2$$

### 2.9.3 Fehler von Reihenentwicklungen

Eine umgekehrte Fragestellung ergibt sich, falls der Fehler einer Reihenentwicklung gesucht wird, der sich durch fehlerhafte Koeffizienten einschleicht. Wiederum mit Kapitel 2.8 können wir für eine Approximation schreiben:

$$f = [c_i e_i]^N$$

In Matrixschreibweise lautet dann die Formel:

$$f = \mathbf{c}^T \mathbf{e}$$

Setzt man für die Koeffizienten eine Kovarianz  $\mathbf{C}$  an, die z.B. aus der Ausgleichung folgt, so ergibt sich auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und bei Berücksichtigung einer Isotropie

$$\mathbf{C} = \sigma_c^2 \mathbf{E}$$

der Fehler an  $f$  als:

$$\sigma_f^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{C} \mathbf{c} = \sigma_c^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c} = \sigma_c^2 [c_i^2]^N$$

### 2.9.4 Allgemeiner Covarianz- und Gewichtsansatz bei Integralgleichungen

Da viele Gleichungen in der Physikalischen Geodäsie als Integralgleichungen aufgefasst werden können, sei hier ein allgemeiner Ansatz zur Beschreibung von Kovarianzen und Gewichten von derartigen Gleichungen hergeleitet. Im speziellen interessieren harmonisch entwickelbare Kerne.

Wir gehen wiederum vom Integral

$$F(y) = \int_G f(x) \cdot S(x,y) dG$$

aus. Dabei fragen wir nach der Kovarianz von  $F$ . Benutzen wir die funktionale Schreibweise, so erhalten wir bei unabhängigen  $\sigma$  (siehe Kap.2.9.1):

$$C(y,y') = \langle \sigma(x) S(y,x), \sigma(x) S(x,y') \rangle = \sigma^2 \langle S(y,x), S(x,y') \rangle$$

Die Gewichtsfunktion  $P$  ist dann bekanntlich durch die Inversion von  $C$  gegeben, was im Kontinuierlichen auf die Inversion der Integralgleichung führt, die wir in folgender Art schreiben wollen:

$$\delta(y-y') = \langle P(y,x), C(x,y') \rangle$$

Um nun diese Gleichung explizit nach  $P$  aufzulösen, spezialisieren wir den Kern  $S$  auf harmonisch entwickelbare Funktionen. Also kann man nach Kap. 2.8 schreiben:

$$S(x,y) = [ s_i e_i(x) e_i(y) ]$$

Damit wird unter Beachtung der Orthogonalität der Basis  $e$  die Kovarianz  $C$ :

$$C(y,y') = \sigma^2 \langle [ s_i e_i(y) e_i(x) ], [ s_j e_j(x) e_j(y') ] \rangle$$

$$C(y,y') = \sigma^2 [ \langle s_i e_i(y) e_i(x), s_j e_j(x) e_j(y') \rangle ] = \sigma^2 [ s_i^2 e_i(y) e_i(y') ]$$

Wir machen nun für das Gewicht  $P$  einen harmonischen Ansatz.

$$P(x,y) = [ p_i e_i(x) e_i(y) ]$$

Ebenso für  $\delta$ , die als reproduzierender Kern ebenfalls in eine derartige Reihe (jedoch nicht konvergent) entwickelt werden kann. Die Koeffizienten sind dabei 1 zu setzen (Kap.2.9.3):

$$\delta(x,y) = \delta(x-y) = [ e_i(x) e_i(y) ]$$

Wir setzen in die zu invertierende Gleichung ein und können dann durch Koeffizientenvergleich die unbekanntenen Koeffizienten  $p_i$  bestimmen.

$$\begin{aligned} \delta(y-y') &= \langle P(y,x), C(x,y') \rangle \\ [ e_i(y) e_i(y') ] &= \langle [ p_i e_i(y) e_i(x) ], \sigma^2 [ s_k^2 e_k(x) e_k(y') ] \rangle = [ p_i \sigma^2 s_i^2 e_i(y) e_i(y') ] \end{aligned}$$

Der Vergleich ergibt sofort :

$$p_i = \frac{1}{\sigma^2 s_i^2}$$

Damit hat man aber neben einer Kovarianzfunktion direkt eine Gewichtsfunktion gefunden. Die Anwendung dieser Herleitungen erfolgt bei der Kovarianzbetrachtung im Zusammenhang

mit der funktionalen Beschreibung des Schwerefeldes.

### 3.2 Integrallösung

Die Lösung dieses Problems lässt sich mit Hilfe der Green'schen Funktion  $K(P,Q)$  schreiben als:

$$V(P) = \int_{\Sigma} K(P,Q) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q$$

Dabei erfüllt die Green'sche Funktion die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta K(P,Q) &= \delta(P,Q) && P \text{ in } \Sigma \\ K(P,Q) &= 0 && P \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

Um das anfängliche Problem zu lösen, muss vorgängig die Greensche Funktion aufgrund dieser beiden Gleichungen gefunden werden. Dass das obige Integral mit den zusätzlichen Bedingungen das Poisson-Problem zu lösen vermag, zeigt man auf heuristische Weise durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta_P V(P) &= \Delta_P \int_{\Sigma} K(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q = \int_{\Sigma} \Delta_P K(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q \\ &= \int_{\Sigma} \delta(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q = f(P) \end{aligned}$$

Zur Verifizierung der Randwertgleichung wenden wir einen Satz von Green auf die zwei Funktionen  $K$  und  $V$  an:

$$\int_{\Sigma} (\Delta_P V \cdot K - V \cdot \Delta_P K) \, d\Sigma_P = \int_{\partial\Gamma} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \cdot K - V \cdot \frac{\partial K}{\partial n} \right) \, d\partial\Gamma_P$$

Führt man die Differentiationen durch und beachtet, dass  $K(P,Q)$  für  $P$  auf dem Rand gleich null wird, so erhält man:

$$\int_{\Sigma} (f(P) \cdot K(P,Q) - \delta(P,Q) \cdot V(P)) \, d\Sigma_P = \int_{\partial\Gamma} -\frac{\partial K}{\partial n} \cdot V \, d\partial\Gamma_P$$

Die Berechnung der Integrale gibt:

$$V(Q) - V(Q) = 0 = \int_{\partial\Gamma} -\frac{\partial K}{\partial n} \cdot V \, d\partial\Gamma_P$$

Da keine Voraussetzungen über die Ableitungen von  $K$  gemacht wurden, muss  $V$  auf dem Rande verschwinden, um das Integral zu null zu machen, also:

$$V = 0 \quad P \text{ auf } \partial\Gamma$$

Aufgrund der Quellendarstellung kommt man nun sehr einfach zu bekannten Formeln der Potentialtheorie, die eine Integral-Lösung des Dirichlet-Problems liefern. Dazu verwenden wir nochmals den Green'schen Satz für zwei Funktionen  $V$  und  $k$ . Die Funktionen sollen die partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta V(P) = \rho(P)$$

und

$$\Delta k(P) = \delta(P, Q)$$

erfüllen. In die Green'sche Formel eingesetzt, wird das Raumintegral

$$\int_{\Sigma} (\Delta V \cdot k - V \cdot \Delta k) d\Sigma = \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma - \int_{\Sigma} V(P) \cdot \delta(P, Q) d\Sigma = \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma - V(Q) \cdot$$

Dies muss nach dem Greenschen Satz mit dem Integral über den Rand übereinstimmen.

$$= \int_{\partial\Sigma} V_n k - V k_n d\partial\Gamma$$

Damit erhält man direkt den Wert der gesuchten Funktion  $V$  im Inneren des Gebietes. Allerdings muss man die Funktion  $k$  kennen (z.B. Greensche Funktion).

$$V(Q) = \int_{\partial\Gamma} \left( \frac{\partial k}{\partial n} \cdot V - k \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma$$

Des weiteren müssen die Randwerte von  $V$  und deren Ableitungen gegeben sein. Dazu ist zu bemerken, dass diese Lösung überbestimmt ist, da  $V(Q)$  sowohl durch Randwerte von  $V$  als auch durch solche von  $\partial V/\partial n$  bestimmt ist. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung wäre z.B.  $k = - (4\pi |r|)^{-1}$ . Führt man etwa die Green'sche Funktion  $K$  (sie muss ja im Fall von Dirichlet-Randbedingungen am Rand verschwinden) ein, so lässt sich die Formel weiter vereinfachen zu:

$$V(Q) = \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial n} V d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho K d\Sigma$$

Für Neumannsche Randbedingungen erhält man eine analoge Formel. Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Randbedingungen für die Normalableitung der Greenschen Funktion nicht homogen sein dürfen, da sonst der Fluss des Gradientenfeldes (im Schwerfeld entspricht dies dem Schwerevektor in Richtung der Flächennormalen) durch die Oberfläche ebenfalls verschwinden würde. Nach dem Gauss'schen Satz erhält man (sh. auch Kap. 4.3.1)

$$\int \nabla \nabla K \, d\Sigma = \int \Delta K \, d\Sigma = \int \delta \, d\Sigma = 1 = \int \nabla K \, d\partial\Gamma = \int \frac{\partial K}{\partial n} \, d\partial\Gamma$$

Der einfachste Ansatz, der dieses Integral erfüllt, entspricht der Randbedingung:

$$\frac{\partial K(P,Q)}{\partial n} = \frac{1}{|\partial\Gamma|} \quad P \text{ auf } \partial\Gamma$$

Dabei ist  $|\partial\Gamma|$  die Fläche der Berandung. Mit dieser Randbedingung kann das Potential in folgender Weise ausgedrückt werden.

$$V(Q) = \frac{1}{|\partial\Gamma|} \int V \, d\partial\Gamma - \int_{\partial\Gamma} K \frac{\partial V}{\partial n} \, d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho K \, d\Sigma$$

Der erste Term entspricht dem Mittelwert von  $V$  über den Rand  $\partial\Gamma$ .

### 3.2.1 Zur Bestimmung der Green'schen Funktion

Es ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta K(P,Q) &= \delta(P,Q) & P \text{ in } \Sigma \\ K(P,Q) &= 0 & P \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

zu lösen.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, dass die Lösung inhomogener Differentialgleichungen durch die Überlagerung einer speziellen (partikulären) Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung bewerkstelligt werden kann. Die spezielle Lösung sei  $k$  und die allgemeine  $\kappa$ . Im 3-dim. wird (sh. z.B. Courant-Hilbert)

$$k = -(4\pi)^{-1}$$

und

$$K(P,Q) = - (4\pi l)^{-1} + \kappa(P,Q)$$

mit

$$\Delta \kappa = 0$$

und

$$\kappa(P,Q) = -k(P,Q) \quad , \quad P \text{ auf } \partial\Gamma.$$

Damit hat man aber die Lösung  $K$  gefunden, da  $\kappa$  als Lösung eines Dirichletproblems zu finden ist. Für Gebiete von einfacher Form können die Green'schen Funktionen explizit angegeben werden. Hier interessiert etwa der eben begrenzte Halbraum und die Kugel. Für die Kugel setzt man für die Green'sche Funktion

$$K(P,Q) = - (4\pi l)^{-1} + \kappa(P,Q') = (4\pi)^{-1} (-l^{-1} + \alpha l'^{-1})$$

Man wählt nun  $Q'$  so, dass  $K = 0$  auf dem Rand der Kugel erfüllt ist. Durch eine einfache geometrische Überlegung (Satz von Apollonius) wird  $\alpha$  als  $R/a$  bestimmt.

$$\alpha = R/a$$

$$K(P,Q) = - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{l(P,Q)} - \frac{R}{a} \frac{1}{l(P,Q')} \right)$$

Um das Integral anwenden zu können, muss die Funktion  $K$  nach der Normalen  $n$  abgeleitet werden. Auf einer Kugeloberfläche entspricht die Normalenableitung gerade der Ableitung nach  $r$ .

$$\partial/\partial n \rightarrow \partial/\partial r$$

Ist die Ableitung durchgeführt, so setzt man  $r = R$  und  $l' = l \cdot R/a$ . Der Integralkern wird damit

$$\frac{\partial K(P,Q)}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - a^2}{R} \frac{1}{l(P,Q)} \quad , \quad P \text{ auf } \partial\text{Kugel}.$$

Setzt man diese Formel in das Integral ein, so folgt die Poisson'sche Integralformel für die Kugel:

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - a^2}{R} \int_{\partial\text{Kugel}} \frac{1}{l^3(P,Q)} V(P) d\partial K$$

Sind also die Randwerte einer harmonischen Funktion auf der Kugel bekannt, so lässt sie sich relativ einfach im ganzen Raum bestimmen. Für den Aussenraum der Kugel erhält man:

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - R^2}{R} \int_{\partial Kugel} \frac{1}{r^3(P,Q)} V(P) d\partial K$$

### 3.2.2 Greensche Funktion als Integraloperator

Nach dem vorangegangenen Kapitel findet man eine Lösung der inhomogenen Potentialgleichung durch das Integral der Greenschen Funktion

$$V(P) = \int_{\Sigma} K(P,Q) \cdot f(Q) d\Sigma_Q$$

Beschreibt  $x$  den Punkt  $P$  und  $y$  entsprechend den Punkt  $Q$  und schreiben wir das Integral als Operator

$$A = \int K(x,y) \cdot dy$$

so ist die Analogie zur Schreibweise in Kapitel 2.8 gegeben. Wir setzen also

$$V(x) = A f(y)$$

Da dieses die Lösung des Problems  $\Delta V = f$  oder in Operatorenschreibweise  $L V = f$  darstellt, können wir setzen:

$$AL = E$$

Weiter ist bekannt (Kap. 2.8.1), dass der  $\Delta$ -Operator selbstadjungiert ist. Damit ist auch der Greensche Operator selbstadjungiert und somit muss der Kern oder in diesem Falle die Greensche Funktion symmetrisch sein

$$K(x,y) = K(y,x)$$

Das geodätische Randwertproblem auf der Sphäre besteht darin,

$$\Delta T = 0$$

mit den Randwerten

$$\Delta T = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T = \Delta g = f$$

zu lösen. Die Greensche Lösung lässt sich mit dem obigen Operator A ansetzen als

$$T = Af = \langle K, f \rangle$$

Der Operator A könnte auch als 'Stokes-Operator' interpretiert werden. Damit ist das Problem gelöst, formell mindestens. Die Greensche Funktion K ist noch unbekannt. Mit dem in 2.8.2 beschriebenen Verfahren können wir jedoch einen reproduzierenden Operator konstruieren. Und mit den Entwicklungen für reproduzierende Kerne im harmonischen Funktionenraum (Kap. 2.8.3) kann die Greensche Funktion explizite durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Sünkel (1984) entwickelte diesen Koeffizientenvergleich, der hier verwendet wird. Nach 2.8.2 können wir also schreiben:

$$\Delta T = \Delta Af = f(x) = \int LK(x,y) f(y) dy = L\langle K, f \rangle = \langle LK, f \rangle$$

Dabei ist das Skalarprodukt auf der Einheitssphäre definiert. Die Reproduktionseigenschaft bezieht sich also auf den Unterraum der harmonischen Funktionen auf der Sphäre. Dabei ist zu bemerken, dass LK dem Poissonkern entsprechen muss.

Für reproduzierende Kerne in harmonischer Basis gilt (Kap. 2.8.3):

$$K_0(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[ (2n+1) \left( \frac{R^2}{r(x)r(y)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Restringiert auf die Sphäre erhält man:

$$K_0(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[ (2n+1) P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Nach Sünkel (1984) wird auch die Greensche Funktion  $K(x,y)$  in harmonische Funktionen entwickelt. Dabei ist zu beachten, dass  $y$  auf den Rand der Sphäre ( $|y| = R$ ) beschränkt bleibt.

$$K(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[ k_n \left( \frac{R}{r(x)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Wird nun L auf K ausgeübt, so erhält man (L operiert nur auf r(x)):

$$LK = \frac{1}{4\pi r} \left[ k_n (n-1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Es muss also auf der Sphäre  $r = R$  gelten:

$$LK = K_0$$

Und durch Koeffizientenvergleich von LK und  $K_0$ :

$$k_n = R \frac{2n+1}{n-1}$$

Damit werden die gesuchten Kerne:

'Stokes-Kern'

$$K = \frac{R}{4\pi} \left[ \frac{2n+1}{n-1} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Poisson-Kern

$$LK = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r} \left[ (2n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Die Summen (eckige Klammern) sind Reihenentwicklungen geschlossener Ausdrücke. Sie finden sich in Heiskanen & Moritz (1967). Danach entspricht der erste Ausdruck genau der erweiterten Stokesfunktion (sie enthält noch den 0-ter Ordnung Term):

$$S(x,y) = \left[ \frac{2n+1}{n-1} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Die zweite Summe wird (Heiskanen & Moritz, 1967, p.35):

$$l = |x - y| \quad \text{und} \quad r = |x|$$

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \left[ (2n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Wir setzen die Abkürzung P für den Poisson-Kern

$$P(x,y) = \frac{R}{r} \frac{(r^2 - R^2)}{l^3}$$

Damit sehen die Lösungen des obigen Randwertproblems recht einfach aus:

Stokes'sche Lösung für das Potential im Aussenraum:

$$T = \frac{R}{4\pi} \langle S, \Delta g \rangle$$

Poisson-Integral für Schwereanomalien (Feldfortsetzung in Kugelkoordinaten in den Aussenraum):

$$\Delta g = \frac{R}{4\pi} \langle P, \Delta g \rangle$$

### 3.3 Variationsproblem

Das Variationsproblem in Bezug auf das Schwerfeld kann analog zum elektrostatischen Fall formuliert werden. Man sucht eine Feldfunktion mit vorgegebenen Randwerten, die ein Funktional minimiert. Als Funktional wird ein Energiemass eingesetzt (Brauer, 1988). Dazu muss dieses Mass jedoch bestimmt werden. Es wird gezeigt, dass bei geeigneter Wahl des Funktionals die Variationsgleichung genau der Poissongleichung entspricht. D.h., wenn eine Lösung des Extremalproblems vorliegt, dann hat man auch eine Lösung des Potentialproblems mit Randwerten gefunden.

#### 3.3.1 Energie des Schwerfeldes

Der Begriff der Energie kann in formal analoger Weise wie in der Elektrostatik behandelt werden. Allerdings sind dabei einige grundlegende, theoretische Argumente, die eine derartige Vorgehensweise verbieten, nicht beachtet. In Thorne, Wheeler, Misner wird erläutert, warum die Gravitationsenergie nicht lokalisierbar ist.

Die Energie des Feldes kann durch die Arbeit charakterisiert werden, die notwendig ist, um eine Punktmasse  $\delta\rho$  vom Unendlichen an den Ort  $x$  zu bringen.

Um also eine ganze Dichteverteilung  $\delta\rho(x)$  aus dem Unendlichen im Potential  $U$  heranzuführen, muss Arbeit im Potential  $U$  geleistet werden:

$$dE = \int_V \delta\rho U dv$$

(Dieses Integral entspricht auch der in der Geodäsie üblichen Definition des Schwerepotentials).

Die Änderung ( $\delta\rho(x)$ ) der Dichteverteilung  $\rho$  bewirkt nach der Poisson-Gleichung eine Änderung  $\delta U$  im Potential  $U$ :

$$\Delta\delta U = -4\pi G\delta\rho$$

also

$$dE = \frac{-1}{4\pi G} \int_V \Delta\delta U U dv$$

Mit der Beziehung  $\nabla(U \nabla\delta U) = \nabla U \nabla\delta U + U \Delta\delta U$

erhält man

$$dE = \frac{-1}{4\pi G} \int_V (\nabla (U \nabla \delta U) - \nabla U \nabla \delta U) dv$$

Der erste Term verschwindet, da sowohl  $U$  als auch  $\nabla \delta U$  von  $O(1/r)$  sind bzw. am Rand  $\partial v$  des Gebietes gegen Null streben.  $v$  wird dabei ins Unendliche ausgeweitet (ebenso  $\partial v$ ). Dies ist anhand des Gausschen Satzes einsichtbar:

$$\int_V \nabla (U \nabla \delta U) dv = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial v(r)} (U \nabla \delta U) n d\partial v \rightarrow 0 \quad (1)$$

Damit bleibt

$$dE = \frac{1}{4\pi G} \int_V \nabla U \nabla \delta U dv = \frac{1}{4\pi G} \int_V \mathbf{g} \delta \mathbf{g} dv$$

Für den Aufbau des gesamten  $\mathbf{g}$ -Feldes muss also die Energie

$$E = \frac{1}{4\pi G} \int_V dv \int_0^{\mathbf{g}} \mathbf{g} \delta \mathbf{g} = \frac{1}{8\pi G} \int_V \mathbf{g}^2 dv$$

aufgewendet werden. Dies ist also die Energie, die in einem Feld  $\mathbf{g}$  steckt.

Andererseits kann man das Energieintegral mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{g} = -\nabla U$$

und

$$\nabla (U \nabla U) = \nabla U \nabla U + U \Delta U$$

umschreiben in

$$E = \frac{1}{8\pi G} \int_V \mathbf{g} \mathbf{g} dv = \frac{1}{8\pi G} \int_V (\nabla (U \nabla U) - U \Delta U) dv$$

Der erste Term geht mit  $O(1/r^3)$ ,  $r \rightarrow \infty$  gegen 0 (siehe (1)). Somit bleibt

$$E = \frac{-1}{8\pi G} \int U \Delta U dv$$

und mit der Poissongleichung:

$$E = \frac{1}{2} \int U \rho \, dv$$

Dies entspricht der durch die Dichteverteilung  $\rho$  produzierten 'Energie'.

### 3.3.2 Variationsgleichung und Poissongleichung

Als das zu minimierende Funktional könnte man entsprechend dem vorangegangenen Abschnitt schreiben:

$$I = \frac{1}{8\pi G} \int g^2 \, dv - \int U \rho \, dv = \text{Extremum}$$

Setzt man

$$g = -\nabla U = - \frac{\partial U}{\partial x_i} = -q_i = -q$$

und betrachtet  $U$  als gesuchte, das Funktional  $I$  zum Extremum machende Funktion, so kann man schreiben

$$I(U(x)) = \int_V F(x, q, U) \, dv = \text{Extremum}$$

Die Lösung dieses Problems führt einen über die Ostrogradskijsche (Euler-Lagrangsche) Gleichung zur Poisson-Gleichung. Es muss für eine Funktion  $U$  gelten (siehe z.B. Elsgolc, 1970)

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) = 0$$

In unserem Fall ist  $n = 3$  und

$$F = \frac{1}{8\pi G} \sum_1^3 q_i^2 - U \rho$$

Damit wird die Euler-Lagrange Gleichung zu

$$-\rho - \frac{1}{8\pi G} \sum_1^3 \frac{\partial (2q_1)}{\partial x_1} = 0$$

$$4\pi G\rho + \sum_1^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 0$$

Was der Poissongleichung entspricht:

$$\Delta U = -4\pi G\rho$$

Damit ist die Aequivalenz zwischen dem eingangs geschilderten Variationsproblem und dem Poisson-Problem gezeigt.

### 3.4 Numerische Methoden

Die analytischen Methoden zeigen trotz ihrer Exaktheit deutliche Schwächen bei der Behandlung realer Gegebenheiten. Zum einen bleiben geschlossene analytische Lösungen nur in wenigen, meist einfachen Fällen auffindbar, wie etwa die Lösung des Randwertproblems im Kugelgebiet.

Zum anderen verlangen aber diese Methoden, dass sämtliche Randwerte etc. ebenfalls auf das betrachtete Gebiet bezogen werden. (Oftmals die Kugel, das Ellipsoid, das Geoid, etc.). Dies bedeutet, dass Messwerte Reduktionen und oft auch Feldfortpflanzungen unterworfen werden müssen. Dies ist jedoch kaum ohne gewisse einschränkende Annahmen möglich (etwa Annahmen über die Dichteverteilung, statistisches Verhalten, Gradienten etc.).

Statistische Methoden brauchen zur Erlangung einer 'guten' Statistik regelmässig verteilte Eingangsdaten, und zudem muss eine erhebliche Anzahl Daten vorhanden sein.

Die numerischen Methoden gehen vom komplett formulierten Problem aus. Die Diskretisierung, wie sie bei jeder Computeranwendung noch unumgänglich ist, 'importiert' dabei erste Fehler in die Berechnung. Die Berechnung der Lösung bringt hinsichtlich des Konvergenzverhaltens und der Rechengenauigkeit zusätzliche Fehler mit sich, die jedoch kontrolliert werden können.

#### 3.4.1 Finite Differenzen und Finite Elemente

Zur Lösung des Variationsproblems oder des Randwertproblems können bekannte numerische Techniken eingesetzt werden. Darunter fallen die Methoden der finiten Differenzen und der finiten Elemente. Eine Reihe numerischer Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen werden z.B. in Walter (1971) theoretisch angeschnitten. In der Geodäsie wurden finite Elemente zur Beschreibung von Approximationsproblemen auf Oberflächen verwendet (z.B. Werner, 1979). Die Beschreibung durch stückweise definierte Polynome ist vergleichbar mit dem von Sünkel (1977) vorgeschlagenen Ansatz mit Spline-Funktionen. Meissl (1981) zeigt die Methode der Finiten Elemente in der Anwendung auf das geodätische Randwertproblem. Eine globale Representation mit der FEM des Schwerefeldes zeigt Baker (1988). Im Rahmen von Seminararbeiten Bohren (1988) und Arnet (1989) wurden die zwei Verfahren der finiten Differenzen und der finiten Elemente in einer ersten Annäherung auf die Lösung der Laplacegleichung angewendet. Dabei ging es darum, kleinräumige Gebiete mit starken Reliefunterschieden zu modellieren. Als Modellfall wurde ein V-Tal betrachtet. Zum Test der finiten Differenzen wurde eine 2D-Struktur unterlegt, da die

Ausweitung dieser Methode auf drei Dimensionen mit nicht unerheblichem Aufwand durchzuführen gewesen wäre.

### 3.4.2 Spektralanalyse

Dieses Verfahren ist an sich analytisch zu behandeln. So existiert eine Grosszahl Literatur über die Spektralanalyse in rein analytischem Sinne. Dabei wird meistens sorgfältig in ebene und sphärische Entwicklungen getrennt. In der Geodäsie ist die Entwicklung in sphärischer Applikation sehr stark entwickelt worden. Nach und nach hat sich dort der Begriff der Spektralanalyse, wie er eigentlich bei ebenen Anwendungen (Fourieranalyse) gängig war eingebürgert. Interessanterweise ist die ebene Fourierentwicklung erst relativ spät bei geodätischen Applikationen aufgetaucht (siehe dazu auch die Bemerkungen Kap.4.4). Eine ausgezeichnete Eigenschaft, die die ebene Entwicklung gegenüber der sphärischen aufzuweisen hat, ist vor allem in der Effizienz der numerischen Methoden zu suchen. Während es in der sphärischen Spektralanalyse bis anhin nicht gelungen ist, einen wirklich schnellen Algorithmus zur Koeffizientenbestimmung (Transformation in sphärischen Spektralbereich) zu entwickeln (Colombo,1981), wurde schon relativ früh ein entsprechendes Verfahren bei der ebenen Fouriertransformation entwickelt, das heute unter der Bezeichnung FFT (Fast Fourier Transform) (Cooley,Tukey, 1965) sehr breitgestreut Anwendung findet. Zur Lösung der Randwertaufgabe kann man nach folgendem Schema vorgehen: Die Randwerte werden in Basis-Funktionen entwickelt (im ebenen Fall muss man also fouriertransformieren). Setzt man für die gesuchte Funktion ebenfalls eine Entwicklung in der gleichen Basis an und lässt den Differential-Operator darauf wirken (hier der Laplace-Operator), so findet man durch einen Koeffizientenvergleich auf dem Rand sofort die Entwicklungskoeffizienten der gesuchten Funktion. Dieses Vorgehen wurde in dieser Arbeit verschiedentlich angewendet. So etwa zur Beschreibung der Green'schen Funktion als Operator (Kap.3.2.2). Eine explizite Lösung des Randwertproblems im ebenen Fall (oder als Fourierreue Lösung) ist im Kap. 2.3.2 gegeben. Die Lösung des Problems ist auch bekannt unter dem Begriff analytische Fortsetzung des Potentialfeldes ( die Kugelfunktionsentwicklung ist natürlich auch eine analytische Fortsetzung) (z.B. Granser, 1982). Allerdings muss bei der Anwendung der Fouriertransformation ein ebenes Randgebiet vorausgesetzt werden. Bei realen Randgebieten komplizieren sich die Verhältnisse, so hat Sideris (1987) zum Molodensky-Problem Lösungen ausgearbeitet. Einen sehr interessanten Anwendungsbereich der Fouriertransformation bilden die 'direkten' Potentialberechnungen (Faltungsintegrale, siehe Kap.4.4) und die Geophysikalischen Inversionsprobleme. Zur effizienten Anwendung der Fouriertransformation ist allerdings ein regelmässiges Datensampling notwendig. Dies führt dann auf die Probleme der Interpolation von, in unserem Fall geodätischen Daten. Zur Interpolation sind wiederum verschiedene Verfahren verfügbar, die im nächsten Abschnitt kurz erwähnt werden sollen.

### 3.4.3 Approximationen und Interpolation

Die Approximation oder Interpolation kann durchaus analytisch betrachtet werden. Es stellen sich dann allerdings gewisse Probleme, sobald tatsächlich eine Approximation bestimmt werden muss. Betrachtet man Potentialfelder, so ist streng genommen die Bedingung der Harmonizität der approximierenden oder interpolierenden Funktion zwingend zu erfüllen. Die Verwendung von Massenmodellen, die an die Messungen angepasst werden, liefern streng harmonische Approximationen. Dieses Problem nähert sich allerdings dem gravimetrischen Inversionsproblem, das nicht in allen Fällen einfach, wenn überhaupt, lösbar ist. Näherungen können durch eine entsprechende Verteilung von Punktmassen erreicht werden (Sünkel, 1981, Lelgemann, 1984). Dies führt jedoch nicht immer auf die besten oder dann aber nicht auf die effizientesten Lösungen. So können nicht-harmonische Funktionen, die eine einfache Berechnung zulassen, zur Interpolation angesetzt werden. Dazu sind stückweise-stetige oder stückweise-differenzierbare Funktionen zu zählen. Sünkel (1977) operiert dabei mit Spline-Funktionen zur Darstellung der geodätischen Integralgleichungen. Andere Ansätze verwenden Sampling-Funktionen (Baranov, 1975) oder verwenden Zusatzbedingungen wie 'minimale Krümmung'. Letztere Bedingung allerdings beinhaltet die Biharmonizität in 2d (Geiger, 1975). Einige Verfahren verwenden statistische Informationen über die Daten um gewisse Gewichtungen der Stützpunkte vorzunehmen (Kriging, Collocation). Bei der Kollokation (Moritz, 1980) ist interessant, dass dort auch die Eigenschaft des Signals in Form der Signalkovarianz einfließt. Beispiele solcher Kovarianzfunktionen sind in Kap. 4.1 gegeben. Als numerische Beispiele dienen Abb.6.20, Kap.6.1.5 und Abb.6.44-6.49, Kap. 6.3.3. Führt man die korrekten, sich aus einer bekannten harmonischen Kovarianz durch die entsprechenden Fehlerfortpflanzungsgesetze (Kap. 2.9, 4.1) ergebenden Signal-Kovarianzen ein, so wird auch die Interpolation harmonisch. In dieser Arbeit wurde ein von Wirth (1990a) entwickeltes und programmiertes, auf der Kollokation basierendes Verfahren zur Interpolation der Bouguer-Anomalien verwendet. Die Kollokation bringt gewisse Unannehmlichkeiten in Bezug auf grossen Speicherplatzbedarf mit sich. Es sind daher viele Anstrengungen unternommen worden, die Matrizenoperationen zu beschleunigen und im Speicherplatzbedarf zu reduzieren (Inversionsalgorithmen, schwach besetzte Matrizen, etc.). Eine andere Möglichkeit, das Problem zu umgehen, besteht darin, keine vollen Kovarianzen zu etablieren und nur mit einem gewissen 'Einflussradius' oder 'Einzugsgebiet' pro interpolierten Punkt zu operieren. Oft wird dann auch auf strenge Kovarianzen verzichtet und lediglich eine (z.T. heuristische) Gewichtung (meist in Abhängigkeit des Abstandes) vorgenommen. Die meisten Gitterdaten in dieser Arbeit wurden mit der zuletzt beschriebenen Methode ( $1/r^2$ -Gewichtung) oder mit minimaler Krümmung interpoliert. Die soeben aufgezeigten Möglichkeiten der Approximation und Interpolation sind nicht eigentlich als direkte Lösungen des Randwertproblems zu verstehen. Sie sind vielmehr Werkzeug um rechnergestützte Methoden effizient einsetzen zu können.

## 4 Beschreibung des Schwerefeldes

### 4.1 Funktionaldarstellung des Schwerefeldes

In diesem Kapitel sollen die bis dahin besprochenen mathematischen Formalismen auf das Gravitationspotential angewendet werden. Das Kapitel kann kurz gefasst werden, da im wesentlichen nur die Bezeichnungen in den vorangegangenen Kapiteln auf das Schwerefeld spezialisiert werden müssen. Der Begriff der funktionalen Darstellung (z.B. Tscherning, 1986) ist sehr eng gekoppelt mit den Begriffen Integrierte oder Operationelle Geodäsie (Eeg, Krarup, 1973, Hein, 1982a, 1982b, Landau et al., 1988), die wiederum als wichtiges Instrumentarium die Kollokation (Moritz, 1980a) beinhalten.

Wir schreiben die gängigen Operatoren (lineare Differentialoperatoren) der physikalischen Geodäsie als:

$$N = AT$$

$$\Delta g = BT$$

$$\delta g = CT$$

$$\xi = DT$$

$$\eta = ET$$

Dabei werden nur die Größen  $N$ ,  $\Delta g$ ,  $\delta g$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $T$  betrachtet. Natürlich existieren weitere Funktionale des Schwerefeldes, wie Größen mit zweiten Ableitungen (Torsionswaagen-Beobachtung, Gradiometrie (z.B. Rummel, 1984) oder 'Laplace'-operierte Größen).

Inverse Operatoren zu den oben genannten sind bekannt. So etwa der 'Stokes-Operator'

$$B^{-1}\Delta g = S \Delta g = T$$

Der inverse C-Operator entspricht der Molodensky-Lösung des Randwertproblems.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich nun weitere Beziehungen herstellen.

$$\xi = DT = D S \Delta g$$

$$\eta = ET = E S \Delta g$$

Dies sind die bekannten Vening-Meinesz-Formeln. In sphärischer Approximation und im entsprechenden funktionalen Raum sehen die Operatoren bekanntlich folgendermassen aus (z.B. Moritz, 1980):

$$A = \frac{1}{\gamma_0}$$

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \\
 C &= -\frac{\partial}{\partial r} \\
 D &= \frac{1}{\gamma_Q r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 E &= -\frac{1}{\gamma_Q r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}
 \end{aligned}$$

Den uns interessierenden, zu B inversen 'Stokes'-Operator haben wir im Kapitel 3.2.2 hergeleitet:

$$S = \frac{R}{4\pi} \langle S, . \rangle$$

Das S in der Klammer bezeichnet die Stokes-Funktion.

Eines der Schlüsselprobleme bei der Kollokation besteht in der Bestimmung der Signal-kovarianzen. In der obigen Schreibweise kann dies recht übersichtlich dargestellt werden. Dazu ist lediglich die Definition der Kovarianz zweier Funktionale herbeizuziehen. Aus ihr ergibt sich sofort die Kovarianzfortpflanzung durch lineare Operatoren. Sind Funktionale durch Operatoren A und B verknüpft, etwa  $f = AF$  und  $g = BG$ , so ergibt sich

$$C(f,g) = E\{fg\} = E\{AFBG\} = AB E\{FG\} = ABC(F,G).$$

Kennt man nun irgendeine Kovarianzfunktion zweier Funktionale F und G, so ist es also möglich, nach obiger Gleichung die Kovarianz einer beliebigen Zweier-Kombination von anderen Funktionalen zu berechnen. Sehr oft werden Ansätze für die Kovarianzfunktion des Störpotentials T gemacht (Jordan,Heller,1978, Tscherning, Rapp, 1974, Reilly,1972, Jordan, 1970 u.a.). Daraus lassen sich dann konsistente Fehlermodelle für die übrigen Größen ableiten durch

$$\begin{aligned}
 C(\Delta g, \Delta g) &= B B C(T,T), \\
 C(N, \Delta g) &= A B C(T,T), \\
 C(\xi, \Delta g) &= D B C(T,T), \\
 C(\eta, \Delta g) &= E B C(T,T) \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Es gelten dann auch Umkehrungen wie

$$C(T,T) = S S C(\Delta g, \Delta g),$$

S ist der 'Stokes'-Operator. In Kap. 2.9.1 wurde die Fehlerfortpflanzung durch Integraloperatoren vom 'Stokes'-Typ beschrieben. Für ein homogenes und unabhängiges

Fehlerverhalten der  $\Delta g$  kann man schreiben

$$\begin{aligned} C(T,T) &= \sigma_{\Delta g}^2 (R/(4\pi))^2 \langle S(y,z), \langle S(z,x), \delta(x,y') \rangle \rangle \\ &= \sigma_{\Delta g}^2 (R/(4\pi))^2 \langle S(y,z), S(z,y') \rangle \end{aligned}$$

Die Stokes-Funktion  $S$  kann nach Kapitel 5.1 in harmonische Funktionen entwickelt werden ( $e_{nm}$ : orthonormierte Kugelfunktionen):

$$S(x,y) = \left[ \frac{4\pi}{n-1} [e_{nm}(x) e_{nm}(y)] \right] = \left[ \frac{2n+1}{n-1} P_n(x,y) \right]$$

Für Anwendungen, die auch die unterschiedliche Höhenlage der Punkte berücksichtigt, ist die Kovarianz-Entwicklung um den Faktor

$$s^{n+2} = \left( \frac{R^2}{r(x)r(y)} \right)^{n+2}$$

zu erweitern (siehe auch Kap.2.8.3).

$R$  ist der Radius der Bjerhammar-Kugel.  $R$  ist immer kleiner als alle möglichen  $r(x)$ . Dies erzwingt sicher eine Konvergenz der Entwicklung und 'dämpft' die Kovarianzfunktion. Bei Interpolationen führt dies zur mehr oder wenig starken Filterung der interpolierten Werte.

Damit erhält man für die Kovarianz nach der Stokes-Integration von gleichgewichteten Anomalien:

$$C(T,T) = \sigma^2 \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2n+1}{(n-1)^2} s^{n+1} P_n \right]_N = a [c_n s^{n+1} P_n] = [C_n]$$

$a$  ist ein Skalierungsfaktor.

Ist das Potential als Reihenentwicklung in einer orthonormierten Basis gegeben, etwa durch Kugelfunktionen:

$$T(x) = \left[ [a_{nm} Y_n^m(x)] \right]_N$$

so wird durch die Beachtung der Kovarianz und dank den Orthogonalitätsbeziehungen, dem Additionstheorem (in ähnlicher Weise wie früher) und der Erweiterung mit dem Faktor  $s$ :

$$C(T,T) = \left[ c_n s^{n+1} P_n \right]_N$$

$$c_n = \left[ a_{nm}^2 \right]_m$$

Die  $c_n$  werden Gradvarianzen genannt.  $N$  beziffert die Anzahl der abgespaltenen Gradvarianzen. Für die Koeffizienten geben Tscherning/Rapp (1974) im Unterschied zur obigen (Stokes'schen) Entwicklung, die keine geschlossene Darstellung hat, folgende Form:

$$c_n = \frac{n-1}{(n-2)(n+B)}$$

$B = 24$ .

Tscherning, Rapp (1974) geben noch zwei weitere Möglichkeiten, die ebenfalls auf geschlossene Formen führen:

$$c_n = \frac{n-1}{n-2} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n-1}{(n-2)(n+B1)(n+B2)}$$

Ein Beispiel einer empirischen  $C(T,T)$  nach Stokes ist im Kap.6.3.3 gegeben. Dort ist allerdings der Definitionsbereich auf die doppelte Dimension der Schweiz beschränkt, was zur Folge hat, dass das dortige Spektrum nicht mit dem hier für die ganze Kugel erhaltenen verglichen werden darf. Weiter ist zu bemerken, dass für die Verwendung derartiger Funktionen im statistischen Sinn ein 0-ter Ordnung Term (oder Mittelwert) abgezogen werden muss. (Term  $n=0$  entfällt). Beachtet man den in Kapitel 2.9.4 hergeleiteten Zusammenhang zwischen Kovarianz und Gewicht, so kann man schreiben:

$$P(T,T) = \frac{1}{\sigma^2 R^2} \frac{1}{4\pi} \left[ (n-1)^2 (2n+1) P_n \right]$$

Bei den Differential-Operatoren müssen entsprechend Ableitungen ausgeführt werden, was auf ähnliche Beziehungen führt.

Die Kovarianzfunktionen finden nun Eingang bei Interpolationsverfahren (siehe Kap. 3.4.3) und bei Parameterbestimmungsproblemen. Eine ausführliche Beschreibung der Kollokation findet man in Moritz (1980). Erweitert man den Kollokationsansatz mit einem Funktional des Signals, so erhält man als Beobachtungsgleichung:

$$l = Ax + Rt + n$$

Hein (1982a,b) verwendet diesen Ansatz in einem operationellen Modell (Programmsystem OPERA). Dabei setzt er als Signale Potentialgrößen mit ihren Ableitungen an.

Falls die Signale und das Messrauschen als unkorreliert vorausgesetzt werden, also  $C_{tn} = 0$ ,

so ergibt sich aus der hybriden Norm die Minimumsbedingung.

$$n^T C_{nn}^{-1} n + t^T C_{tt}^{-1} t = \min.$$

Die unbekannt Parameter werden:

$$x = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} I$$

Der funktionale Zusammenhang für Signale an beliebigen Stellen ist dann gegeben durch:

$$s = K^T R C^{-1} (I - A x)$$

- A : Systemmatrix (Funktional des Modells, z.B. Trend)
- R : Systemmatrix (des funktionalen Zusammenhangs mit dem Signal)
- C : bezeichnet die Signalkovarianz =  $C_{nn} + R C_{tt} R^T$
- K : Kovarianz zwischen Signal und (ev. prädiziertem) Signal  $C_{st}$
- $C_{nn}$  : Kovarianz des (Mess)rauschens
- $C_{tt}$  : Kovarianz des (Signal)rauschens
- I : Beobachtungen

Für die Fehler an den Parametern ergibt sich:

$$Q_{xx} = (A^T C^{-1} A)^{-1}$$

Und für die Fehler an den Signalen:

$$Q_{ss} = C_{ss} - K^T C^{-1} (E - A Q_{xx} A^T C^{-1}) K$$

Die Kreuzkovarianz zwischen Parametern und Signalen wird:

$$Q_{xs} = - Q_{xx} A^T C^{-1} R K$$

Bei der Parameterbestimmung in Kap.5.2.2 könnte dieser Ansatz verwendet werden. Da jedoch 2500 Punkte in die Berechnung einfließen, wurde für das dortige einfache Beispiel auf den Überbau der Kovarianzen und die Signalschätzung verzichtet. Man kommt so zum einfachen Ausgleichungsproblem zurück. Neben der Parameterbestimmung kann man nun auch eine Interpolation von Messungen  $I'$  durchführen (z.B. Sünkel, 1984)

$$I' = A' x + R s'$$

mit den Fehlern

$$E_{yy'} = A' E_{xx} A'^T + A' E_{xs} R^T + R E_{s'x} A'^T + R E_{s's} R^T$$

Ist der funktionale Zusammenhang mit dem Signal durch die Einheit  $E$  gegeben (die Messungen entsprechen gerade trend- und fehlerbehafteten Signalgrößen), so vereinfacht sich die Gleichungen, da gilt:  $R = E$ . Gurtner (1978) wendet diese Methode zur Interpolation von reduzierten Lotabweichungen an. Kraiger (1982), Sünkel und Kraiger (1983), Sünkel (1984) setzen diese Methode zur Interpolation von Freiluftanomalien ein, unter gleichzeitiger Abspaltung der linearen Korrelation von Höhe und Freiluftanomalie. Zur Geoidbestimmung wurden in Österreich (Sünkel, 1983) derartige Ansätze auf die Lotabweichungen angewendet. Lahmeyer (1985) verwendet den Kollokationsansatz zur Approximation des Schwerefeldes und des Potentials. Ebenso bestimmte Marti (1988) mit Kollokationsansätzen ein lokales, sehr genaues Geoid im Gebiet der Ivrea-Zone. Neuere Arbeiten in dieser Richtung werden gegenwärtig von Wirth (1990a,b) unternommen. Die verschiedenen Kovarianzfunktionen können nun z.T. theoretisch oder empirisch bestimmt werden. Nach den eingangs erwähnten Fehlerfortpflanzungsmechanismen, genügt es, irgendeine Kovarianz zu kennen. Aus ihr können, falls funktionale Zusammenhänge bestehen, alle übrigen Verknüpfungen abgeleitet werden. Einer theoretisch abgeleiteten Kovarianz entspräche etwa das  $C_{tt}$  während eine empirisch abgeleitete Kovarianz als  $C$  betrachtet werden kann.

## 4.2 Differentialgeometrische Beschreibung des Schwerefeldes

Beschreibt man das Schwerefeld durch dessen Potential, so kann man zeigen, dass das Schwerefeld eindeutig durch die Geometrie der Niveaulächen beschrieben werden kann. Die Anwendung der differentialgeometrischen Methoden und Theorien hat in der Geodäsie Marussi 1956 (Marussi, 1985) erstmals voll ausgenützt und ausgearbeitet. In Hotine (1969) wird eine umfangreiche Darlegung der differentialgeometrischen Anwendungen in der Geodäsie vorgeführt.

Wir betrachten Trajektorien des Vektorfeldes in einem lokalen orthonormierten Koordinatensystem. Wir wählen dazu das übliche begleitende Dreibein

- t** Tangentenvektor
- n** Hauptnormalenvektor
- b** Binormalenvektor

mit  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$  und zyklisch.

Die Frenet'schen Formeln liefern dann mit der Abkürzung  $' = d/ds$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= K\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -K\mathbf{t} + T\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -T\mathbf{n} \end{aligned}$$

mit  $K =$  Krümmung ;  $T =$  Torsion.

Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass für die Flächennormale  $\mathbf{v}$  gilt ( $\mathbf{b}$  : Krümmungstensor):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{Sp}(\mathbf{b}) = -2H$$

Die Schwerefeldlinien sind als Gradienten eines Potentials  $V$  Orthogonaltrajektorien zu den Niveaulächen des erzeugenden Potentials  $V$ . Man kann also setzen:  $\mathbf{t} = -\mathbf{v}$ , wo  $\mathbf{v}$  die Flächennormale bezeichnet. Damit gilt also:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{t} &= 2H & 1) \\ \nabla \wedge \mathbf{t} &= K\mathbf{b} & 2) \end{aligned}$$

Wir suchen einen Zusammenhang zwischen der physikalischen Grösse  $g$  und den geometrischen Grössen  $K$  (Krümmung der Feldlinie; Krümmung der Lotlinie) und  $H$  (mittlere Krümmung der Niveauläche).

Der Schwerevektor wird:

$$\nabla V = g \mathbf{t} \quad 3)$$

Bildet man die Divergenz dieses Gradienten, so erhält man direkt:

$$\nabla \nabla V = \Delta V = \nabla g \cdot \mathbf{t} + g \nabla \cdot \mathbf{t}$$

Und mit 2) erhält man sofort:

$$\mathbf{t} \cdot \nabla g = -2H g + \Delta V$$

Dies ist also die Komponente des Gradienten von  $g$  in Richtung von  $\mathbf{t}$ . Bildet man vom Gradienten dagegen den Rotor, so erhält man unter Beachtung der Gleichung 3):

$$\nabla \wedge \nabla V = \mathbf{0} = \nabla g \wedge \mathbf{t} + g \nabla \wedge \mathbf{t} = \nabla g \wedge \mathbf{t} + g K \mathbf{b}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass  $\nabla g$  senkrecht zu  $\mathbf{b}$  stehen muss,  $\nabla g$  also keine Komponente in Richtung von  $\mathbf{b}$  haben wird. Aus obiger Gleichung ergibt sich durch Skalarmultiplikation mit  $\mathbf{b}$ :

$$0 = \mathbf{b} \cdot (\nabla g \wedge \mathbf{t}) + g K = -\nabla g \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) + g K$$

und:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla g = g K$$

Dies ist gerade die Komponente in Richtung  $\mathbf{n}$ .

Damit erhält man die Zerlegung

$$\nabla g = (-2H g + \Delta V) \mathbf{t} + K g \mathbf{n}$$

Die Grösse  $g$  steht demnach in direktem Zusammenhang mit der Geometrie der Niveauläche und des Feldlinienverlaufs.

Da beim Randwertproblem (mit Potentialflächen als Berandung) die Ableitungen in Normalenrichtung  $\mathbf{v} = -\mathbf{t}$  (damit auch Wechsel des Vorzeichens von  $H$ ) von Bedeutung sind, schreiben wir die entsprechende Projektion als:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla g = \partial g / \partial v = -(2H g + \Delta V) - K g \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = -2H g - \Delta V$$

Aus der Poisson-Gleichung entnimmt man

$$\Delta V = -4\pi G \rho + 2 \omega^2,$$

was zur Formel von Bruns (1878) führt:

$$\partial g / \partial v = -2H g + 4\pi G \rho - 2 \omega^2.$$

$v$ : Normale auf eine Äquipotentialfläche.

### Transformation des Euklidischen Raumes

Man kann sich nun fragen, ob es nicht möglich ist, ein Koordinatensystem so zu finden, dass die Lotkrümmungen bei der Kurvenbeschreibung verschwinden. Eine analoge Frage, jedoch den Lichtstrahl betreffend, wurde u.a. in Geiger, 1988 behandelt. Man kann die dortige Analogie zwischen der mechanischen Bewegung und dem Lichtstrahl auf das Schwerfeld ausdehnen. Wir gehen dabei von der Gleichung

$$\nabla g = (-2H g + \Delta V) t + K g n$$

aus. Im massefreien Raum wird nach skalarer Multiplikation mit  $t$ :

$$\nabla g \cdot t = -2H g \Rightarrow 2H = -\nabla \mu \cdot t$$

mit  $\mu = \ln g$  und einem Vorzeichenwechsel wegen  $H$  (Pseudoskalar) wird also

$$\nabla \mu - (\nabla \mu \cdot t) t = K n$$

Die Differentialgleichung für die geodätische Linie kann man in üblicher Weise schreiben als

$$g_{ik} \ddot{u}^k + \Gamma_{i,kl} \dot{u}^k \dot{u}^l = \mu_i - \mu_k \dot{u}^k \dot{u}_i = K n_i$$

hier ist  $g_{ik}$  die Metrik und  $\Gamma$  bezeichnet die Christoffel-Symbole.

Man kann nun folgende Identifikation vornehmen:

$$\dot{u} = t \quad \mu = \ln g ;$$

$g$  ist dabei der oben benutzte Betrag des Schwerevektors:  $g = g t$

Führt man nun die konforme Transformation in folgender Weise durch  
Metrik und Linienelement:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ik} &= g^2 \cdot g_{ik} = g^2 \cdot \delta_{ik} \\ d\tilde{s} &= g ds\end{aligned}$$

Tangentialvektor und Beschleunigung

$$\begin{aligned}\dot{v}^i &= \frac{1}{g} \dot{u}^i \\ \dot{v}_i &= g \dot{u}_i \\ \ddot{v}^k &= \frac{d\dot{v}^k}{d\tilde{s}},\end{aligned}$$

so erhält man durch Einsetzen (s.h. Geiger, 1988) die transformierte Gleichung

$$\tilde{g}_{ik} \ddot{v}^k + \tilde{\Gamma}_{i,kl} \dot{v}^k \dot{v}^l = 0$$

Dies entspricht der kräftefreien Punktbewegung oder der geodätischen Linie. Im entsprechend gewählten Koordinatensystem werden also die Trajektorien zu 'Geraden'. Das Analogon Lichtweg-Schwerelinie kann auch durch die Betrachtung skalarer Funktionale gezeigt werden. Für die Wellenausbreitung im refraktiven Medium mit dem Brechungsindex  $n$  definiert das Funktional

$$\Phi = c \cdot t = c \int_A^B dt = \int_A^B \frac{c}{v} ds = \int_A^B n ds$$

die Wellenfronten, die als Flächenschar dargestellt werden können. Das Potential kann ebenfalls als Funktional dargestellt werden. Bekanntlich gilt:

$$\Phi = \int_A^B g ds = \int_A^B g t ds = \int_A^B g ds$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt für Wege, die parallel zum Schwerevektor verlaufen. Das Funktional  $\Phi$  definiert also das Potential, das wiederum als Flächenschar, also als Schar von Äquipotentialflächen, dargestellt werden kann. Durch die Identifikation von  $n$  durch  $g$  ist die Analogie direkt ersichtlich. Die Wellenfronten entsprechen demnach den Äquipotentialflächen und der Lichtstrahl der Schwerefeldlinie.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung verschwindet also durch eine konforme Abbildung.

Aus der euklidischen Ausgangsmetrik folgt

$$\tilde{g}_{ij} = f(\mathbf{u}) g_{ij} = g^2(\mathbf{u}) \delta_{ij}$$

und damit

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \tilde{g}_{33} = g^2(\mathbf{u})$$

### 4.3 Flussberechnungen im Gravitationsfeld

Bei Vektorfeldern lassen sich durch Flussbetrachtungen oftmals interessante Zusammenhänge zwischen der Quellenverteilung und den Feldgrößen herstellen. Es ist klar, dass die selben Ergebnisse auch anders erhalten werden können. Der interessante Punkt jedoch besteht darin, dass alleine durch geometrische Eigenschaften der betrachteten Flächen und Felder ohne Rechnung Aussagen gemacht werden können. Besonders in kugelsymmetrischen Fällen wird die Anwendung sehr übersichtlich und einfach. Im folgenden sind einige Beispiele hierfür angeführt.

#### 4.3.1 Zum Gauss'schen Satzes

Der Fluss eines Vektorfeldes  $\mathbf{g}$  durch eine vorgegebene Fläche  $F$  mit der äusseren Flächennormalen  $d\mathbf{f}$  wird im allgemeinen definiert als:

$$\Phi = \int_F \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f}$$

Betrachtet man eine geschlossene Fläche, die Hülle  $\partial\Gamma$  des Gebietes  $\Gamma$ , so geht die Formel in ein Hüllenintegral über:

$$\Phi = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f}$$

Diese Integral kann nun auch durch ein Integral über die Divergenz berechnet werden. Diese Beziehung zwischen Oberflächenintegral und Volumenintegral heisst Satz von Gauss:

$$\Phi = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{g} \, dv$$

Ist nun  $\mathbf{g}$  von einem Potential ableitbar durch -grad  $W$ , so erhält man sofort

$$-\operatorname{div} \mathbf{g} = \operatorname{div} \operatorname{grad} W = \Delta W$$

Bekanntlich genügt das Gravitationspotential der Poissongleichung:

$$\Delta W = -4\pi G \rho$$

Im Falle des Gravitationspotentials entspricht die Normierungskonstante  $G$  genau der Gravitationskonstanten  $G$ .  $\rho$  ist dann die Massendichte. Setzt man dies im Gauss'schen Satz ein, so erhält man sofort:

$$\Phi = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f} = -4\pi G \int_{\Gamma} \rho \, dv = -4\pi G M(\Gamma)$$

$M(\Gamma)$  ist dabei die gesamte Masse, die sich innerhalb der Hülle  $\partial\Gamma$  befindet. Es ist zu bemerken, dass der Fluss durch die Hülle völlig unabhängig von der Dichteverteilung ist, lediglich die gesamte Masse innerhalb des Gebietes  $\Gamma$  ist von Bedeutung.

#### 4.3.2 Verallgemeinerte Stokesformel

Die Integrallösung des Randwertproblems, wie sie durch die übliche Stokesformel gegeben wird, gilt nur für den Fall, dass die Terme 0-ter Ordnung an den Messungen bereits abgespalten sind. Dies wird stillschweigend vorausgesetzt, wenn man die Reihenentwicklung der Stokesformel, wie sie in Kapitel 3.2.2 notiert ist, erst beim Term  $n=2$  startet. In Heiskanen/Moritz (1967) sind die Korrekturen hergeleitet. Hier soll nun der Zusammenhang zwischen dem Fluss des Schwerfeldes und den 0-ter Ordnungs Termen hergestellt werden. Die Anwendung dieser Methode erlaubt es in aller Allgemeinheit diese Terme herzuleiten. Durch eine Spezialisierung auf den sphärischen Fall erhält man dann die bekannten Formeln.

$\partial G$  bezeichne die Fläche des Geoides und

$\partial R$  bezeichne die Referenzfläche (z.B. Ellipsoid)

dann wird der Fluss der Schwereanomalie durch das Geoid:

$$\Phi(\Delta g, \partial G) = \int_{\partial G} \Delta g \, df = \Phi(\mathbf{g}, \partial G) - \int_{\partial G} \gamma(\partial R) \, df$$

Das zweite Integral lässt sich in ein Integral über die Referenzfläche schreiben, falls der Abstand (hier die Geoidundulation  $N$ ) nicht zu gross ist. Das Flächenelement  $df$  wird durch das Element auf der Referenzfläche ausgedrückt:

$H$  mittlere Krümmung

$K$  Gauss'sches Krümmungsmass

$$df = (1 - 2NH + N^2 K) d\sigma$$

Beachtet man weiter, dass gilt (siehe Abschnitt 4.3.1):

$$\Phi(g, \partial G) = -4\pi G M_{\text{geoid}} \quad \text{und entsprechend}$$

$$\Phi(\gamma, \partial G) = -4\pi G M_{\text{Ref}} \quad ,$$

so kann man für den Fluss der Anomalie schreiben:

$$\Phi(\Delta g, \partial G) = 4\pi G \delta M - \int_{\partial R} (-2NH + N^2 K) \gamma d\sigma$$

$\delta M$  ist die Differenz der Masse innerhalb des Geoides und der Masse des Referenzkörpers (Ellipsoid)

In sphärischer Approximation lässt sich die Gleichung erheblich vereinfachen indem dann gilt:

$$H = 1/R; \quad K = 1/R^2$$

zudem vernachlässigen wir den Term  $(N/R)^2$

$$\Phi(\Delta g, \partial G) = 4\pi G \delta M - \frac{2}{R} \int_{\text{Kug}} N \gamma d\sigma = 4\pi G \delta M - \frac{2}{R} \int_{\text{Kug}} (T - \delta W) d$$

Dabei wurde die Bruns'sche Formel

$$N \gamma = T - \delta W$$

eingesetzt.  $\delta W$  bezeichnet die Differenz zwischen dem Potentialwert der Referenzfläche und dem Geoid. Sie ist bei richtiger Wahl der Referenzfläche gleich 0.

Man kann nun auf folgende Art ohne weiteres Konstantwerte einführen (sie können auch als Mittelwerte betrachtet werden):

$$\int_{\partial G} \Delta g df = 4\pi R^2 \Delta g_0 \quad \text{und} \quad \int_{\text{Kug}} T d\sigma = 4\pi R^2 T_0$$

Aus der Flussgleichung ergibt sich

$$\Delta g_0 = \frac{G \delta M}{R^2} + \frac{2}{R} \delta W - \frac{2}{R} T_0$$

Man führt noch ein  $N_0$  so ein, dass gilt ( $N'$  und  $T'$  werden aus dem üblichen Stokesintegral berechnet):

$$T = T' + T_0 = \gamma N' + \gamma N_0 + \delta W$$

Da das  $T_0$  durch die Massendifferenz  $\delta M$  erzeugt wird, ergibt sich wiederum für die Kugel

$$T_0 = \frac{G \delta M}{R} = \gamma N_0 + \delta W$$

Führt man diesen Wert in die obige Gleichung für  $\Delta g_0$  ein erhält man direkt eine Gleichung für den 0-ten Ordnungsterm  $N_0$ :

$$N_0 = \frac{\delta W}{\gamma} - \frac{R}{\gamma} \Delta g_0$$

Es können verschiedene Kombinationen auf der rechten Seite der Gleichung angegeben werden. Sie entsprechen genau den Gleichungen die auch in Heiskanen/Moritz (1976, p.102) gegeben werden.

### 4.3.3 Kugelsymmetrische Massenverteilungen

Wir betrachten eine kugelsymmetrisch geschichtete Dichteverteilung und berechnen den Potential- und Schwereverlauf. Dies erfolgt nun weder über die Lösung von Differentialgleichungen noch über die direkte Berechnung aus Massen, sondern nur über die Zuhilfenahme der obigen Integralbeziehung. Für kugelförmige Anordnungen wird das Gravitationsfeld ebenfalls eine Kugelsymmetrie zeigen. Man kann dann schreiben:

$$\mathbf{g} = -g(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{und} \quad d\mathbf{f} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{f} = r \, r \, d\Omega$$

Wenn man nun noch die Hülle  $\partial\Gamma$  so wählt, dass  $r = \text{const}$  ( $r \in \partial\Gamma$ ) (also eine Kugel) gilt, wird die Flussberechnung wesentlich vereinfacht:

$$\Phi = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f} = -g(r) r^2 \int d\Omega = -4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M(r)$$

Daraus ergibt sich sofort das Gravitationsfeld in Abhängigkeit des Abstandes vom Nullpunkt der kugelsymmetrischen Massenverteilung.

$$g(r) = \frac{G M(r)}{r^2} \quad \text{und} \quad W(r) = W_0 + \int \frac{G M(r)}{r^2} dr$$

Befindet man sich also ausserhalb der Massenkugel, so entspricht  $M(r)$  genau der Gesamtmasse der Kugel und man erhält das bekannte  $1/r^2$ -Feld. Es ist auch ersichtlich, dass innerhalb einer Hohlkugel  $g = 0$  sein muss (analog zum Faradaykäfig). Der Effekt an der Oberfläche einer Kugelschale wird:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \approx \frac{G}{r_0^2 \left(1 + 2\frac{d+h}{r_0}\right)} 4\pi r_0^2 d \rho = 4\pi G \rho d \left(1 - 2\frac{d+h}{r_0}\right)$$

Die Masse innerhalb des sphärischen Gebietes  $\Gamma$  berechnet sich aus:

$$M(r) = \int_{\Gamma} \rho dv = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$$

Liegt eine radiale Dichteverteilung der Form

$$\rho(r) = \text{const.} \cdot \frac{1}{r}$$

vor, so ist ersichtlich, dass die Gravitation  $g(r)$  im ganzen Raum konstant bleibt.

Ein interessanter Fall wird durch eine Exponentialfunktion

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{r-r_0}{H}} \quad \text{und} \quad \rho(r) = 0 \quad \text{für} \quad r < r_0$$

beschrieben. Dieser Fall scheint bei der Behandlung des atmosphärischen Effektes wieder auf. Wird diese Funktion in obige Formeln eingesetzt und integriert, so erhält man eine gute Näherung für das Gravitationsfeld innerhalb der obigen Dichteverteilung, sprich Atmosphäre:

$$g(r) \approx 4\pi G \rho_0 \frac{H}{r_0} \left( (r_0 + 2H) \left(1 - e^{-\frac{h}{H}}\right) + 2H \frac{h}{r_0} e^{-\frac{h}{H}} \right)$$

#### 4.3.4 Ebene Bouguer - Korrektur

Anhand dieses Verfahrens lässt sich auf einfachste Weise auch die ebene Bouguer-Korrektur herleiten. Dazu betrachten wir eine ebene unendlich ausgedehnte Massenplatte der Dicke  $d$ . Wir wählen eine Hülle  $\partial\Gamma$  so, dass ein Stück der Fläche  $A$  aus der ebenen Platte herausgeschnitten wird. Die Grund- und Deckflächen von  $\Gamma$  ('Schuhschachtel') verlaufen im Abstand  $h$  parallel zur Platte. Aus Symmetriegründen muss das Gravitationsfeld überall senkrecht zur Platte und mithin zur Deck- und Grundfläche  $\partial\Gamma$  verlaufen. Damit berechnen wir den Fluss durch  $\partial\Gamma$

$$\Phi = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f} = -2 g(h) A = -4\pi G M(d) = -4\pi G A d \rho$$

Daraus erhält man (praktisch ohne Rechnung) das von der Platte erzeugte Gravitationsfeld:

$$g(h) = 2\pi G \rho d$$

Dies entspricht genau der Bouguerkorrektur. Interessant ist, dass  $g$  im ganzen Raum ausserhalb der Platte gleich gross ist. Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte erzeugt also auf jeder Seite ein homogenes, isotropes Schwerfeld.

#### 4.3.5 Bestimmung der Störmasse aus der Schwereanomalie

Zur Bestimmung der gesamten Störmasse kann das in Kapitel 3.1 besprochene Verfahren der Flussberechnung angewendet werden. Ist die Schwereanomalie  $g$  (es genügt auch die  $z$ -Komponente  $g_z$ ), die durch die Masse  $m$  in der Ebene bewirkt wird, bekannt, so kann man aus einer Flussbetrachtung sofort die gesamte Störmasse bestimmen. Zur Berechnung legen wir eine sphärische Hülle  $\partial\Gamma$  um  $m$ . Sie wird dann durch die Ebene  $\Sigma$  in  $\partial\Gamma_1$  und  $\partial\Gamma_2$  geteilt. Zugleich wird ein Integrationsgebiet  $E$  in der Ebene  $\Sigma$  herausgeschnitten (siehe Abb.4.1).

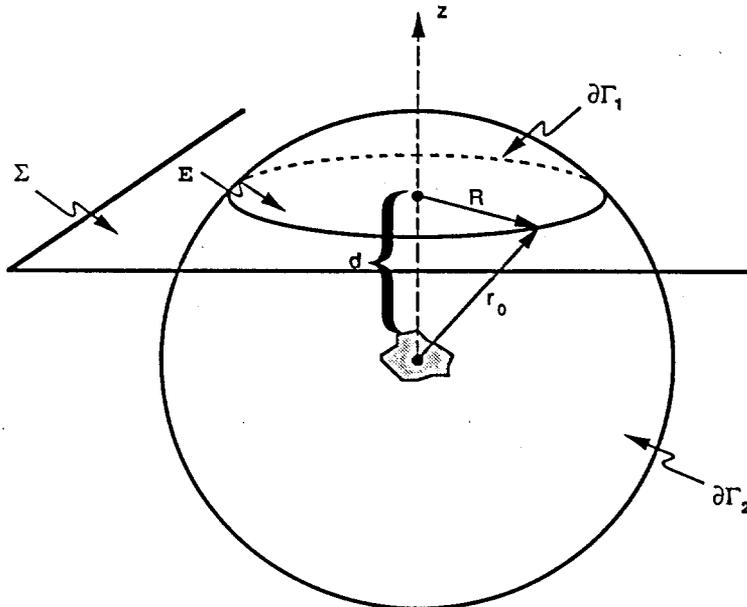


Abb. 4.1 Geometrie zur Fluss- und Massenberechnung

Der Fluss  $\Phi_E$  durch die Fläche  $E$  wird also:

$$\Phi_E = \int_E \mathbf{g} \, df = \int_E (g_{\text{Horiz}} + g_z) \, df = \int_E g_z \, df$$

Offensichtlich muss  $N_E$  gleich dem Fluss durch  $\partial\Gamma_1$  sein. Ist das Integrationsgebiet genügend gross ( $R$  gross), so wird der Fluss durch  $\partial\Gamma_1$ :

$$\Phi_{\partial\Gamma_1} \approx -\frac{Gm}{r_0^2} \cdot \partial\Gamma_1 = -2\pi Gm \left(1 - \frac{d}{r_0}\right)$$

$$\Phi_E = \int_E g_z \, df = -2\pi G \left(1 - \frac{d}{r_0}\right) m$$

Ist die Anomalie über ein genügend grosses Gebiet bekannt ( $r_0 \rightarrow \infty$ ), so gilt also:

$$\Phi_E = -2\pi G m \quad \text{oder} \quad m = -\Phi_E / 2\pi G$$

Die Störmasse errechnet sich also relativ einfach nach der Formel:

$$m = -\frac{1}{2\pi G} \int_{E \rightarrow \infty} g_z df$$

Im Normalfall ist die Anomalie jedoch nur in einem beschränkten Gebiet bekannt. Der Fehler durch die Vernachlässigung beträgt dann:

$$\Phi_E \approx \int_E g_z df = 2\pi G m \frac{d}{r_0}$$

Wir wollen den Fehler zahlenmässig abschätzen. Dazu gehen wir von einer kugelförmigen Störmasse aus, für genügenden Abstand ist dies immer gerechtfertigt. Die Amplitude wird dann

$$g_z(0) = A = -\frac{Gm}{d^2}$$

und für die Halbwertsbreite B

$$g_z(B) = A/2 = -Gm d (d^2 + B^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Daraus wird

$$B \approx 0.8 \cdot d = \beta \cdot d$$

Für  $r_0$  gilt ( $R = k \cdot B =$  Integrationsradius in der Ebene )

$$r_0 = \sqrt{R^2 + d^2} = d \sqrt{k^2 \beta^2 + 1}$$

Der relative Fehler der Massenberechnung wird damit:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{d}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{k^2 \beta^2 + 1}}$$

oder für k:

$$k \approx \frac{1}{\frac{\Delta m}{m} \cdot \beta}$$

Für eine Genauigkeit von 1% müsste also das Integrationsgebiet bis auf das 125-fache der Halbwertsbreite erstreckt werden. Bei einer Ausdehnung des Gebietes von  $2 \cdot B$  ist etwa die Hälfte der Masse berücksichtigt. Diese Methode der Gesamtmassenbestimmung ist daher nur in Ausnahmefällen anwendbar.

## 4.4 Berechnung von Potentialfeldern mittels Fouriertransformationen

Die Fouriertransformation ist in ihrer rechnergestützten Anwendung (insbesondere die FFT) zu den numerischen Verfahren zu zählen. In analytischer Formulierung jedoch ist sie inhärent in der Lösung der Laplacegleichung vorhanden (siehe Kap. 2.3.2). Die Anwendung der Fouriertransformation führt auch auf das 'spektrale' Verständnis des Schwerefeldes, einer Betrachtungsweise, die im Zusammenhang mit Kugelfunktionen ebenfalls auftaucht.

### 4.4.1 Allgemeines zur Fouriertransformation

Die in der Signaltheorie übliche Verarbeitungsmethode (z.B. de Coulon, 1984, Kunt, 1980) der Fouriertransformation wurde auch in der geophysikalischen Interpretation von Gravimeterdaten angewendet (Lewis und Dorman, 1970, Dorman, Lewis, 1970, Dorman, Lewis, 1972, Nielsen, Petersen 1978/79, Karner, Watts, 1982, Steiner, 1985a, 1985b, u.a.). In den letzten Jahren wurde die Spektralanalyse auf verschiedene Probleme der Physikalischen Geodäsie angewendet. Eine allgemeine Einführung dazu findet sich in z.B. Hofmann-Wellenhof und Moritz (1986) und in Schwarz (1984b). Spezielle Probleme wie die Topographische Korrektur (Sideris, 1984) und das Molodensky-Problem (Sideris, 1987) konnten erfolgreich bearbeitet werden.

Die Methode, vor allem die schnelle Fouriertransformation (FFT) (Cooley and Tukey, 1965) besticht durch die Rechengeschwindigkeit. Allerdings müssen die zu transformierenden Daten im Ortsraum vorgängig auf gleichabständige Raster interpoliert werden.

Eine der grossen Rechengeschwindigkeitsgewinne durch die Fouriertransformation ist in der Struktur der zu behandelnden Gleichungen der Physikalischen Geodäsie zu suchen.

Alle wesentlichen Integrale sind vom Typ

$$u(P) = \int K(P, Q) v(Q) d^3q .$$

Interessant ist die Form des Kerns, der (in kartesischen Koordinaten) vielfach auf die Form

$$K(P, Q) = K(x - y) ,$$

wo  $x$  bzw.  $y$  die Ortsvektoren der Punkte  $P$  bzw.  $Q$  sind, gebracht werden kann. Er hängt nurmehr von der Distanz zwischen Aufpunkt und Quellpunkt ab. Damit erhält man das Faltungintegral:

$$u(\mathbf{y}) = \int K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) v(\mathbf{x}) d^3x$$

oder

$$u(\mathbf{y}) = k(\mathbf{y}) * v(\mathbf{y}) .$$

Im Spektralbereich, oder fouriertransformiert, wird die Faltung bekanntlich zur einfachen Multiplikation:

$$U(\omega) = K(\omega) V(\omega)$$

Die Grossbuchstaben bezeichnen die Transformierte des Original (mit Kleinbuchstaben bezeichnet). Der Ortsraum (hier meist der  $\mathbb{R}^3$ ) mit den Elementen  $\mathbf{y}$  (Ortsvektor) geht über in den Spektralbereich  $\mathbb{C}^3$  mit den Elementen  $\omega$  (Frequenz). Vektorwertige Ortsfunktionen gehen ebenfalls über in komplex-vektorwertige Funktionen.

In kartesischen Koordinaten ist der Kern meist einfach auf die abstandsabhängige Form zu bringen. Unangenehmer wird das Problem, falls andere Koordinaten-Systeme verwendet werden. Meist müssen die Formeln dann in ebener Approximation aufgestellt werden, was z.T. allerdings der direkten kartesischen Rechnung gleichkommt. Durch die direkte Fouriertransformation von Gleichungen im kartesischen System kann relativ einfach eine Allgemeingültigkeit der Formeln beibehalten werden.

Als Beispiel wird im nächsten Kapitel eine allgemeine Herleitung für Masseneffekte (beliebig geschichteter Dichteverteilungen) im Spektralbereich vorgeführt. Daraus resultiert eine verallgemeinerte 'Parker'-Formel. Aus ihr kann durch Spezialisierung der z-Komponente auf 2-d die bekannte 'Parker'-Formel (Parker, 1972) hergeleitet werden. Zusätzlich jedoch gewinnt man eine Transformationsformel für das Potential und die Lotabweichungen (Horizontalkomponenten).

#### 4.4.2 Allgemeine Formel zur Berechnung von Masseneffekten im Spektralbereich

Zur Berechnung schlagen wir einen direkten Weg ein. Im Unterschied zu Parker (1972) soll direkt die 3-d Transformation bestimmt werden. Dabei gehen wir von den unbehandelten Grundgleichungen aus. Andere Autoren (Sideris, 1984) verwenden bereits genäherte Formeln (ebene Approximation) (Moritz, 1980, p 415) oder machen bereits im Ansatz restriktive Annahmen (Goldflam, 1979).

Das Potential einer beliebigen Massenverteilung ist bekanntlich

$$U(P) = \int_V K(P,Q) \rho(Q) d^3q$$

Im Fall des Newtonschen Potentials ist für die Kernfunktion direkt der inverse Abstand zwischen Auf- und Quellpunkt einzusetzen.  $v(\mathbf{x})$  entspricht der Dichteverteilung  $\rho(Q)$  oder  $\rho(\mathbf{x})$ . Das Potential wird demnach durch die Faltung

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} l(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{R}^3$$

$u(\mathbf{y})$  = Potential im Punkte  $\mathbf{y}$

$\rho(\mathbf{x})$  = Dichte

$$l(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{G}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

beschrieben. Kurz

$$u(\mathbf{x}) = l(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Für die Schwerewirkung schreibt man:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Wir betrachten kartesische Koordinaten und wenden die Fouriertransformation auf 1) und 2) an:

$$\begin{aligned} F\{u\} &= F\{l * \rho\} = F\{l\} F\{\rho\} \\ \parallel \\ U(\omega) &= L(\omega) P(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{g} & = & -\nabla u \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F\{\mathbf{g}\} & = & -2\pi i \boldsymbol{\omega} F\{u\} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathbf{G}(\boldsymbol{\omega}) & = & -2\pi i \boldsymbol{\omega} U(\boldsymbol{\omega})
 \end{array}
 \tag{4}$$

dabei ist  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} := (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{\omega} := (u, v, w)$$

Wir konstruieren nun ein Modell mit horizontal variierender Dichte. In vertikaler Richtung soll  $\rho$  innerhalb einer Schicht konstant bleiben. Dies hat keine einschneidenden Restriktionen zur Folge, da in  $z$  variierende Dichtemodelle durch eine Schichtenabfolge sehr gut genähert werden können.

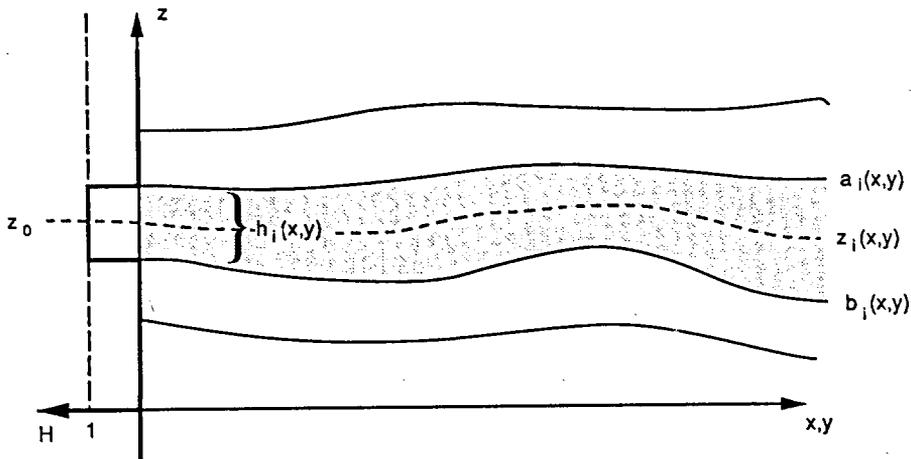


Abb. 4.2 Schichtmodell

Obiges Modell kann beschrieben werden als:

$$\rho(x,y,z) = \sum_i^N ([\rho_i^0(x,y) + \rho_i^1(x,y,z)] H_i(x,y,z))
 \tag{5}$$

$N$  = Anzahl Schichten

$\rho_i^0$  = Eine in  $z$  konstante, in  $x, y$  aber variierende Dichte (pro Schicht eine Funktion)

$\rho_1^1 =$  Beschreibt die Abweichung der Dichte von  $\rho_1^0$ .

Wird die Schicht genügend dünn gewählt, so ist  $\rho_1^1$  vernachlässigbar.

$H_i =$  Rechteckfunktion in  $z$  mit in  $x, y$  variierendem Fenster, schaltet die Massenwirkung an, sobald sich das behandelte Volumenelement innerhalb der betreffenden Schicht  $i$  befindet.

Zur Vereinfachung der Schreibarbeit betrachten wir (o. E. d. A.) nur eine Schicht (Wegfall des Index  $i$ ). Des weiteren vernachlässigen wir  $\rho^1$  in der Annahme, dass durch die Wahl einer genügend dünnen Schicht  $h$ ,  $\rho^1$  sehr klein wird (siehe später).

$$\sup_z \left| \frac{\rho^1(x,y,z)}{\rho^0(x,y)} \right| < \epsilon \quad 6)$$

für  $h(x,y) < \delta$

Damit wird:

$$\rho(x,y,z) = \rho^0(x,y) H(x,y,z) \quad 7)$$

$$H(x,y,z) = \text{rect}\left(\frac{z-z_0}{h(x,y)}\right) \quad 8)$$

$\text{rect}(\cdot)$  bezeichnet eine Rechteckfunktion.

$H(x,y,z)$ :

$a(x,y) =$  Obere Begrenzung der Schicht.

$b(x,y) =$  Untere Begrenzung der Schicht.

$$\left. \begin{aligned} z_0(x,y) &= \frac{1}{2}(a(x,y) + b(x,y)) \\ h(x,y) &= a(x,y) - b(x,y) \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

## Berechnung der Fouriertransformierten der Dichteverteilung

$$\begin{aligned}
 P &= F\{\rho\} = F\{\rho^0 H\} \stackrel{i)}{=} F_{xy} F_z\{\rho^0 H\} \\
 &\stackrel{ii)}{=} F_{xy}\{\rho^0 F_z\{H\}\}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

- i) Da für die 3-d Fouriertransformation  $F$  gilt  $F = F_{xy}F_z = F_x F_y F_z$   
Die Operatoren sind bekanntlich kommutativ (z.B.  $F_x F_y F_z = F_z F_x F_y$ )
- ii) Die Fouriertransformation ist linear also  $F\{a f(\underline{x})\} = a F\{f(\underline{x})\}$

Transformation der Rechteckfunktion:

$$\begin{aligned}
 F_z\{H\} &= F_z\left\{\text{rect}\left(\frac{z-z_0}{h}\right)\right\} \stackrel{i)}{=} e^{-2\pi i \omega z_0} F_z\left\{\text{rect}\left(\frac{z}{h}\right)\right\} \\
 &\stackrel{ii)}{=} e^{-2\pi i \omega z_0} h(x,y) \text{sinc}(\omega h)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

- i) Anwendung des Verschiebungssatzes
- ii) Transformation von  $\text{rect}(z/h)$  ist  $h \text{sinc}(wh)$  mit:

$$\text{sinc}(wh) = \frac{\sin(\pi wh)}{\pi wh} = \frac{1}{\pi wh} \frac{1}{2i} (e^{i\pi wh} - e^{-i\pi wh})$$

Es folgt unter Beachtung von 9)  $h = a - b$ ;  $z_0 = 1/2(a + b)$

$$\begin{aligned}
 F_z\{H\} &= \frac{1}{2\pi i \omega} (e^{+\pi i \omega (h - 2z_0)} - e^{\pi i \omega (-h - 2z_0)}) \\
 F_z\{H\} &= \frac{1}{2\pi i \omega} (e^{-2\pi i \omega b} - e^{-2\pi i \omega a})
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

und in 10) eingesetzt:

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} F_{xy}\{\rho^0(x,y) (e^{-2\pi i \omega b(x,y)} - e^{-2\pi i \omega a(x,y)})\}
 \tag{13}$$

## Transformation der Abstandsfunktion

$$= F \left\{ \frac{G}{|\mathbf{x}|} \right\} = G F \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right\} \quad 14)$$

Zur Berechnung von  $G F \{ |\mathbf{x}|^{-1} \}$  machen wir einen kleinen Umweg:

Wir nützen die Tatsache aus, dass die Funktion  $G F \{ |\mathbf{x}|^{-1} \}$  die Green'sche Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta 1(\mathbf{x}) = -4\pi G \delta(\mathbf{x}) \quad 15)$$

darstellt. Fouriertransformiert wird:

$$F \{ \Delta 1 \} = -4\pi G F \{ \delta(\mathbf{x}) \} = -4\pi G \quad 16)$$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$F \{ \Delta 1 \} = -4\pi^2 \omega^2 F \{ 1 \} \quad 17)$$

$$\begin{aligned} F &= F_i F_j F_k \\ &= F_j F_i F_k \quad (i,j,k) \in (x,y,z) \text{ und beliebig permutiert} \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

$$F_i \left\{ \frac{\partial^2 1}{\partial x_i^2} \right\} = -4\pi^2 \omega_i^2 F_i \{ 1 \}$$

$$F_j F_k F_i \left\{ \frac{\partial^2 1}{\partial x_i^2} \right\} = -4\pi^2 \omega_i^2 F_j F_k F_i \{ 1 \}$$

$$\parallel \\ F \left\{ \frac{\partial^2 1}{\partial x_i^2} \right\} = -4\pi^2 \omega_i^2 F \{ 1 \}$$

$$\sum_{i=1}^3 F \left\{ \frac{\partial^2 1}{\partial x_i^2} \right\} = F \{ \Delta 1 \} = -4\pi^2 F \{ 1 \} \sum \omega_i^2 = -4\pi^2 \omega^2 F \{ 1 \}$$

Damit wird aus 16)

$$-4\pi^2 \omega^2 F\{1\} = -4\pi G \quad (18)$$

oder

$$L(\omega) = \frac{G}{\pi\omega^2} \quad (19)$$

Die Formel 19) und 13) ergeben für das transformierte Potential 3):

$$U(\omega) = L(\omega) P(\omega) = \frac{G}{2\pi^2 i \omega^2 w} F_{xy} \{ \rho^0(x,y) (e^{-2\pi i w b(x,y)} - e^{-2\pi i w a(x,y)}) \} \quad (20)$$

Für praktische Berechnungen entwickeln wir die Exponentialfunktionen und erhalten unter Beachtung der Linearität von  $F_{xy}$

$$U(\omega) = \frac{G}{\pi\omega^2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(2\pi i w)^{n-1}}{n!} F_{xy} \{ \rho^0(x,y) (b^n(x,y) - a^n(x,y)) \} \quad (21)$$

mit  $G(\omega) = -2\pi i \omega U(\omega)$  erhalten wir die Transformierte der Schwerewirkung

$$G(\omega) = -2i \frac{G \omega}{\omega^2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(2\pi i w)^{n-1}}{n!} F_{xy} \{ \rho^0(x,y) (b^n(x,y) - a^n(x,y)) \} \quad (22)$$

In erster Näherung vereinfachen sich die Formeln 21) und 22) ganz erheblich

$$U(\omega) = \frac{G}{\pi\omega^2} F_{xy} \{ \rho^0(x,y) h(x,y) \} \quad (23)$$

$$G(\omega) = -2Gi \frac{\omega}{\omega^2} F_{xy} \{ \rho^0(x,y) h(x,y) \} \quad (24)$$

In gewissen Fällen der Anwendung ist eine  $z$ -abhängige Schwereverteilung nur sehr schwach bestimmt, so dass eine Fouriertransformation  $F_z: z \rightarrow w$  nicht durchführbar ist. Wir zeigen, dass bekannte Formeln für fouriertransformierte Schwerewirkungen (Parker, 1972) als Spezialisierung auf zwei Dimensionen  $(x,y)$  der allgemeinen 3-d Transformation

(Gleichungen 21) und 22) ) hervorgehen.

Zu diesem Zweck wird die Transformation der  $z$  - Variablen rückgängig gemacht.

$$F_z: z \rightarrow w; \quad F_w^{-1}: w \rightarrow z$$

dadurch wird

$$\left. \begin{aligned} \omega &= (u, v, w) \rightarrow (\mathbf{k}, z) = (u, v, z) \\ U(\mathbf{k}, z) &= F_w^{-1} \{ U(\omega) \} \\ G(\mathbf{k}, z) &= F_w^{-1} \{ G(\omega) \} \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

Angewendet auf 21) und 22) erhält man mit

$$\begin{aligned} \omega^2 &= u^2 + v^2 + w^2 = \mathbf{k}^2 + w^2 \\ U(\mathbf{k}, z) &= \frac{G}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{n!} F_w^{-1} \left\{ (2\pi i w)^{n-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + w^2} \right\} F_{xy} \{ \rho^0 (b^n - a^n) \} \quad 26) \end{aligned}$$

$$G(\mathbf{k}, z) = \frac{G}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n!} F_w^{-1} \left\{ 2\pi i \omega (2\pi i w)^{n-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + w^2} \right\} F_{xy} \{ \rho^0 (b^n - a^n) \} \quad 27)$$

Mit der bekannten Korrespondenz:

$$e^{-a|z|} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F_z} \\ \xleftarrow{F_w^{-1}} \end{array} \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi w)^2} \quad 28)$$

und geeigneten Erweiterungen wird

$$\frac{1}{\mathbf{k}^2 + w^2} = \frac{\pi}{|\mathbf{k}|} F_z \{ e^{-2\pi |\mathbf{k}| |z|} \} \quad 29)$$

Des weiteren gilt

$$\frac{d^n s(z)}{dz^n} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F_z} \\ \xleftarrow{F_w^{-1}} \end{array} \quad (2\pi i w)^n S(w) \quad 30)$$

Somit wird für  $z > 0$

$$\begin{aligned} F_w^{-1} \left\{ (2\pi i w)^{n-1} \frac{1}{k^2 + w^2} \right\} &= \frac{\pi}{|k|} F_w^{-1} \left\{ (2\pi i w)^{n-1} F_z \left\{ e^{-2\pi |k| |z|} \right\} \right\} \\ &= \frac{\pi}{|k|} \frac{d^{n-1}}{d^{n-1} z} \left( e^{-2\pi |k| |z|} \right) = \frac{\pi}{|k|} (-1)^{n-1} (2\pi |k|)^{n-1} e^{-2\pi |k| |z|} \end{aligned} \quad (31)$$

Setzen wir in 26) und 27) ein:

$$U(\mathbf{k}, z) = -\frac{G}{|k|} e^{-2\pi |k| z} \sum_{n=1}^N \frac{(2\pi |k|)^{n-1}}{n!} F_{xy} \left\{ \rho^0 (b^n - a^n) \right\} \quad (32)$$

$$G(\mathbf{k}, z) = 2\pi i (\mathbf{k}, i |k|) \frac{G}{|k|} e^{-2\pi |k| z} \sum_{n=1}^N \frac{(2\pi |k|)^{n-1}}{n!} F_{xy} \left\{ \rho^0 (b^n - a^n) \right\} \quad (33)$$

Die Formel von Parker ergibt sich als z-Komponente von 33)

$$G_z(\mathbf{k}, z) = -2\pi G e^{-2\pi |k| z} \sum_{n=1}^N \frac{(2\pi |k|)^{n-1}}{n!} F_{xy} \left\{ \rho^0 (b^n - a^n) \right\} \quad (34)$$

Mit 32) und 33) können nun das Potential als auch der Schwerevektor (alle drei Komponenten) im Spektralbereich berechnet werden.

Wie auch aus 32) und 33) ersichtlich ist, gilt für 2-d Transformationen anstelle von 4) die wichtige Beziehung:

$$G(\mathbf{k}, z) = -2\pi i (\mathbf{k}, i |k|) U(\mathbf{k}, z) \quad (35)$$

## 4.5 Schwerefeldberechnungen mittels Multipolentwicklungen

Eine weitere Möglichkeit der Schwerefeldberechnung stellt die Entwicklung des Potentials in Kugelfunktionen dar. Hier werden Beispiele vorgeführt, die kaum in der geodätischen Literatur zu finden sind. Der Begriff Multipol ist hier nicht im Sinne Meissls und entsprechend den Arbeiten von Hofmann-Wellenhof (1983) zu verstehen. Dort wird die Entwicklung nach Schichtbelegungs-Multipolen betrachtet. Hier wird darunter jedoch die normale Kugelflächen-Funktionsentwicklung, wie sie etwa in der Elektrodynamik gängig ist, verstanden.

### 4.5.1 Kugelfunktionsentwicklung des reziproken Abstandes

Da im folgenden die Reihenentwicklung des reziproken Abstandes gebraucht wird, sei sie hier kurz festgehalten. Weitere und detailliertere Darstellungen finden sich in vielen Lehrbüchern (z.B. Heiskanen/Moritz, 1967). Der reziproke Abstand schreibt sich unter Berücksichtigung des Cosinus-Satzes als:

$$\frac{1}{|r(P,Q)|} = \frac{1}{|r(P) - r'(Q)|} = \frac{1}{r_{\text{grösser}} \sqrt{1 - 2\alpha \cos \Psi + \alpha^2}}$$

Dabei ist der grössere der beiden Radien  $r_{\text{grösser}} = \max(r(P), r(Q))$  ausgeklammert worden. Dadurch wird

$$\alpha = \frac{r_{\text{kleiner}}}{r_{\text{grösser}}} \leq 1$$

Dies ist für die Konvergenz der Reihe notwendig.  $\Psi$  ist der Winkel von  $(r(P), r(Q))$ . Bekanntlich ist die Wurzelfunktion die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

$$\frac{1}{|r(P) - r'(Q)|} = \frac{1}{r_{\text{grösser}}} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l P_l(\cos \Psi)$$

Das Additionstheorem der Kugelfunktionen liefert:

$$P_l = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(r') Y_l^m(r)$$

In die obige Reihenentwicklung eingesetzt ergibt sich direkt die Darstellung in Kugelflächen-funktionen

$$\frac{1}{|\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}'(Q)|} = \frac{1}{r_{\text{grösser}}} \alpha^l \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\mathbf{r}') Y_l^m(\mathbf{r})$$

#### 4.5.2 Multipolentwicklung im Aussenraum einer Massenverteilung

Das Potential einer Massenverteilung kann nun ausserhalb eines Konvergenzradiuses als Multipolentwicklung der Dichteverteilung dargestellt werden. Dies ist die allgemein verwendete Kugelfunktionsentwicklung. Die Konvergenzkugel kann auch innerhalb von Massen liegen. Allerdings sind dann Modifikationen vorzunehmen, falls die äusseren Massen berücksichtigt werden sollen. Dazu wird ein Weg in Kap. 4.5.4 aufgezeigt. Die obige Reihenentwicklung wird im Integral

$$V(P) = \int \frac{G \rho(Q)}{|\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}'(Q)|} dv_Q$$

eingesetzt, was sofort

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_l^{m*} dv'$$

liefert.

Mit den Multipolmomenten der Dichteverteilung

$$q_l^m = \int r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_l^{m*} dv'$$

wird das Potential zu:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_l \sum_m \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m q_l^m$$

### 4.5.3 Schwerefeld einer schwach deformierten Kugel

Die hier beschriebene Vorgehensweise kann direkt auf die Berechnung des globalen Topographieeffektes angewendet werden. Ebenso kann der indirekte Effekt auf diese Weise bestimmt werden.

Wir betrachten eine schwach deformierte Kugel mit einer zunächst beliebigen Dichte. Die Deformation sei durch eine Kugelfunktionsentwicklung gegeben. Der Radius  $R$  schreibt sich also

$$R = a (1 + \varepsilon)$$

mit

$$\varepsilon = \sum \sum c_{ij} Y_i^j$$

Das Potential einer Massenverteilung schreibt sich nach dem Kapitel 3.4.2 als:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \int \rho(r') r'^l Y_l^{m*} dv'$$

Das Volumenelement lautet ausgeschrieben:

$$dv' = r'^2 dr' d\Omega'$$

Betrachtet man nur radial variierende Dichteverteilungen, so kann das Integral umgeschrieben werden:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \int_0^{R(\vartheta', \varphi')} Y_l^{m*} \int \rho(r') r'^{l+2} dr' d\Omega'$$

Eine weitere Vereinfachung stellt die Annahme einer homogenen Dichte dar. Das Integral über  $r'$  lässt sich dann umformen in:

$$\rho \frac{1}{l+3} R^{l+3} = \rho \frac{1}{l+3} a^{l+3} (1+\varepsilon)^{l+3} = \rho \frac{1}{l+3} a^{l+3} (1+(l+3)\varepsilon)$$

Damit erhält man:

$$V_{lm} = \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \rho \frac{1}{l+3} a^{l+3} \int Y_l^{m*} (1+(l+3)\varepsilon) d\Omega'$$

Der erste Term im Integral kann leicht berechnet werden, wenn man berücksichtigt, dass

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

und damit

$$\int Y_1^{m*} d\Omega' = \sqrt{4\pi} \int Y_1^{m*} Y_0^0 d\Omega' = \sqrt{4\pi} \langle Y_1^m, Y_0^0 \rangle = \sqrt{4\pi} \delta_{10} \delta_{m0}$$

Setz man noch die Reihenentwicklung für  $\epsilon$

$$\epsilon = \sum \sum c_{ij} Y_i^j$$

ein und beachtet zudem die Orthogonalitätsrelationen, so kann man für den zweiten Term im Integral schreiben:

$$\int Y_1^{m*} \cdot \epsilon d\Omega' = \sum_i \sum_{j=i} c_{ij} \langle Y_1^m, Y_i^j \rangle = \sum \sum c_{ij} \delta_{li} \delta_{mj} = c_{lm}$$

Somit ergibt sich für die partiellen Potentialterme:

$$V_{lm} = \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_1^m \rho a^{l+3} \left( \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \delta_{10} \delta_{m0} + c_{lm} \right)$$

Führt man das Potential der Kugel mit Radius  $a$

$$V_a = G \frac{4\pi \rho a^3}{3r}$$

ein, so wird das Potential:

$$V(r) = V_a \sum_1^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=-l}^l \left( \sqrt{4\pi} \delta_{10} \delta_{m0} + 3 c_{lm} \right) Y_1^m$$

Der 'Null'-Term

$$c_{00} = \int Y_0^0 \epsilon d\Omega' = 4\pi Y_0^0 \bar{\epsilon} = 4\pi Y_0^0 \frac{\bar{h}}{a}$$

und entsprechend

$$V_{00} = V_a (\sqrt{4\pi} + 3c_{00}) Y_0^0 = V_a \left(1 + 3\frac{\bar{h}}{a}\right)$$

kann vor die Summe gezogen werden. Zugleich wird das Kugelpotential  $V_a$  subtrahiert. Es ergibt sich somit ein Potentialbeitrag  $V_d$  der Kugeldeformation h:

$$V_d(\mathbf{r}) = V_a 3\frac{\bar{h}}{a} + V_a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{3}{2l+1} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m$$

Man beachte, dass die Summe  $l$  von 1 weg läuft, da im allgemeinen das Koordinatensystem nicht im 'Schwerpunkt' der Topographie, sondern im Massenmittelpunkt liegt.

#### 4.5.4 Schwerefeld innerhalb von Massenverteilungen

Hier wird ein Weg aufgezeigt, wie das Potential im Inneren einer Massenverteilung nach einem orthogonalen Basissystem entwickelt werden kann. Dabei kommt wiederum die Multipolentwicklung zur Anwendung, die bei Schwerefeldmessungen in Bohrlöchern, Tunneln und ähnlichem von Interesse ist. Das Problem besteht offensichtlich in der Lösung der Poissongleichung (siehe auch Kap. 3.1):

$$\Delta V(P) = -4\pi G \rho(P)$$

Bekanntlich löst das Integral

$$V(P) = \int \frac{G \rho(Q)}{|\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}'(Q)|} dv_Q$$

die obige Differentialgleichung. Um die Lösung in die gesuchte Reihe zu entwickeln, ist es notwendig, zwei Integrationsgebiete (ein inneres und ein äusseres) zu definieren, in denen die jeweiligen Entwicklungen konvergieren. Dazu wird die Gebietstrennung durch die Kugel mit Radius  $r = |\mathbf{r}|$  um den Koordinatenursprung vorgenommen. Der Aufpunkt  $P$  liegt also auf dieser Trennfläche, sodass für Quellpunkte  $Q$  im inneren Gebiet gilt

$$r(P) > r'(Q)$$

und für  $Q$  im äusseren Gebiet

$$r(P) < r'(Q).$$

Das Integral kann dann als Summe des Integrals über das innere und des Integrals über das äussere Gebiet geschrieben werden.

$$V(\mathbf{r}) = \int_{r' < r} \frac{G\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'_i + \int_{r' > r} \frac{G\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'_a$$

Setzt man die Reihenentwicklung für den reziproken Abstand ein, so folgt für das innere Gebiet:

$$\int \rho(r') \frac{1}{r} \sum \sum \frac{4\pi G}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_l^{m*}(r') Y_l^m(r) r'^2 dr'_i d\Omega'$$

und für das äussere Gebiet:

$$\int \rho(r') \frac{1}{r'} \sum \sum \frac{4\pi G}{2l+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^l Y_l^{m*}(r') Y_l^m(r) r'^2 dr'_a d\Omega'$$

Die Integration über die Einheitskugel kann als Entwicklung der Dichte nach den Y-Funktionen betrachtet werden. Für sie setzen wir die Multipole der Dichteverteilung:

$$\rho_{lm}(r') = \int \rho(r') Y_l^{m*} d\Omega'$$

Damit schreibt sich das gesamte Potential:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi G}{2l+1} Y_l^m \left\{ \int_0^r \frac{r'^{l+2}}{r'^{l+1}} \rho_{lm}(r') dr' + \int_r^{\infty} \frac{r'^l}{r'^{l-1}} \rho_{lm}(r') dr' \right\}$$

## 4.6 Bestimmung von Trendfunktionen im Schwerefeld

In manchen Fällen können Inversionsalgorithmen oder Interpolationsverfahren ganz wesentlich "entlastet" werden, wenn vorgängig einer Anwendung des entsprechenden Verfahren dem Beobachtungsfeld eine "Trend"-Funktion abgezogen wird. Der Trend kann in verschiedenen Koordinatensystemen z. Bsp. durch Reihenentwicklungen ausgedrückt werden. Die Parameter der Entwicklung müssen dann an die jeweilig vorliegenden Messungen angepasst werden. Zudem ist zu beachten, dass für die Trendreduktion an Schwerefeldgrößen streng genommen nur harmonische Funktionen und deren Ableitungen verwendet werden sollten. Wird etwa für das Störpotential eine Funktion  $T(x)$  angesetzt, so muss gelten

$$\Delta T = 0$$

Die Beobachtungsgleichungen für Gravimeter und Lotabweichungsbeobachtungen erhält man durch den Gradienten

$$\delta g = -\nabla T$$

Für die Schwereanomalie erhält man

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T$$

Man gewinnt die Koeffizienten einer Entwicklung z.B. durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die, falls nichtharmonische Basisfunktionen gewählt werden, mit den Harmonizitätsbedingungen erweitert werden muss. Ist die linearisierte Beobachtungsgleichung für die Koeffizienten  $x$

$$Ax - l = v$$

mit den linearisierten Bedingungen

$$Cx = 0,$$

so erhält man durch die Minimierung der Lagrangefunktion (z.B. Schmid, 1977):

$$\Omega = v^T P v + 2 k^T C x = \min.$$

die Gleichung mit den Unbekannten  $x$  und den Multiplikatoren (Korrelaten)  $k$

$$\begin{bmatrix} N & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P l \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Lösung wird

$$x = N^{-1} (E - C^T (C N^{-1} C^T)^{-1} C N^{-1}) A^T P l$$

In lokalen Gebieten können die Gradienten in kartesischen Koordinaten geschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} \gamma \eta \\ \gamma \xi \\ \delta g \end{bmatrix} = \delta g = -\nabla T$$

$\gamma$  ist der Betrag der Schwere oder der Normalschwere. Die Lotabweichungen entsprechen dann den horizontalen Gradientenkomponenten. In lokalen Gebieten wählt man also mit Vorteil ebenfalls Entwicklungen in kartesischen Koordinaten. Die Laplace-Gleichung ist als Bedingung aufzufassen, die je nach gewählter Darstellung der Trendfunktion keine bis mehrere Bedingungen für die Entwicklungskoeffizienten liefert. Wird eine harmonische Entwicklung gewählt, so ist die Laplacegleichung a priori erfüllt, sie wird also keine weiteren Bedingungen liefern. Wählt man dagegen z.B. nicht harmonisierte Polynome, so wird die Laplace-Gleichung Bedingungen an die Entwicklungskoeffizienten stellen. In kartesischen Koordinaten ist, wie man durch Ableiten sofort sieht, jedes Polynom mit höchstens Grad 1 bedingungslos als Trend anwendbar. Die Bedingungsgleichungen erhält man durch die Argumentation, dass die Laplacegleichung für beliebige Ortsvektoren erfüllt sein muss. Beispiele für harmonische Entwicklungen oder Lösungen der Laplace-Gleichungen wurden in Kapitel 2. gegeben. In kartesischen Koordinaten sind dies z.B.

$$X = A \sin qx + B \cos qx$$

$$Y = A \sin py + B \cos py$$

$$Z = B e^{-(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} z}$$

Und

$$T = \sum_p \sum_q X(q) Y(p) Z(p,q)$$

Eine weitere Möglichkeit stellen die homogenen Polynome der Form

$$P_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^n = (ax + by + cz)^n$$

dar.

$$T = \sum_n P_n$$

Dabei ist  $\mathbf{c} = (a, b, c)$  ein konstanter Koeffizienten-Vektor. Dieses Polynom soll nun die Laplacegleichung erfüllen, also:

$$\Delta P_n = n(n-1) \mathbf{c}^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^{n-2} = 0$$

Offensichtlich ist bei  $n \leq 1$  diese Bedingung a priori erfüllt. Sonst muss also gefordert werden:

$$\mathbf{c}^2 = 0$$

Die Lösung dieses Problems wurde in (Kap. 2.3.3) vorgeführt.

Beschreibungen in Kugelkoordinaten sind für grössere Gebiete geeigneter, da die Ableitungen zur Beschreibung der Messgrössen sehr einfach werden. Die Beobachtungsgleichungen werden dann

$$\begin{bmatrix} dg \\ \gamma \xi \\ \gamma \eta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/r \partial\theta \\ \partial/r \cos\theta \partial\lambda \end{bmatrix} T$$

Für die Schwereanomalie gilt:

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T$$

Offensichtlich könnten Kugelfunktionsentwicklungen bedingungslos eingesetzt werden. Anders sieht es aus, wenn Polynome in  $(r, \phi, \lambda)$  verwendet werden sollen oder entsprechend in den verkürzten Variablen  $(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda)$ . Diesen Ansatz verwenden auch Landau et al. (1988) in ihrem Programmsystem OPERA (Operationelle Geodäsie Auswertesoftware).

$$P_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^n = (a \Delta h + b \Delta \phi + c \Delta \lambda)^n$$

Dieses Polynom kann mit Hilfe des polynomischen Satzes explizite ausmultipliziert werden (z.B. Bronstein, Semendjajew, 1981):

$$(a \Delta h + b \Delta \phi + c \Delta \lambda)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} (a \Delta h)^i (b \Delta \phi)^j (c \Delta \lambda)^k$$

Die ganze Entwicklung bis zum Grade N kann man als Doppelsumme schreiben:

$$T(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{i+j+k=n} c_{ijk} R_{ijk}(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda)$$

In (geographischen) Kugelkoordinaten  $(r, \phi, \lambda)$  lautet der Laplace-Operator ausgeschrieben:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Für die Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \Delta h} ; \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \Delta \phi} ; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \Delta \lambda}$$

Die verkürzten Koordinaten beziehen sich auf einen Nullpunkt  $r_0, \phi_0, \lambda_0$ .

Der Laplace-Operator auf die Entwicklung angewendet liefert zusätzliche Bedingungen.

$$\Delta T = \sum_{n=0}^N \sum_{i+j+k=n} c_{ijk} \Delta R_{ijk} = 0$$

Die summandenweise Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned} r_0^2 \Delta R_{ijk} = & r_0^2 i(i-1) R_{i-2jk} + 2 r_0 i R_{i-1jk} \\ & + j(j-1) R_{ij-2k} - \operatorname{tg} \phi_0 j R_{ij-1k} + \frac{k(k-1)}{\cos^2 \phi_0} R_{ijk-2} \end{aligned}$$

Da  $\Delta T = 0$  für beliebige Punkte  $(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda)$  gilt, müssen die Koeffizienten der Ortsfunktion mit gleichen Exponenten verschwinden.

Als Beispiel sei die lineare Entwicklung  $n = 1$  betrachtet.

$n = 1$ :  $c_{000}, c_{100}, c_{010}, c_{001}$

sind die unbekanntenen Entwicklungskoeffizienten. Die Entwicklung enthält nach der Laplace Operation nur noch Terme  $R_{000}$ . Die Koeffizienten sind:

$$R_{000}: \quad 2 r_0 c_{100} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{010} = 0$$

Somit hat man eine Bedingungsgleichung für zwei der vier Unbekannten gewonnen. Erhöht man den Grad der Reihe, so kommen zusätzliche Gleichungen hinzu.

$n = 2$ :  $c_{000}, c_{100}, c_{010}, c_{001}, c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{011}, c_{101}$

Nach der Laplace-Operation verbleiben die Polynomterme  $R_{000}, R_{100}, R_{010}, R_{001}$ , mit den Koeffizienten:

$$R_{000}: \quad 2 r_0^2 c_{200} + 2 r_0 c_{100} + \frac{2}{\cos^2 \phi} c_{002} + 2 c_{020} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{000} = 0$$

$$R_{100}: \quad 4 r_0 c_{200} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{110} = 0$$

$$R_{010}: \quad r_0 c_{110} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{020} = 0$$

$$R_{001}: \quad 2 r_0 c_{101} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{011} = 0$$

Dies sind 4 zusätzliche Bedingungen, um die 10 Unbekannten zu lösen. Die Erhöhung des Grades erzwingt weitere Bedingungen,  $n = 3$ ; 10 Bedingungen etc.

Für den späteren Gebrauch bei der Bestimmung von Krustenparametern (siehe Kap. 4.2.2) wird hier der Fall eines linearen Trends in der Schwerestörung betrachtet (für die Lotabweichungen gilt dasselbe sinngemäss).

Wir setzen:

$$\delta g = a_0 + a_1 \Delta h + a_2 \Delta \phi + a_3 \Delta \lambda$$

Damit wird das Potential

$$T = \int \delta g \, dh = C(\Delta \phi, \Delta \lambda) + a_0 \Delta h + 1/2 a_1 \Delta h^2 + a_2 \Delta \phi \Delta h + a_3 \Delta \lambda \Delta h$$

Das Potential kann also sicher durch ein homogenes Polynom 2. Grades beschrieben werden:

$$T(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda) = \sum_{n=0}^2 \sum_{i+j+k=n} c_{ijk} R_{ijk}(\Delta h, \Delta \phi, \Delta \lambda)$$

Da jedoch nur die Schwerewerte in die Parameterbestimmung einfließen sollen, sind der Beobachtungsgleichung folgend nur vier der 10 Unbekannten bestimmbar:

$$c_{000}, c_{100}, c_{010}, c_{001}, c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{011}, c_{101}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c_{100} &= a_0, \\ c_{200} &= 1/2 a_1, \\ c_{110} &= a_2, \\ c_{101} &= a_3. \end{aligned}$$

Diese 4 Unbekannten sind jedoch nicht frei bestimmbar. Es müssen noch die obigen Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden. Bei Grad 2 waren 4 Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Da in diesem Fall etliche Parameter nicht bestimmt werden können, sind nur Bedingungsgleichungen zu betrachten, die lediglich bestimmbare Parameter und nur solche enthalten. Somit bleibt genau eine Bedingung übrig:

$$R_{100}: 4 r_0 c_{200} - \operatorname{tg} \phi_0 c_{110} = 0$$

Das Ausgleichungsproblem lautet also:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \Delta h + a_2 \Delta \phi + a_3 \Delta \lambda &= \delta g + v \\ 2 r_0 a_1 - \operatorname{tg} \phi_0 a_2 &= 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall kann durch die Elimination einer Unbekannten die Bedingung direkt in die einfache Ausgleichung eingearbeitet werden. Andernfalls müsste die Parameterbestimmung über die Hinzunahme von Korrelaten erfolgen (siehe oben).

$$a_0 + a_2 \left( \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2 r_0} \Delta h + \Delta \phi \right) + a_3 \Delta \lambda = \delta g + v$$

Der vierte Koeffizient kann nach der Ausgleichung durch

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2 r_0} a_2$$

bestimmt werden.  $a_1$  entspricht dem Freiluft-Gradienten. Werden in  $\delta g$  reduzierte Werte eingeführt, so entspricht  $a_1$  dem anomalen Gradienten.



---

## **Teil II**

# **Praktische Berechnung des Geoides**

### **Störgrößen des Normal-Schwerefeldes**

#### **Gravimetrisches Geoid**

#### **Zum Schluss**

#### **Literatur**

## 5 Störgrößen des Normal-Schwerefeldes

### 5.1 Zeitliche Änderungen des Schwerefeldes

In diesem Abschnitt sollen einige zeitlich variable Einflüsse auf das Schwerefeld beschrieben werden. Dabei soll diese Variation in bezug auf ein erdfestes Koordinatensystem betrachtet werden. Es ist klar, dass das ganze, äusserst komplexe Gefüge von Wechselwirkungen und Systemzusammenhängen, in die der Problemkreis Erdschwerefeld eingebettet ist, hier nur punktuell und rudimentär behandelt werden kann. An und für sich wird das eigentliche Erdschwerefeld nur durch die Massenverteilung der Erde und durch die Erdbewegung bestimmt. Es ist aber offensichtlich, dass Rückkopplungen zwischen Schwerefeld, Massenverteilung der Erde, Erdbewegung und externem Schwerefeld bestehen. Dabei ist zu beachten, dass das externe, nicht von der Erde erzeugte Gravitationsfeld, sowohl die Erdbewegung als auch die Massenverteilung wesentlich beeinflusst (z.B. Gezeiteneffekte in Ozeanen). Zeitliche Änderungen des Schwerefeldes beinhalten Änderungen des Potentials, d.h., streng genommen würden (nicht reduzierte) zeitliche Effekte eine Neuformulierung des Randwertproblems erfordern (z.B. Heck, 1986, Lindlohr, 1987).

#### 5.1.1 Gezeiten

Die Gezeiten erzeugen den grössten Betrag der hier besprochenen zeitlich ändernden Schwereeffekte. In unseren Breiten übersteigt der Effekt die  $300\mu\text{gal}$  jedoch nicht. Da in unseren Betrachtungen die Gezeiten nicht in Erscheinung treten, oder vielmehr stillschweigend als eliminiert angenommen werden, wird hier auch nicht weiter darauf eingegangen. Die Gezeitenwirkungen werden ohnehin standardmässig an den Schweremessungen (Klingelé, 1980a) in Abzug gebracht. Dabei geht man von der Gleichung für das Gezeitenpotential aus, das man als Störpotential  $S$  des Erdgravitationsfeldes  $U$  in folgender Weise schreiben kann:

$$W = U(x) + S(t,x) = U + P(t,x) + M(t,x) + H(t,x)$$

- Dabei ist
- P direkter Effekt der Gestirne (bewirkt die Gleichgewichtsflut)
  - M Änderung des Potentials durch Massenumlagerungen (Erdverformung)
  - H Änderung des Potentials wegen der Ortsveränderung des Messpunktes (nur die Höhenkomponente ist hier relevant)

Die Schwereeffekte sind dann

$$\mathbf{g}_{\text{Tide}} = -\nabla S$$

Die einzelnen Potentialanteile sind nicht unabhängig voneinander. Vielmehr sind  $M$  und  $H$  über elastische Modelle der Erde mit dem eigentlichen Störpotential  $P$  verknüpft. Weiterreichende Erklärungen findet man bei Melchior (1978) und bei Wahr (1982), der auch die elliptische Erdform mitbehandelt. Die lineare und sphärische Approximation liefert für die radiale und die horizontale Komponente der Gezeitenbeschleunigung:

$$\begin{aligned} g_R &= (1 - 3/2 k + h) g_R^0 \\ g_H &= (1 + k - h) g_H^0 \end{aligned}$$

$k$  und  $h$  sind Konstanten, die durch die mechanischen (elastischen) Eigenschaften des Erdkörpers gegeben sind. Sie können aus Erdmodellen berechnet oder aus geodätischen Beobachtungen gewonnen werden. Z.B. erhält man aus der Beobachtung von Satellitenbahnen  $k$  und aus VLBI-Beobachtungen  $h$ . Groten (1982) gibt:

$$\begin{aligned} k &= 0.3 \\ h &= 0.055 \end{aligned}$$

$g_R^0$ ,  $g_H^0$  sind die direkten Gravitationseffekte (Gleichgewichtsflut). Sie werden aus der Ableitung des Störpotentials (Summe der (Newtonschen) Potentiale der Himmelskörper) berechnet:

$$\mathbf{g} = -\nabla P$$

Sie hängen nur vom Aufpunkt und von der Stellung der Himmelskörper (im wesentlichen Erde, Mond und Sonne) ab.

### 5.1.2 Rotationsschwankungen

Wir besprechen hier lediglich den Effekt einer Änderung in der Winkelgeschwindigkeit der Erde. Sie wird meist durch die Schwankung von UT gemessen. Rotationsschwankungen machen sich direkt im Zentrifugalpotential bemerkbar.

$$Z = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad \text{und} \quad \nabla Z = \omega^2 \mathbf{r}$$

Erfährt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  eine Änderung im Verhältnis  $1+\kappa$

$$1 + \kappa = \frac{\omega}{\omega_0} \quad ,$$

so schlägt sich dies im Zentrifugalpotential und in der Beschleunigung quadratisch nieder:

$$(1+\kappa)^2 = \frac{Z}{Z_0} = \frac{|\nabla Z|}{|\nabla Z_0|}$$

Als Fehlerterme in Funktion der Tageslängenschwankungen (Length of day: LoD) ausgedrückt, erhalten wir:

$$\frac{\delta |\nabla Z_0|}{|\nabla Z_0|} \approx 2\kappa = 2 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \approx -2 \frac{\delta\text{LoD}}{\text{LoD}}$$

Also: Eine Änderung von + 0.1 sec im LoD ( $\kappa \approx 1.15$  ppm) bewirkt eine Änderung der Zentrifugalbeschleunigung von - 2.3 ppm.

Um die Wirkung auf die Gesamtschwere zu bestimmen, berechnen wir näherungsweise den Betrag von  $g$ , wobei  $g_0$  der gravitative Anteil sei.  $\theta$  ist die Poldistanz.

$$|g| \approx g_0 \left( 1 - \frac{|\nabla Z|}{g_0} \sin \theta \right)$$

Daraus erhält man

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx - \frac{\delta |\nabla Z|}{|\nabla Z|} \frac{|\nabla Z|}{|g|} \sin \theta = -2\kappa \frac{|\nabla Z|}{|g|} \sin \theta$$

Es ist

$$|\nabla Z| = |\nabla Z(\theta=90^\circ)| \sin \theta$$

Für das Verhältnis der Zentrifugalbeschleunigung am Äquator und den gravitativen Anteil findet man etwa:

$$\frac{|\nabla Z(\theta=90^\circ)|}{|g_0|} \approx 3.3 \cdot 10^{-3}$$

und da man  $|g| \approx |g_0|$  setzen kann, wird:

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx -6.6 \cdot 10^{-3} \cdot \sin^2 \theta \cdot \kappa$$

Saisonale Schwankungen (Verspätung im Frühling/Sommer; Verfrühung im Herbst/Winter) betragen ca.  $\pm 0.03$  sec oder dementsprechend  $-/+ 2.25$   $\mu\text{gal}$  in der Schwere am Äquator ( $\approx \pm 1.2$   $\mu\text{gal}$  in unseren Breiten).

Schwankungen im Bereich von 1 msec pro Jahr (nach Abzug periodischer Gezeiteneffekte) sind durchaus möglich (Dickey et al., 1988). Dies ergäbe ein  $\kappa \approx 10^{-8}$  pro Jahr, was in unseren Breiten einer Schwankung in der Schwere von  $-0.04$   $\mu\text{gal}$  entspräche. McCarthy et al. (1986) geben Schwankungen über die letzten 100 Jahre im Bereich von 7 msec an. Dies würde 0.28  $\mu\text{gal}$  in 100 Jahren entsprechen.

Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit können durch zwei Faktoren hervorgerufen werden. Einerseits können Impulsübertragungen stattfinden oder andere Energieaustauschmechanismen auftreten. Zu ihnen sind auch dissipative Prozesse zu rechnen, wie etwa Effekte der Gezeitenreibung. Interessant sind weiter auch die Zusammenhänge mit dem Drall der Atmosphäre (Rosen et al., 1988) und der Physik der Sonne (Djurovic et al., 1988) sowie geophysikalische Effekte, wie etwa Kern-Mantel Kopplungen (Melchior, 1986; Paulus et al., 1986; Wahr, 1988). Andererseits bewirken Änderungen der Trägheitsmomente ebenfalls Drehgeschwindigkeitsschwankungen. Diese Variationen können durch Massenumlagerungen hervorgerufen werden. Erfährt das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse etwa eine Änderung  $\delta C$ , so erhält man auf Grund des Drallerhaltungssatzes

$$C_0 \omega_0 = C \omega = (C_0 + \delta C) \omega$$

folgende Geschwindigkeitsänderungen

$$\kappa = - \frac{\delta C}{C_0}$$

Würde sich also der Erdradius ändern, müsste eine Änderung im Trägheitsmoment  $C$  sichtbar werden. Aus der Kenntnis der Proportionalität

$$\frac{C}{r^2} = \text{const}$$

erhält man folgende Geschwindigkeitsänderung

$$\kappa = - \frac{\delta C}{C_0} = - 2 \frac{\delta r}{r_0}$$

### 5.1.3 Änderungen der Drehachse

Neben der Rotationsgeschwindigkeit der Erde wird auch die Lage der Drehachse als weiterer Rotationsparameter benötigt. Sie wird durch 2 Parameter  $x_p$  und  $y_p$  beschrieben. Die Parameter geben die Grösse der Ablage des momentanen Poles von einem mittleren Pol (CIO) an. Die maximale Ablage beträgt rund  $0.5'' \approx 2.4 \cdot 10^{-6}$  rad. Eine derartige Verkippung bewirkt eine Änderung des Drehradius (Abstand Punkt- Drehachse), was wiederum eine Änderung im Zentrifugalterm des Schwerefeldes verursacht. Der Effekt soll nun abgeschätzt werden. Dazu gehen wir von kleinen Verkippungen aus, so dass wir schreiben können:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \Omega) \mathbf{x}_0$$

$\Omega$  ist offensichtlich die Polbewegungsmatrix

$\mathbf{x}_0$  Aufpunkt im Referenzkoordinatensystem

$\mathbf{x}$  Aufpunkt im Koordinatensystem bezüglich der momentanen Drehachse

Für kleine Drehungen schreibt sich  $\Omega$  bekanntlich:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +x_p \\ 0 & 0 & -y_p \\ -x_p & +y_p & 0 \end{bmatrix}$$

Mit obigen gebräuchlichen Vorzeichen beziehen sich  $x_p$  und  $y_p$  auf ein Linkssystem.

Für den Achsabstand erhält man:

$$r = \left( x_0^2 + y_0^2 - 2 z_0 (x_p x_0 - y_p y_0) + z_0^2 (x_p^2 + y_p^2) \right)^{1/2}$$

Durch eine Näherung erhalten wir folgende breitenabhängige Formel (Breite  $\phi$ ):

$$r = r_0 \left( 1 - \theta_p \cos(\lambda_0 - \lambda_p) \operatorname{tg} \phi \right)$$

Für die Polgenden ist zu setzen:

$$r = z_0 \theta_p$$

Für das Verhältnis  $\kappa$  erhält man näherungsweise:

$$\kappa \approx -\frac{1}{2} \theta_p \cos(\lambda_0 - \lambda_p) \operatorname{tg} \phi$$

Der Einfluss auf die Schwere wird somit:

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx 1.65 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 2\phi \cos(\lambda_0 - \lambda_p) \cdot \theta_p$$

Bei einer maximalen Verkippung von  $\theta_{\max} \approx 2.4 \cdot 10^{-6}$  rad und einem Aufpunkt, der sich im Kippmeridian befindet, reduziert sich die Formel auf:

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx 4 \cdot 10^{-9} \cdot \sin 2\phi$$

Bei mittleren Breiten ergibt dies eine Änderung von ca.  $4 \cdot 10^{-9}$  in der Schwere ( $\approx 4 \mu\text{gal}$ ) und ca.  $8 \cdot 10^{-9}$  im Potential. Am Pol muss eine etwas andere Näherung berücksichtigt werden:

$$r = z_0 \theta_p$$

und damit

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx -\frac{|\nabla Z(\theta=90^\circ)|}{|g|} \theta_p \sin \theta \approx -3.3 \cdot 10^{-3} \theta_p \cdot \theta$$

Am geographischen Pol selbst erhalte man einen fast verschwindenden Effekt von:

$$\frac{\delta |g|}{|g|} \approx -2 \cdot 10^{-14}$$

### 5.1.4 Massenumlagerungen

#### Beispiel: Wirkung der Polkappenabschmelzung auf die Erdrotation

Wir wollen hier eine rudimentäre Abschätzung der entstehenden Effekte vornehmen. Dabei gehen wir von einer einfachen Konstellation aus, wonach die abschmelzbaren Eismassen der Dichte  $\rho_{\text{Eis}}$  in einem Gebiete mit Radius  $b = \beta r_0$  und Dicke  $H$  um beide Pole gelagert seien. Die gesamte abschmelzbare Masse beträgt somit:

$$M_{\text{Eis}} = 2 \pi \rho_{\text{Eis}} b^2 H$$

und die entsprechenden Trägheitsmomente bezüglich der z- und der x- Achse werden

$$C_{\text{Eis}} = \frac{1}{2} b^2 M_{\text{Eis}} \quad \text{und} \quad A_{\text{Eis}} \approx r_0^2 M_{\text{Eis}}$$

Falls nun diese Eismasse abschmilzt, wird sie sich praktisch über die ganze Erdoberfläche ausbreiten und eine Wasserschale der Dicke  $D$  bilden. Die Masse wird also sein:

$$M_{\text{Eis}} = M_{\text{Was}} = M = 4 \pi \rho_{\text{Was}} r_0^2 D$$

und das entsprechende Trägheitsmoment:

$$C_{\text{Was}} = \frac{2}{3} r_0^2 M_{\text{Was}}$$

Das Trägheitsmoment der Erde (als Vollkugel) mit der homogenen Dichte  $\rho_{\text{Erde}} \approx 5.5 \text{ gr/cm}^3$  wird:

$$C = \frac{2}{5} r_0^2 M_{\text{Erde}}$$

Für das Verhältnis  $\kappa$  erhalten wir:

$$\kappa = -\frac{\delta C}{C} = \frac{C_{\text{Eis}} - C_{\text{Was}}}{C} = -\frac{5}{3} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{b^2}{r_0^2} \right) \frac{M}{M_{\text{Erde}}}$$

Vernachlässigen wir den quadratischen Term in  $b/r_0$ , so finden wir:

$$\kappa \approx -5 \frac{\rho_{\text{Was}}}{\rho_{\text{Erde}}} \frac{D}{r_0} \approx -\frac{D}{r_0}$$

Es wurden schon 0.5 m bis 2 m Wasserstandserhöhung (entspricht hier der Schalendicke  $D$ ) für die kommenden 100 Jahre prognostiziert oder  $\kappa \approx 0.08$  bis  $0.32$  ppm. Dies würde also einer Änderung im Zentrifugalschwerefeld von  $0.2$  ppm bis  $0.6$  ppm pro 100 J entsprechen. Die Winkelgeschwindigkeit würde also etwa um  $0.3$  ppm verringert oder die Tageslänge um ca 30msec in 100 Jahren verlängert. Dies wiederum hätte eine Zunahme der Schwere in mittleren Breiten von  $\approx 2.3$   $\mu\text{gal}$  in 100 Jahren zur Folge. Derartige Änderungen müssten relativ einfach zu messen sein. Pâquet et al.(1988) zeigen, dass mit GPS gleiche Genauigkeitsklassen zur Bestimmung der Erdrotationsparameter wie mit VLBI erreicht werden können. Danach sind  $0.15$  msec ( $\Delta\text{UT}$ ) nach 6 Stunden Beobachtung detektierbar. Bestimmt man einen linearen Trend in den von McCarthy et al. (1986) gegebenen Daten, so bleibt der Wert mit  $2.5$  msec/100 Jahre deutlich unter dem obigen Wert von  $30$  msec/100 Jahre. Eine gegenwärtige säkulare Abnahme der Winkelgeschwindigkeit beziffert Melchior (1986) mit  $d\omega/dt = -4.8 \cdot 10^{-22}$  rad·s<sup>-2</sup>, was einer Verlängerung des LoD von  $1.73$  msec in 100 Jahren entspricht ( $7 \cdot 10^{-11}$  Schwereänderung oder  $0.07$   $\mu\text{gal}$ ).

Zur Abschätzung der Änderung des Gravitationspotentials gehen wir vom Hauptterm der Reihenentwicklung aus:

$$J_2 = \frac{C - A}{M_{\text{Erde}} r_0^2}$$

Die Änderung wird:

$$\frac{\delta J_2}{J_2} = \frac{\delta C - \delta A}{J_2 M_{\text{Erde}} r_0^2} - 2 \frac{\delta r_0}{r_0}$$

Mit den Änderungen

$$\begin{aligned} \delta C &= C_{\text{Was}} - C_{\text{Eis}} \\ \delta A &= A_{\text{Was}} - A_{\text{Eis}} = C_{\text{Was}} - A_{\text{Eis}} \\ \delta C - \delta A &= A_{\text{Eis}} - C_{\text{Eis}} \\ \delta r_0 &= D \end{aligned}$$

und der Dichte für die Erde  $\approx 5.5 \text{ gr/cm}^3$  erhält man

$$\frac{\delta J_2}{J_2} \approx \frac{3}{5} \frac{D}{r_0} \approx 550 \frac{D}{r_0} \approx 163 \text{ ppm}$$

Die Änderung würde mit 100-200 ppm bereits in der vierten Stelle des  $J_2$ -Terms spürbar werden.

### 5.1.5 Zeitliche Änderung der Gravitationskonstanten

Es ist interessant zu bemerken, dass die Gravitationskonstante als eigentliche Fundamentalgrösse erst in den Arbeiten von Laplace und Poisson auftaucht (Will, 1987). Erst gegen 1890 wurde auch die quantitative Bestimmung von  $G$  angestrebt. Ein oft diskutierter Umstand betrifft die zeitliche Konstanz der Gravitationskonstanten. Dirac (1937) hat als einer der ersten dieses Problem aufgeworfen. Als Resultat seiner Hypothese, wonach  $G$  im Abnehmen sei, schätzt Dirac auf Grund allgemein relativistischer Überlegungen eine relative jährliche Änderung von

$$\frac{\delta G}{G} \approx -10^{-10} \text{ bis } -10^{-9} \text{ pro Jahr}$$

Jordan (1966) versucht auf Grund dieser Dirac'schen Hypothesen die tektonische Erdgeschichte zu rekonstruieren. Die Expansion der Erde, die infolge der Gravitationsabnahme eintreten muss, wird dort für die tektonischen Bewegungen, insbesondere auch für die Kontinentalverschiebung verantwortlich gemacht. Dieser, in gewisser Hinsicht im Gegensatz zur Wegener'schen Hypothese stehende Ansatz wurde nie im grossen Rahmen anerkannt und ist den heutigen Erkenntnissen entsprechend, mindestens was die geologisch-tektonischen Folgerungen betrifft, ganz zu verwerfen. Z.Bsp. fand Ward (1963) auf Grund geologischer Untersuchungen keine signifikanten Unterschiede des heutigen Erdradius zu jenem im Devon, Perm und Trias. Nach Brans, Dicke (1961) wird eine obere Grenze für die zeitliche Variation im Zusammenhang mit dem Alter des Universums gegeben. Sie finden:

$$-\frac{0.1}{\text{Alter}} > \frac{\delta G}{G} > -\frac{10}{\text{Alter}}$$

$$\frac{\delta G}{G} \approx -10^{-11} \text{ bis } -10^{-10} \text{ pro Jahr}$$

Neuere Resultate aus Beobachtungen der Planetenbahnen und aus Radarmessungen auf Raumsonden, insbesondere der Viking Sonde (Shapiro et al., 1976, Reasenber, 1983)

---

ergeben Werte, die ein bis zwei Größenordnungen unter dem Dirac'schen Wert liegen:

$$\frac{\delta G}{G} \approx -0.6 \text{ bis } -3 \cdot 10^{-10} \text{ pro Jahr}$$

Die hier aufgezeigten Effekte sind offensichtlich für eine gegenwärtige Geoidbestimmung belanglos. Die relativen Änderungen von  $G$  bewirken direkt einen Höhenmassstab der Geoid-undulation, da in allen Massenwirkungsformeln  $G$  als konstanter Faktor erscheint. 1 ppm Effekt wäre also nach ca. 10000 Jahren erreicht. In der Schwere wäre dann gerade eine Änderung im Bereich eines mgal erreicht.

## 5.2 Dichteinhomogenitäten

Aus der Vorgabe der Monopol-Quellverteilung (z.B. Massenverteilung) sollen das Potential und dessen Gradientenfeld bestimmt werden. Dieses Problem ist direkt lösbar, indem die expliziten Formeln für Massenkörpereffekte (z.B. Mader (1951)) integriert werden. Helmert (1880) liefert mit einer kegelförmigen Insel ein Beispiel dafür. Die Anwendung auf komplizierte Körper war jedoch lange Zeit nicht möglich, einerseits weil die geschlossene Lösung nur für ganz wenige einfache Körper möglich ist, andererseits die Numerische Integration oder die Zerlegung komplizierter Strukturen in einfachere, integrierbare Formen einen grossen Rechenaufwand bedeuten (Brillouin 1908, Niethammer 1925). Die für geodätische Probleme in gebirgigen Gegenden wichtigen topographischen Masseneffekte untersucht z.B. Elmiger (1969) mit der Quadermethode. Auch für geophysikalische Modellrechnungen wird diese Methode oft angewandt (Jung, Nagy 1966). Rechentechnisch verfeinerte Methoden wurden etwa von Talwani (Zerlegung der Störkörper in polyedrisch begrenzte Schichten), oder Götze (Oberflächenintegrale) ausgearbeitet. Zur Berechnung von Lotabweichungskomponenten wird am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie die Quadermethode angewendet (Elmiger (1969), Gurtner(1978)). Die Schweremessungen werden mit der Quadermethode oder der Talwanischen Methode reduziert (Klingelé (1980), Kissling (1982), Schwendener (1984)). In letzter Zeit wurden auch spezielle numerische Verfahren wie die FFT (Sideris, 1984, Vassiliou, 1985) angewendet. Die direkte Berechnung der Schwereeffekte von Störkörpern kann zur Glättung von zu interpolierenden Daten verwendet werden. Dies wird z.B oft mit isostatischen Modellen oder entsprechenden Mohomodellen durchgeführt (Gurtner,1978, Hanafi, 1987, und viele andere). Zur Reduktion von Schweredaten werden z.T. geschichtete Modelle mit tiefenabhängigen Dichten angesetzt, wie z.B. für die Po-Sedimente (Schwendener, 1984) oder für die Molasse (Klingelé, 1972).

Das Umkehrproblem, die Bestimmung der Massenverteilung aus gegebenem Schwerfeld ist etliches schwieriger zu lösen. Im Prinzip existieren unendlich viele Lösungen dieses Problems. Das Problem ist durch die fehlende Eindeutigkeit der Lösung schlecht gestellt. Dies heisst jedoch nicht, dass keine Lösungen gefunden werden können. Durch gewisse Annahmen und gegebene geophysikalische Randbedingungen kann der Lösungsraum wesentlich eingeschränkt werden. Auch bei Ausgleichsalgorithmen müssen gewisse Voraussetzungen über das Modell gemacht werden (Tscherning, 1989). Oftmals werden zur Bestimmung der Dichteverteilung Annahmen über einen funktionalen Dichteverlauf gemacht, etwa linear (Agarwal,1971), quadratisch (Rao, 1986) oder exponentiell (Cordell,1973; Granser, 1987) tiefenabhängige Dichtewerte. Zur Berechnung von geschichteten Massenverteilungen wird oft die FFT, basierend auf der Formel von Parker (1973) eingesetzt. Die Lösung zur Bestimmung von isolierten Störkörpern kann durch die Modellierung durch beliebig orientierbare Prismen gefunden werden (Wirth, 1985; Bürki, 1988).

### 5.2.1 Mathematisches Modell zur Dichtebestimmung

Hier soll eine Möglichkeit zur Bestimmung von Krustenparametern vorgestellt werden. Vor allem geht es um die Dichtewerte der Kruste und um den Dichtekontrast an der Krusten-Mantelgrenze. Es werden dazu die Informationen über Topokorrekturen und über die Schwereeffekte der Moho-Diskontinuität sowie des Ivreakörpers verwendet. Führt man diese Schwereeffekte direkt als Messgrößen ein, so kann die Beobachtungsgleichung einfach linearisiert werden, oder vielmehr ist sie in dieser Formulierung bereits linear in der Dichte. Die Schwereeffekte wurden mit Programmen von Wirth, Marti, Geiger und Santini gerechnet. Dasselbe Verfahren wurde auf einem kleinen Gebiet im Testnetz 'Turtmann' im Kanton Wallis angewendet (Bernauer, Geiger, 1986). Wirth hat für eine Seminararbeit (Oettiker, 1988) diese Methode ebenfalls zur Bestimmung des Dichtekontrastes an der Krusten-Mantelgrenze eingesetzt. Er verwendet jedoch als Beobachtungsgrößen die Lotabweichungen, die einen Dichtekontrast von  $0.40 \text{ g/cm}^3$  an der Moho und die Referenztiefe (bezüglich der der Mohoeffekt berechnet wird) von 34 km liefern. Als Näherungswert für den Dichtekontrast setzen wir  $0.43 \text{ g/cm}^3$  ein. In dem hier vorliegenden Ansatz wird zusätzlich eine horizontal variierende Dichte-Funktion eingeführt.

Die Beobachtungsgleichung können wir schreiben als:

$$\begin{aligned} g_{\text{redu}} &= g_{\text{mess}} - g_{\text{norm}}(h) + g_{\text{Topo}} - g_{\text{B}} - g_{\text{Moho}} - g_{\text{Stör}} - g_{\text{Trend}} \\ &= g_{\text{frei}} + T - B - M - I - C \\ &= g_{\text{Boug}} - M - I - C \end{aligned}$$

$g_{\text{norm}}(h)$  = Normalschwere in der Höhe  $h$  des Aufpunktes (ist auch breitenabhängig)

T = Topoeffekt

B = Bouguer-Effekt ( $\sim 2\pi G \rho h$ )

M = Mohoeffekt (relativ zur Referenztiefe)

I = Ivreaeffekt (als Störeffekt)

C = Trend (Konstanter Offset + höhere Terme)

Zur Schätzung von Krustenparametern wird nun folgende Beobachtungsgleichung verwendet:

$$g_{\text{redu}} = g_{\text{frei}} + T - B - M - I - C$$

Diese Beziehung ist a priori linear, da Schwerewirkungen linear in der Dichte sind

$$g = G \int \frac{\rho}{r^2} dv = G \rho I_V$$

und damit

$$\begin{aligned} g &= g^0 + G I_V \delta\rho \\ &= g^0 + \frac{g^0}{\rho^0} \delta\rho \end{aligned}$$

D.h. alle Schwereeffekte, die auf derartige Integrale zurückzuführen sind, können in der Dichte einfach linearisiert werden. Dies trifft für den Topographieeffekt, den Mohoeffekt und auch für den Ivreaeffekt zu.

Zudem ist die Mohowirkung  $M$  linear in der Referenztiefe, und der Bouguereffekt ist linear in der Dichte. Damit erhält man die linearisierte Beobachtungsgleichung für die reduzierten Schwerewerte. Dabei ist zu bemerken, dass die Linearisierung, wie oben gezeigt wurde, streng gilt. Für den Trend wird ein lineares homogenes Polynom in der Lage und in der Höhe angesetzt.

$$a_0 + a_1 \Delta h + a_2 \Delta\phi + a_3 \Delta\lambda = C$$

Nach Kapitel 4.6 muss dann noch eine Bedingungsgleichung (Harmonizität des Potentials)

$$2 r_0 a_1 - \operatorname{tg} \phi_0 a_2 = 0$$

hinzugefügt werden, die jedoch durch die Elimination einer Unbekannten 'aufgefangen' wird.

$$a_0 + a_2 \left( \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2 r_0} \Delta h + \Delta\phi \right) + a_3 \Delta\lambda = C$$

Der vierte Trend-Koeffizient kann nach der Ausgleichung durch

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2 r_0} a_2$$

bestimmt werden.  $a_1$  entspricht dem anomalen Freiluft-Gradienten. Es zeigt sich jedoch, dass der anomale Freiluft-Gradient sehr stark mit der Dichte der Topographie und dem Dichtekontrast an der Moho gekoppelt ist. Damit ergibt sich eine sehr schlechte Schätzung sowohl für den Gradienten als auch für den Dichtekontrast. Es ist daher angezeigt, den Trendansatz auf

$$a_0 + a_2 \Delta\phi + a_3 \Delta\lambda = C$$

zu reduzieren. Dies bedeutet dann, dass für die Koeffizienten  $a_i$  keine Bedingungsgleichungen mehr auftreten (siehe Kap. 4.6).

Damit erhält man folgende Beobachtungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{\text{redu}} = & \underbrace{\mathbf{g}_{\text{frei}} + \mathbf{T}^0 - \mathbf{B}^0 - \mathbf{M}^0 - \mathbf{I}^0}_{\mathbf{g}_{\text{redu}}^0} + \mathbf{T}^0 \frac{\rho_T - \rho_T^0}{\rho_T^0} - 2\pi G (\rho_T - \rho_T^0) h \\
 & - \mathbf{M}^0 \frac{\rho_M - \rho_M^0}{\rho_M^0} - 2\pi G \rho_M^0 (H - H^0) \\
 & - \mathbf{I}^0 \frac{\rho_I - \rho_I^0}{\rho_I^0} \\
 & - a_0 - a_2 \left( \left\{ \frac{\text{tg } \phi_0}{2 r_0} \Delta h \right\} + \Delta \phi \right) - a_3 \Delta \lambda
 \end{aligned}$$

Die geschwungenen Klammern deuten an, dass dieser Term für den Höhengradienten entfallen kann.

$$\mathbf{g}_{\text{redu}} = -\mathbf{v} = \mathbf{g}_{\text{redu}}^0 - \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Mit  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min.$  erhält man

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g}_{\text{redu}}^0$$

Der Unbekanntenvektor  $\mathbf{x}$  kann die Größen

- $\Delta H$  Korrektur der Referenztiefe (34 km)
- $\Delta \rho_M$  Korrektur am Dichtekontrast an der Krusten-Mantelgrenze ( $0.43 \text{ g/cm}^3$ )
- $\Delta \rho_T$  Korrektur an der Dichte der Topographie als Funktion geschätzt ( $2.67 \text{ g/cm}^3$ )
- $\Delta \rho_I$  Korrektur an der Dichte des Ivrea-Modells
- $a_i$  Trendparameter (hier lineares Polynom)

enthalten.

Die Koeffizienten in der Systemmatrix sind dann für die entsprechenden Parameter:

$$\Delta H : 2\pi G \rho_M^0$$

$$\Delta \rho_M : \frac{M^0}{\rho_M}$$

$$\Delta \rho_T : - \frac{T^0}{\rho_T} + 2\pi G h$$

$$\Delta \rho_I : \frac{I^0}{\rho_I}$$

$$a_2, a_3: \quad \Delta \phi, \Delta \lambda$$

Der konstante Term  $a_0$  der Trend-Funktion kann nicht von der Wirkung von  $\Delta H$  unterschieden werden. Für diese beiden Terme darf daher nur ein Parameter geschätzt werden. Die Dichte der Topographie kann nun nach Polynomen (in der Lage) entwickelt werden, deren erste Terme im folgenden geschätzt werden sollen.

Die Schreibweise entspricht der in Kap. 4.6 verwendeten:

$$\Delta \rho(x,y) = \sum_{n=0}^N (ax + by)^n = \sum_{n=0}^N \sum_{i+j=n} c_{ij} x^i y^j$$

mit den zu schätzenden Parametern  $c$

$$c_{ij} = \binom{n}{i,j} a^i b^j$$

Die Koeffizienten der Topodichte werden dann mit

$$K = - \frac{T^0}{\rho_T} + 2\pi G h$$

$$K, K_x, K_y, K_x^2, K_{xy}, K_y^2, \dots, K_y^n$$

Es ist klar, dass der Ansatz einer Konstanten für den Koeffizienten der Höhe (Bouguerkoefizient) nur näherungsweise zutreffen kann, da die Dichte gerade nicht konstant

angenommen wird. Um den Einfluss der nicht konstanten Dichte auf die Bouguerkorrektur abzuschätzen, wird der Effekt eines Zylinders mit variierender Dichte bestimmt. Die Dichte  $\rho$  wird in einen variierenden Teil  $\delta\rho$  und in einen konstanten Teil  $\rho$  gespalten. Wir interessieren uns nur für die  $z$ -Komponente von  $g$ . Dies erlaubt eine einfache Integration nach  $z$  entsprechend der bekannten Formel

$$g_z = - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{G\rho}{l} dv$$

Wir setzen  $\rho = \rho + \delta\rho$ . Dies kann sofort nach  $z$  integriert werden

$$\begin{aligned} g_z &= - G \int_1^{\rho} \int_{z=0}^{z=h} r d\varphi dr = - 2\pi G \rho \int_1^r \int_{z=0}^{z=h} dr \\ &\quad - G \int_1^{\delta\rho} \int_{z=0}^{z=h} r d\varphi dr \end{aligned}$$

Da  $\delta\rho$  homogen vorausgesetzt wird, muss gelten

$$\int_0^{2\pi} \delta\rho d\varphi = 0$$

und mithin die bekannte Formel

$$g_z(r) \approx - 2\pi G \rho \int \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} - 1 \right) dr = 2\pi G \rho \left( r + h - \sqrt{r^2 + h^2} \right)$$

die mit  $r \rightarrow \infty$ ,  $g_r(\infty) \rightarrow -2\pi G \rho h$

den Bouguerschen Platteneffekt liefert.

Somit lässt sich das Verhältnis bilden:

$$\alpha = \frac{g(r)}{g_\infty} = 1 + \frac{r}{h} - \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{h} = 1 + \kappa - \sqrt{1 + \kappa^2} ; \quad \kappa = \frac{r}{h}$$

$$\text{oder } \kappa = \frac{\alpha(2 - \alpha)}{2(1 - \alpha)}$$

Die 'Halbwertsbreite' ergibt sich als

$$r_{1/2} = 3/4 h$$

90% des Bouguereffektes werden also bereits bei Berücksichtigung eines Zylinders mit Radius

$$r_{90\%} \approx 5 h$$

erreicht. Auch im Alpengebiet bleibt  $r_{90\%} < 15 \text{ km}$ .

Da Polynome von relativ tiefem Grad zur Dichtebeschreibung angesetzt werden, liegt

$$r_{90\%} < \lambda_{\text{Polynom}},$$

so dass der konstante Koeffizient gerechtfertigt scheint.

### 5.2.2 Schätzung variabler Dichten und Bestimmung von Moho-Parametern

Im folgenden sind einige Ergebnisse beschrieben, die durch eine Parameterbestimmung der obigen Art bestimmt wurden. Als Näherungswerte wurden

$H^0$	Referenztiefe	34 km
$\rho_M^0$	Dichtekontrast an der Krusten-Mantelgrenze	0.43 g/cm <sup>3</sup>
$\rho_T^0$	Dichte der Topographie	2.67 g/cm <sup>3</sup>
$\rho_I^0$	Dichte des Ivrea-Modells	3.1 g/cm <sup>3</sup>

eingetragen.

Die Schwerewirkungen wurden mit diesen Dichten an jedem Messpunkt berechnet. Diese Werte sind auf dem Datenfile (zusammen mit den Schwerewerten) abgelegt. Die Berechnung des Topoeffektes erfolgte bereits bei der Berechnung der Bouguer-Anomalien mit den Programmen SCYLLA und PLOUFF (Klingelé, 1978, 1980). Die Berechnung des Ivrea-Effektes erfolgte mit dem Programm LOBOS (Wirth, 1985) und der Moho-Effekt mit einem Programm von Geiger, Marti, Santini.

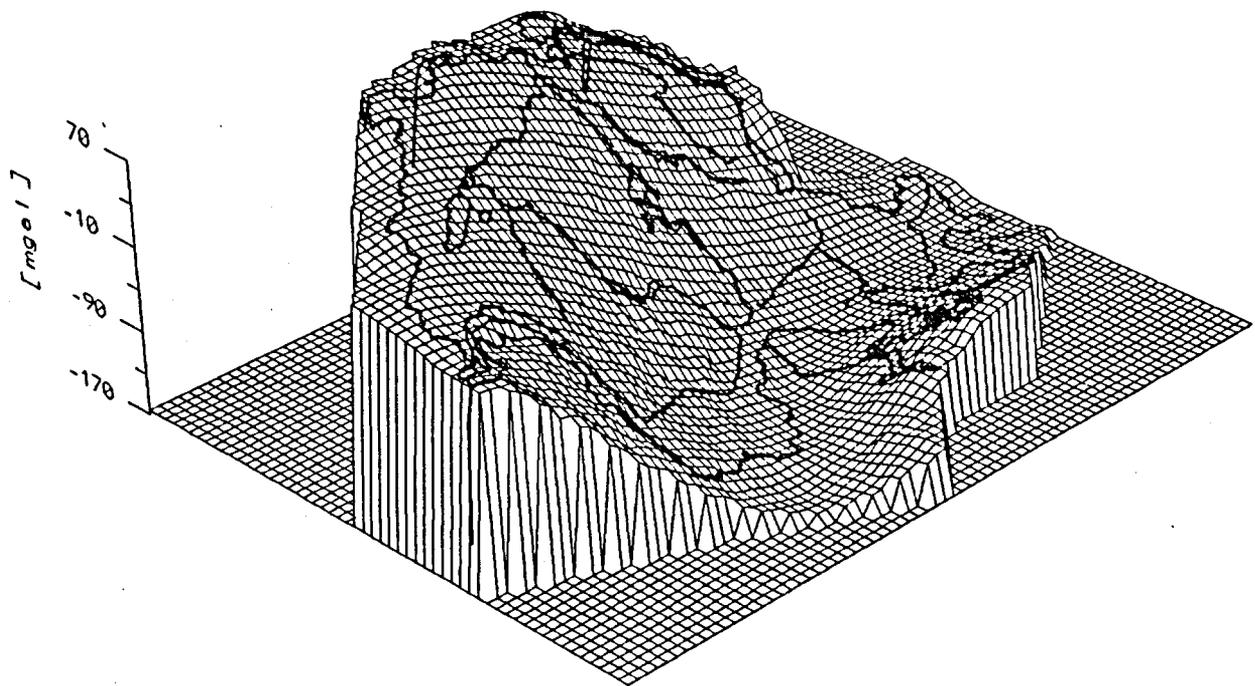


Abb. 5.1 Schwereffekt der Moho-Diskontinuität (gerechnet nach Marti, Geiger, Santini)

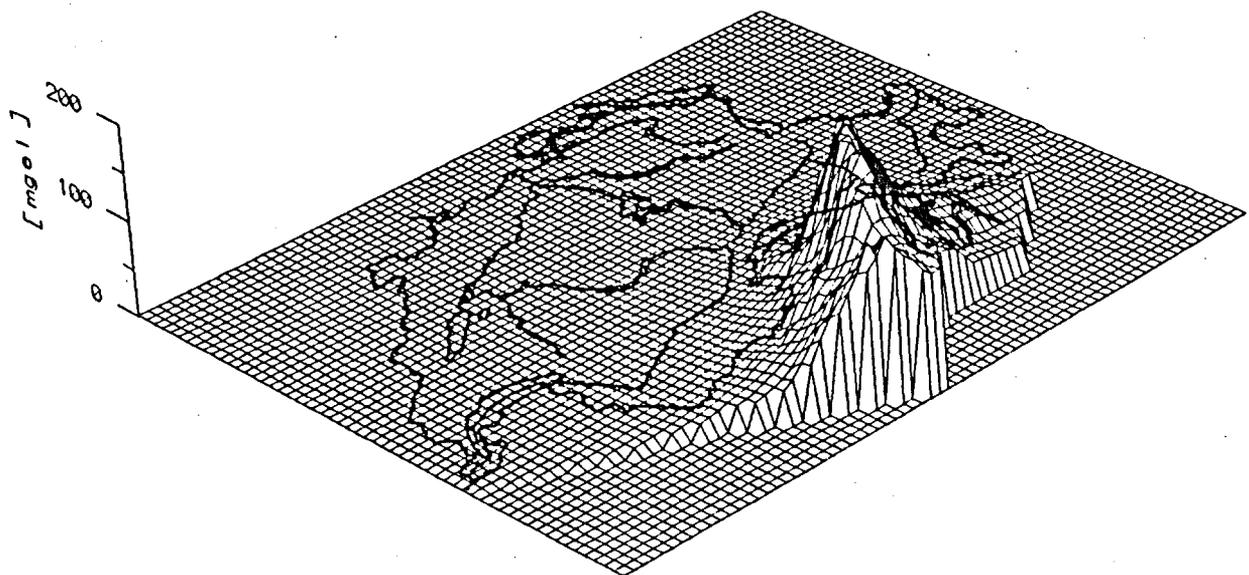


Abb. 5.2 Schwereffekt des Ivrea-Störkörpers (gerechnet nach Wirth, Bürki)

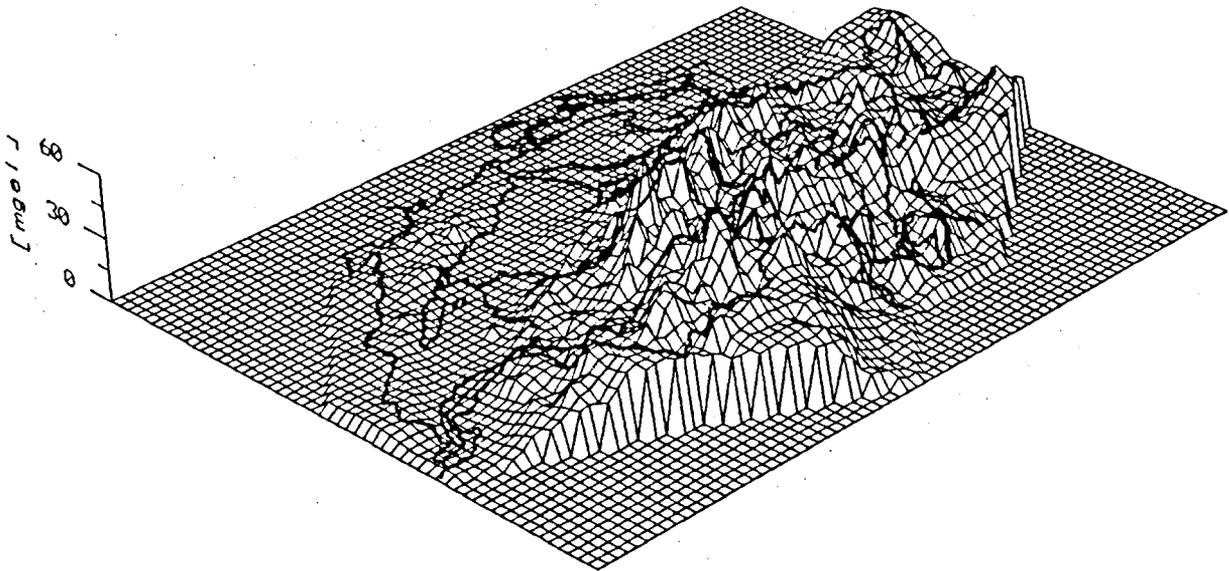


Abb. 5.3 Schwereeffekt der Topographie (gerechnet nach Klingelé)

## Resultate

Als Beobachtungen flossen die um Mohoeffekt und Ivreaeffekt reduzierten Bougueranomalien in die Ausgleichung ein.

Für die Ausgleichung standen 2416 Messwerte zur Verfügung.

Es wurden verschiedene Varianten gerechnet. Davon werden im folgenden auszugsweise, vielleicht interessierende Resultate präsentiert.

i) Modell mit konstanter Topo-Dichte, ohne Trendabspaltung:

$$m_0 = 12 \text{ mgal}$$

Referenztiefe :	29.2 ( $\pm 0.03$ )	km
Dichtekontrast an der Moho:	0.22 ( $\pm 0.001$ )	$\text{g/cm}^{-3}$
Dichte der Topographie:	2.37 ( $\pm 0.01$ )	$\text{g/cm}^{-3}$

Es zeigt sich deutlich, dass noch einfache, starke Systematiken in den Daten stecken. Die Dichten fallen zu gering aus. Eine Trendabspaltung ist auf jeden Fall von Vorteil.

## ii) Modell mit konstanter Topo-Dichte und linearem Trend:

$$m_0 = 8.3 \text{ mgal}$$

Referenztiefe :	$28.8 \pm 0.1$	km
Dichtekontrast an der Moho:	$0.341 \pm 0.003$	$\text{g/cm}^3$
Dichte der Topographie:	$2.64 \pm 0.01$	$\text{g/cm}^3$
Trend in Breite	$-34.3 \pm 0.7$	$\text{mgal/}^\circ$
Trend in Länge	$14.7 \pm 0.3$	$\text{mgal/}^\circ$

Diese Ausgleichung ergibt sofort vernünftige Werte. Interessant ist die etwas reduzierte Dichte der Topographie von 2.64, was auf Grund der nicht berücksichtigten Molassewirkung durchaus vertretbar erscheint. Eine mittlere Dichte wäre demnach eher mit 2.64 denn mit 2.67 anzusetzen. Die Referenztiefe ist von sekundärer Bedeutung. Ihr Wert kommt einem konstanten Offset gleich. Offensichtlich stammen etwa 400 m vom Trendanteil. Zudem ist sie mit einem Korrelationskoeffizienten von -0.7 relativ stark mit der Topo-Dichte korreliert.

## iii) Modelle mit variierender Topo-Dichte und linearem Trend:

Ergebnisse aus der Schätzung mit Dichtepolynomen vom Grad 0 bis 7

Grad	$m_0$ mgal	Referenztiefe	Moho-Dichtekontrast	Trends
0	8.3	28.8 km	0.34 $\text{g/cm}^3$	-34 14 $\text{mgal/}^\circ$
2	7.9	28.7 km	0.34 $\text{g/cm}^3$	-32 17 $\text{mgal/}^\circ$
3	7.5	28.7 km	0.33 $\text{g/cm}^3$	-32 15 $\text{mgal/}^\circ$
5	6.9	28.7 km	0.33 $\text{g/cm}^3$	-35 16 $\text{mgal/}^\circ$
7	6.2	28.8 km	0.34 $\text{g/cm}^3$	-35 16 $\text{mgal/}^\circ$

Es ist nochmals zu bemerken, dass die Referenztiefe auch einen konstanten g-Offset beinhaltet. Sie kann nicht ohne weiteres im Sinne von isostatischen Theorien interpretiert werden. Die Lösungen sind untereinander recht homogen. Der Grad der Dichte-Modellierung hat kaum einen Einfluss auf die übrigen Parameter. Am stärksten korrelieren die Referenztiefe und der konstante Topo-Dichte-Anteil (ca. -0.8)

## Kommentar

Die Topo-Dichten-Verteilung zeigt interessante Tendenzen. So kommt schon beim Grad 2 klar die Molassewirkung zum Ausdruck, indem im Mittelland eine gegenüber 2.67 verringerte Dichte resultiert. Der Vollständigkeit halber sei der Grad 7 hier mit Fehlerangaben angeführt. Dazu ist zu bemerken, dass diese hohen Genauigkeiten weit zu optimistisch und mit Vorsicht zu geniessen sind, da die Beobachtungen als unkorreliert eingeführt wurden. Bei den übrigen Modellen ergeben sich ähnliche Zahlen.

### Dichtemodell vollständigen 7. Grades

$$m_0 = 6.2 \text{ mgal}$$

Referenztiefe :	$28.80 \pm 0.04$	km
Dichtekontrast an der Moho:	$0.347 \pm 0.004$	$\text{g/cm}^3$
Trend in Breite	$-35.0 \pm 0.1$	$\text{mgal}^\circ$
Trend in Länge	$16.5 \pm 0.5$	$\text{mgal}^\circ$

Die maximalen Klaffen betragen :      - 33 mgal    und    +29 mgal  
 Abweichungen der Dichte von 2.67      - 0.3    bis    + 0.4     $\text{g/cm}^3$

Die Gliederung der Dichte stimmt recht gut mit den Erwartungen überein. Interessant sind die Segmentierung der Molasse und die relativ niedrige Dichte im Bündnerland (beachte Bemerkung in Kap. 6.1.5). Zudem zeigt sich im südlichen Wallis und im angrenzenden Gebiet ein Dichte-Manko. Vor einer zu 'oberflächlichen', im wahren Sinn des Wortes, Interpretation sei gewarnt. Die verlangten Dichteeffekte können sehr wohl von tieferen Strukturen herrühren. Diese Abklärungen und die Interpretation des Trends wären wohl Gegenstand einer weiteren Untersuchung.

Werden die Restklaffen der Ausgleichung mit umgekehrtem Vorzeichen aufgetragen, so erhält man direkt eine Residual-Anomalien Karte (Abb.5.8), die nun weiter interpretiert werden kann. Gut sichtbar sind die Schwereeffekte grosser Talfüllungen (z.B. unteres Rhone-Tal, Gegend Chur), die natürlich nicht mit einem der hier benutzten Polynome gefittet werden können.

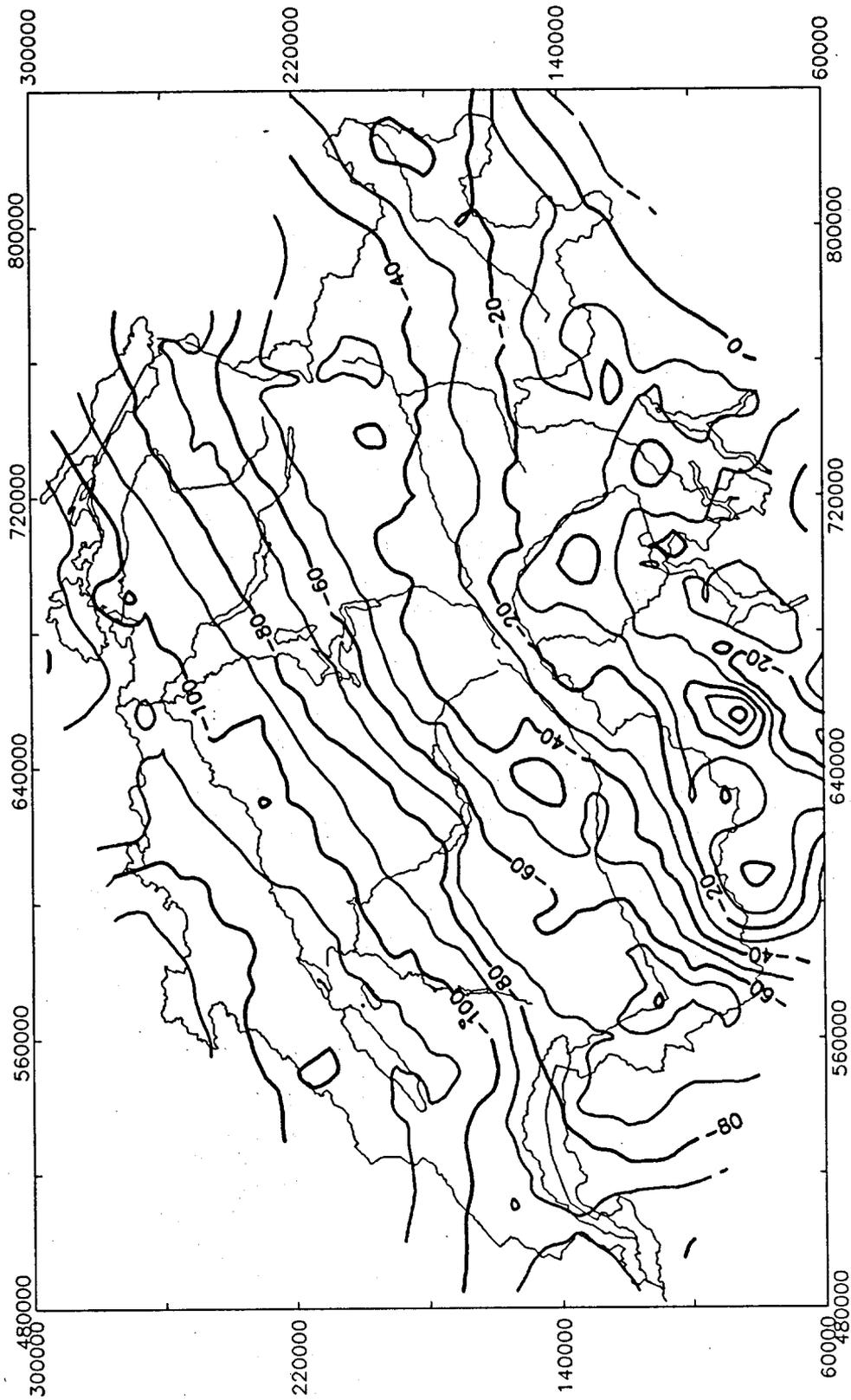


Abb. 5.5 Reduzierte Schwereanomalien, die als Beobachtungen verwendet werden. [mgal]

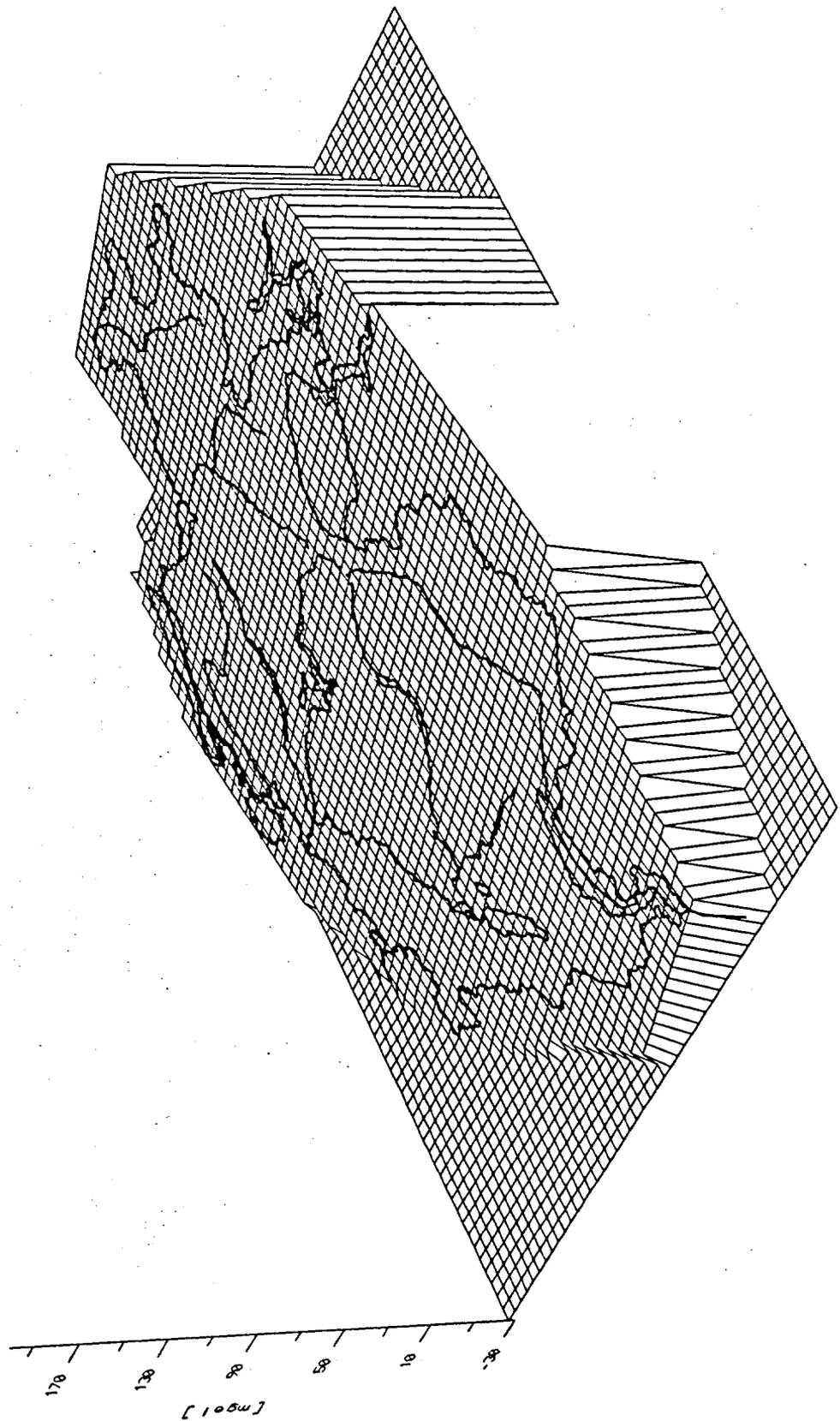


Abb. 5.6 Geschätzter Trend

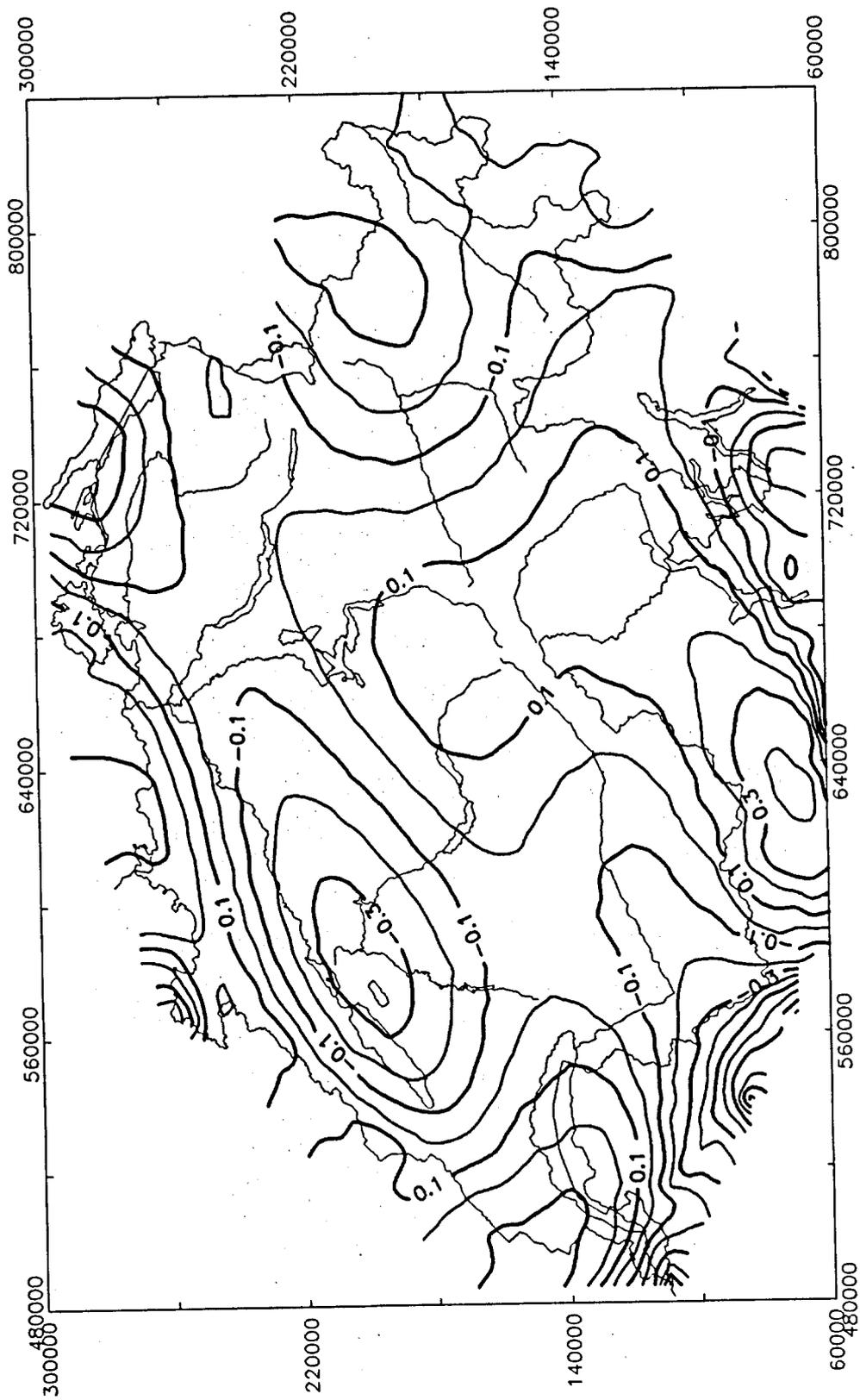


Abb. 5.7 Dichte 7. Grades der Topographie (Abweichung von 2.67 gr/cm<sup>3</sup>)

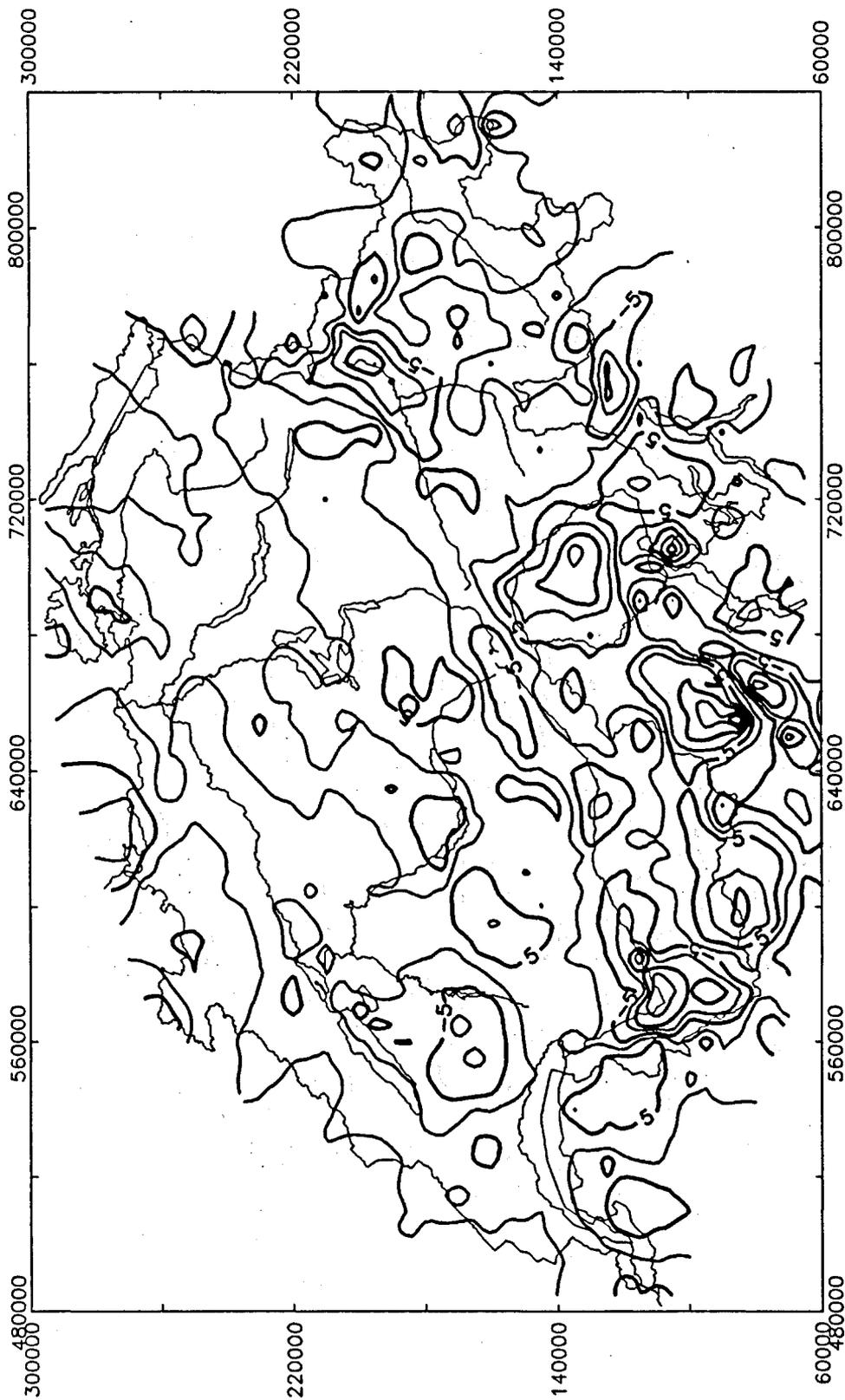


Abb. 5.8 Residual-Anomalien [mgal]

( Verbesserungen mit umgekehrtem Vorzeichen nach Schätzung 7. Grades)

### Schlussfolgerungen aus diesem Kapitel

Die Bestimmung einer regionalen Dichteverteilung in der obersten Kruste ist anhand von Schwerewerten möglich. Um eine detailliertere Dichteprovinz-Karte zu erhalten, müsste vom Prinzip der Schätzung eines globalen Polynoms abgegangen und die stückweise Schätzung innerhalb finiter Elemente eingesetzt werden (oder Splineinterpolation). Das Resultat kann natürlich durch eine zusätzliche, vorgängige Reduktion weiterer bekannter Massen, wie Talfüllungen, Molasse etc., noch stärker geglättet, regularisiert werden.

Da praktisch alle isostatischen Modelle stark höhenkorrelierte Ansätze verwenden, die soeben bestimmten Residuen jedoch gar keine Höhenkorrelation mehr zeigen (Abb. 5.9, siehe auch Bemerkung in Kap.6.1.5), kann man schliessen, dass die durch einfache isostatische Ansätze produzierten Anomalien durch den verwendeten Dichteansatz durchaus plausibel erklärt werden können, was nicht heisst, dass keine isostatischen Kräfte auftreten können. In dieser Interpretation setzt man voraus, dass die Moho die Untergrenze des isostatischen Modells bildet.

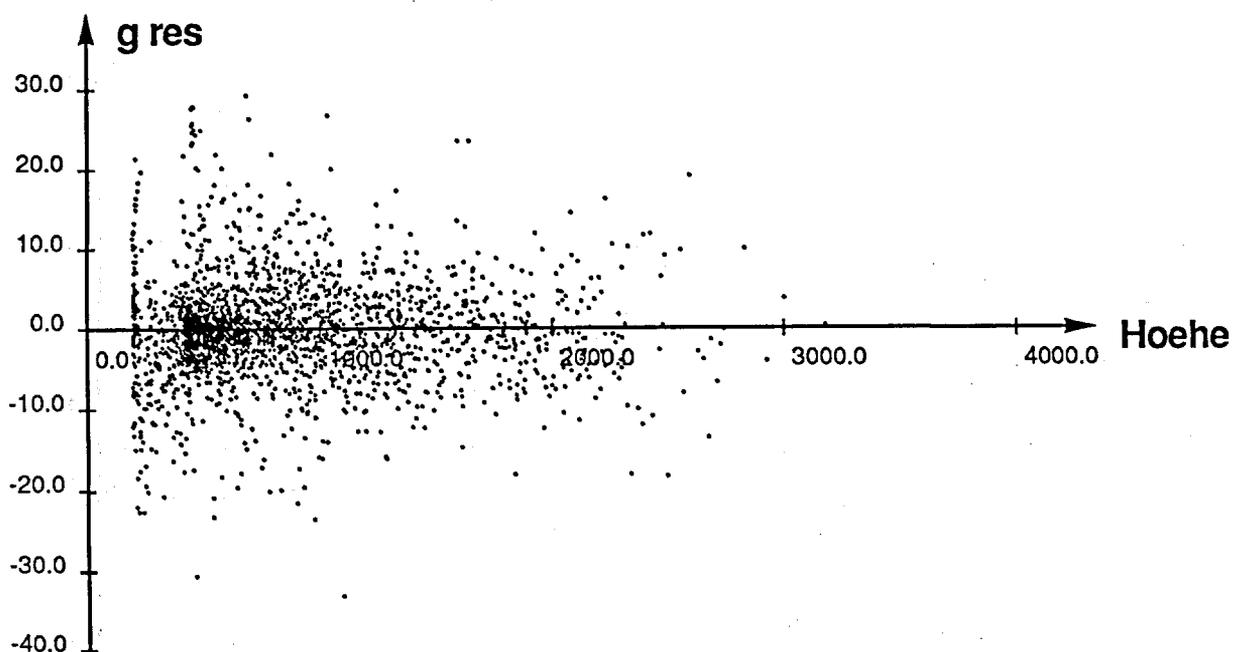


Abb. 5.9 Höhenverteilung [m] der Residual-Anomalien [mgal]

$g_{res}$  : Um Moho-, Ivrea- und Schätzmodelleffekte reduzierte Bouguer-anomalien. Das Modell beinhaltet eine Topodichte 7. Grades, einen Krusten-Mantel-Dichtekontrast, eine Referenztiefe und einen linearen Trend.

### 5.3 Einfluss der Atmosphäre auf das Schwerefeld

Als Beobachter auf der Erde bewegt man sich in der Atmosphäre. D.h., streng genommen gilt die Laplace-Gleichung nicht mehr, hat doch die Luft bei Normalbedingungen (0 C°, 760 mm Hg ) eine Dichte von  $\rho_L = 1.293 \text{ kg/m}^3$ . Die Atmosphärenmasse muss also bei der Berechnung von Potentialen in Betracht gezogen werden.

Die Berücksichtigung der Atmosphärenmasse spielt auch bei Satellitenmessungen eine wichtige Rolle. Wird die Atmosphärenmasse etwa bei GPS-Messungen vernachlässigt, was einem Fehler von 1ppm in GM entspricht, so träte ein Basislinienfehler von etwa 0.05 ppm auf (Beutler et al., 1987).

Es erhebt sich die Frage, ob die Massenwirkung der Atmosphäre im Geoid eingeschlossen werden soll oder nicht. Für Satelliten ist es klar, dass zur Bahnberechnung die gesamte Masse berücksichtigt werden muss, allerdings beträgt das Verhältnis  $M_{\text{Atm}}/M_{\text{Erde}} < 10^{-6}$ . Zur Berücksichtigung dieses Terms wurde bereits 1971 von der IAU (Moskau) ein Zusatzterm in der Referenzfelddefinition verabschiedet.

$$GM_{\text{Atm}} = (35 \pm 0.3) 10^7 \quad [\text{m}^3/\text{s}^2]$$

und

$$GM_{\text{Erde}} = (39860044 \pm 1) 10^7 \quad [\text{m}^3/\text{s}^2]$$

Das Verhältnis beträgt somit:

$$M_{\text{Atm}}/M_{\text{Erde}} \approx 0.87 \cdot 10^{-6}$$

Der atmosphärische Zusatzterm ergibt einen Schwereeffekt in der Normalschwere von

$$g_A = GM_{\text{Atm}}/R_0^2 \approx 0.866 \text{ mgal}$$

Wir wollen durch eine einfache Rechnung unter Einbeziehung des atmosphärischen Druckes die Masse der Atmosphäre abschätzen. Da der Druck dem Integral über die Dichte ( $g \text{ const.}$ ) entspricht, braucht die Dichteverteilung mit der Höhe nicht bekannt zu sein.

$$M_{\text{Atm}} = \int_{\partial(\text{Erde})} \int_0^H \rho \, dh \, df = 4\pi R_0^2 \int \rho \, dh$$

Falls  $g(h) \approx \text{const.}$  gesetzt wird, erhält man:

$$= 4\pi R_0^2 \frac{-1}{g_0} \int -g\rho \, dh = -4\pi R_0^2 \frac{1}{g_0} \int dp = 4\pi R_0^2 \frac{p_0}{g_0}$$

$p_0$  ist der Druck auf Höhe 0  $\approx 1 \text{ atm} \approx 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

Setzt man die Zahlen

$$R_0 = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g_0 = 9.807 \text{ m/s}^2$$

$$p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

in die Formel ein, so erhält man für die Atmosphärenmasse

$$M_{\text{Atm}} \approx 0.53 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

und für das Verhältnis:

$$M_{\text{Atm}}/M_{\text{Erde}} \approx 0.87 \cdot 10^{-6}$$

Die Atmosphärenmasse wurde verschiedentlich mit recht aufwendigen Rechenmethoden berechnet. Die Zahlenwerte weichen jedoch nur unwesentlich voneinander ab. Ecker und Mittermayer (1969) geben

$$M_{\text{Atm}} \approx 0.5296059 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

und Christodoulidis (1979) findet:

$$M_{\text{Atm}} \approx 0.5306307 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

Diese Werte wurden aus der vollen Integration einer Dichtefunktion, die z.T. anhand der U.S.Standard Atmosphäre berechnet wurden, bestimmt.

### 5.3.1 Höhenabhängige Korrektur

Wir berechnen nun den Schwereverlauf innerhalb einer isothermen Atmosphäre. Für den Druckverlauf gilt dann bekanntlich die oft verwendete 'Barometerformel'

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}} \quad \text{mit} \quad H = \frac{RT}{Mg}$$

$p_0$	Druck auf der Höhe $h_0$
$H$	Scale height
$R$	Universelle Gaskonstante pro Mol $8.31 \cdot 10^7$ erg grad <sup>-1</sup> Mol <sup>-1</sup>
$M$	Molmasse der Luft $28.9$ g Mol <sup>-1</sup>
$T$	Temperatur °K
$g$	Schwerebeschleunigung $980$ cm sec <sup>-2</sup>

Damit erhält man aus der Gasgleichung für den Dichteverlauf

$$pV = RT = p \frac{1}{\rho} M \quad \Rightarrow \quad \rho \propto p$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h-h_0}{H}}$$

Mit Hilfe der Flussbetrachtungen (Kap. 4.3.3) wurde diese Funktion bereits behandelt. Der Schwereverlauf innerhalb der Atmosphärenschale sieht also folgendermassen aus:

$$g(h) \approx 4\pi G \rho_0 \frac{H}{r_0} \left( (r_0 + 2H) \left( 1 - e^{-\frac{h}{H}} \right) + 2H \frac{h}{r_0} e^{-\frac{h}{H}} \right)$$

In einer weiteren Näherung wird

$$g(h) \approx 4\pi G \rho_0 H \left( 1 - e^{-\frac{h}{H}} \right)$$

$$G \approx 6.6 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$$H \approx 8000 \div 10000 \text{ m}$$

$$\rho_0 \approx 1.29 \text{ kg m}^{-3}$$

Es ist interessant festzustellen, dass

$$g(\infty) = 4\pi G\rho_0 H$$

ist. Da dieser Wert gleich dem Wert  $g_A(0)$  sein muss, folgt also:

$$g_A = 0.866 \text{ mgal} = g(\infty) = 4\pi G\rho_0 H$$

Und daraus wiederum, lässt sich die scale height errechnen. Sie wird ca. 8000 m.

Für die Korrektur, die an den Messungen (oder mit umgekehrtem Vorzeichen am Referenzfeld) anzubringen ist, findet man:

$$\delta g_A = g_A - g(h)$$

Setzt man obige einfache Exponential-Formel ein, so ergibt sich:

$$\delta g_A = g_A e^{-\frac{h}{H}}$$

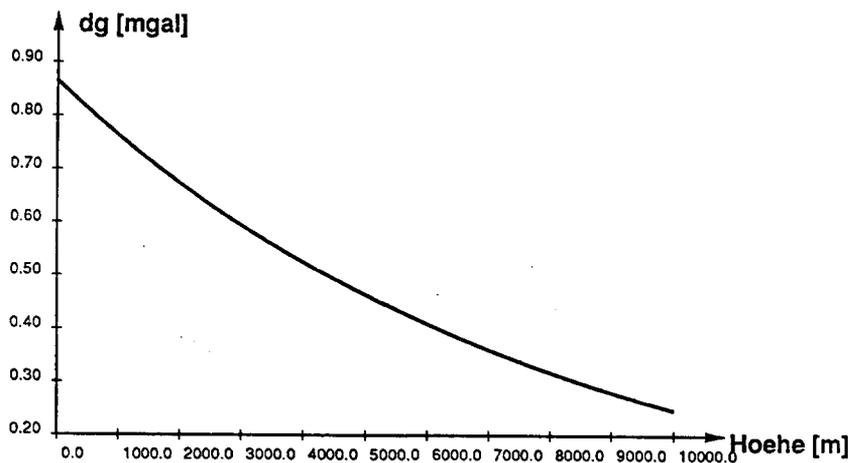


Abb. 5.10 Schwerewirkung der Atmosphäre in Abhängigkeit der Höhe

Eine linearisierte Form ergibt dann:

$$\delta g_A = g_A - 4\pi G\rho_0 (h - 1/(2H) \cdot h^2 + \dots) \approx 0.866 - 10^{-4} h \text{ [mgal]}$$

Eine etwas genauere Formel gibt Wichiencharoen (1982b)

$$\delta g_A = 0.8658 - 9.727 \cdot 10^{-5} h + 3.482 \cdot 10^{-9} h^2 \text{ [mgal]}$$

Saisonale Einflüsse und ortsabhängige Effekte untersucht Christodoulidis (1979) anhand der U.S. Standard Atmosphere. Die Schwankungen der Korrekturen bleiben unterhalb 40  $\mu\text{gal}$ . In Divis et al. (1981) werden ähnliche Untersuchungen durchgeführt, die zu vergleichbaren Resultaten führen.

### 5.3.2 Druckabhängige Korrektur

Der atmosphärische Einfluss lässt sich einfach abschätzen, falls eine barometrische Messung an der Schwerestation vorgenommen wird. Wie im Kapitel über Flussberechnungen gezeigt wurde, wirkt in grosser Näherung nur die Atmosphärenmasse zwischen Meeresniveau und Stationsniveau auf die Gravimetermessungen. Die Masse erzeugt dabei den Effekt einer Punktmasse. Wenn wir nun die wirksame Masse über das eingangs verwendete Druckintegral berechnen, so wird

$$M_p = -4\pi R_0^2 \frac{1}{g_0} \int_{p_0}^p dp = 4\pi R_0^2 \frac{1}{g_0} p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$$

Damit erhält man:

$$M_p = M_{\text{Atm}} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$$

Bei einer Höhe von 3500 m (ca. 650 mbar) umfasst  $M_p$  bereits 1/3 der gesamten Atmosphärenmasse. Weiter wird

$$g_p = g_A \frac{R_0^2}{R_p^2} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \approx g_A \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$$

Dies ergibt bei 650 mbar einen Effekt von 0.3 mgal (dies entspricht dem Wert der höhenabhängigen Formel). Wir gewinnen somit eine einfache Formel zur Korrektur der Schweremessungen:

$$\delta g_A = g_A - g_p = g_A \frac{p}{p_0}$$

Ähnliche Abschätzungen finden sich schon bei Bäschlin (1948,p.432), allerdings wird dort der Effekt vernachlässigt, da die damaligen Messgeräte ohnehin nicht in diese Genauigkeitsklasse ( $\approx 10^{-6}$ ) vorstießen. Mit heutigen Gravimetern sind jedoch atmosphärische Effekte durchaus messbar. Für hochgenaue Messungen und Untersuchungen müssten noch verfeinerte Modelle, wie sie z.B. Groten (1984) beschreibt, herangezogen werden. Die vorliegenden Abschätzungen genügen jedoch (einige 0.1 mgal) dem Zwecke dieser Arbeit, liegen doch die Unsicherheiten eher beim 1 mgal.

### 5.3.3 Einfluss auf das Potential

Um den atmosphärischen Einfluss auf das Potential zu berechnen, verwenden wir das Wegintegral im radialsymmetrischen Fall (siehe z.B Moritz,1980).

$$\delta W_A(r) = - \int_r^{\infty} \delta g_A(r) dr$$

Mit der Exponential-Formel

$$\delta g_A = g_A e^{-\frac{h}{H}}$$

wird das Integral zu

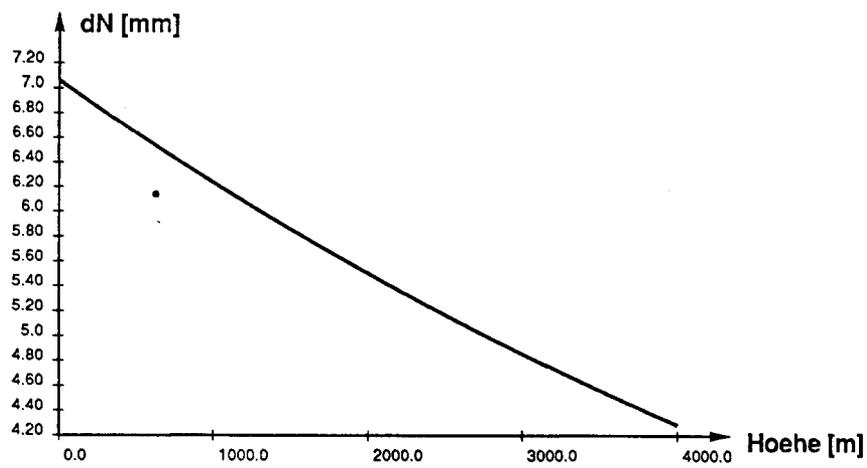
$$\delta W_A = - g_A H e^{-\frac{h}{H}} = - \delta g_A H$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} g_A &= 0.866 \text{ mgal} \\ H &= 8000 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Korrektur an der berechneten Undulation wird mit dem Brun'schen Theorem:

$$\delta \zeta = \frac{\delta W_A}{g_{\text{norm}}}$$



**Abb. 5.11 Einfluss der Atmosphäre auf die Geoidundulation in Abhängigkeit der Höhe**



## 6 Gravimetrisches Geoid

### 6.1 Die Daten

#### 6.1.1 Verwendete Daten

##### Europäische Schweredaten

Das Gebiet um die Schweiz wurde gravimetrisch durch den europäischen Datensatz von Freiluftanomalien erschlossen. Der Datensatz wurde durch Wenzel et al. zusammengetragen und kompiliert (Torge et al, 1984). Der im Datum GRS1980 vorliegende Datensatz umfasst 106350 mittlere 6' x 10' Freiluftanomalien. In der Abbildung 6.1 ist die Verteilung der Daten wiedergegeben. Dazu sind Kreise um die Schweiz im Abstand von 5° eingetragen. Die Daten innerhalb eines Gebietes von -15° West bis 30° Ost sowie von 65° Nord bis 35° Süd wurden für die Geoidberechnungen verwendet. So wird sichergestellt, dass bis zu einem Radius der Quellpunktskallotte von 15° alle verfügbaren Daten benutzt werden. Allerdings ist dieses Gebiet nicht überall mit diesem 6'x10' Datensatz überdeckt. In der Abbildung 6.1 sind die 'Löcher' in den Daten des europäischen Satzes zu erkennen. Sie werden durch GEM 10 Daten gefüllt. Wo eigene Daten vorhanden waren, sind die 'Wenzel'-Daten durch diese ersetzt worden. Die fehlenden Daten in der Nähe der Schweiz und im Alpenraum (weisse Gebiete nordwestlich, östlich und südlich der Schweiz, siehe Abb. 6.1), die nicht durch eigene Daten besetzt werden konnten, machen sich in der Berechnung des Geoides bemerkbar (siehe Kapitel 6.3.3 Fehler).

##### Verwendete Schweredaten im Gebiet der Schweiz

Im Gebiet der Schweiz wurden von der Schweizerischen Geophysikalischen Kommission etwa 2000 Schwerewerte zur Erstellung der 'Schwerekarte der Schweiz' erhoben. Bei der Karte handelt es sich um eine Bougueranomalien-Karte. Diese Arbeiten wurden von Klingelé u. Olivier (1980) durchgeführt. Eine weitere Schwerekarte wurde aus Isostatischen Anomalien kompiliert Klingelé (1981). Einige Zusatzmessungen wurden im südlichen Teil der Schweiz eingefügt. Aus Arbeiten von Kissling (1984) wurden 259 Schwerewerte im Gebiet der Ivreazone verwendet. Des weiteren konnten 107 Schwerewerte, die homogen über das ganze Ivreagebiet verteilt sind, miteinbezogen werden. Sie stammen aus Arbeiten des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie zur Bestimmung und Interpretation des Schwerefeldes (Schwere und Lotabweichungen) im Gebiet der Ivreazone: Bürki (1988), Marti und Wirth (1988). Die gesamte Anzahl der verwendeten Punktwerte beläuft sich auf 2416, ihre Verteilung mit der 6'x10' Einteilung wird in Abb. 6.2 wiedergegeben.

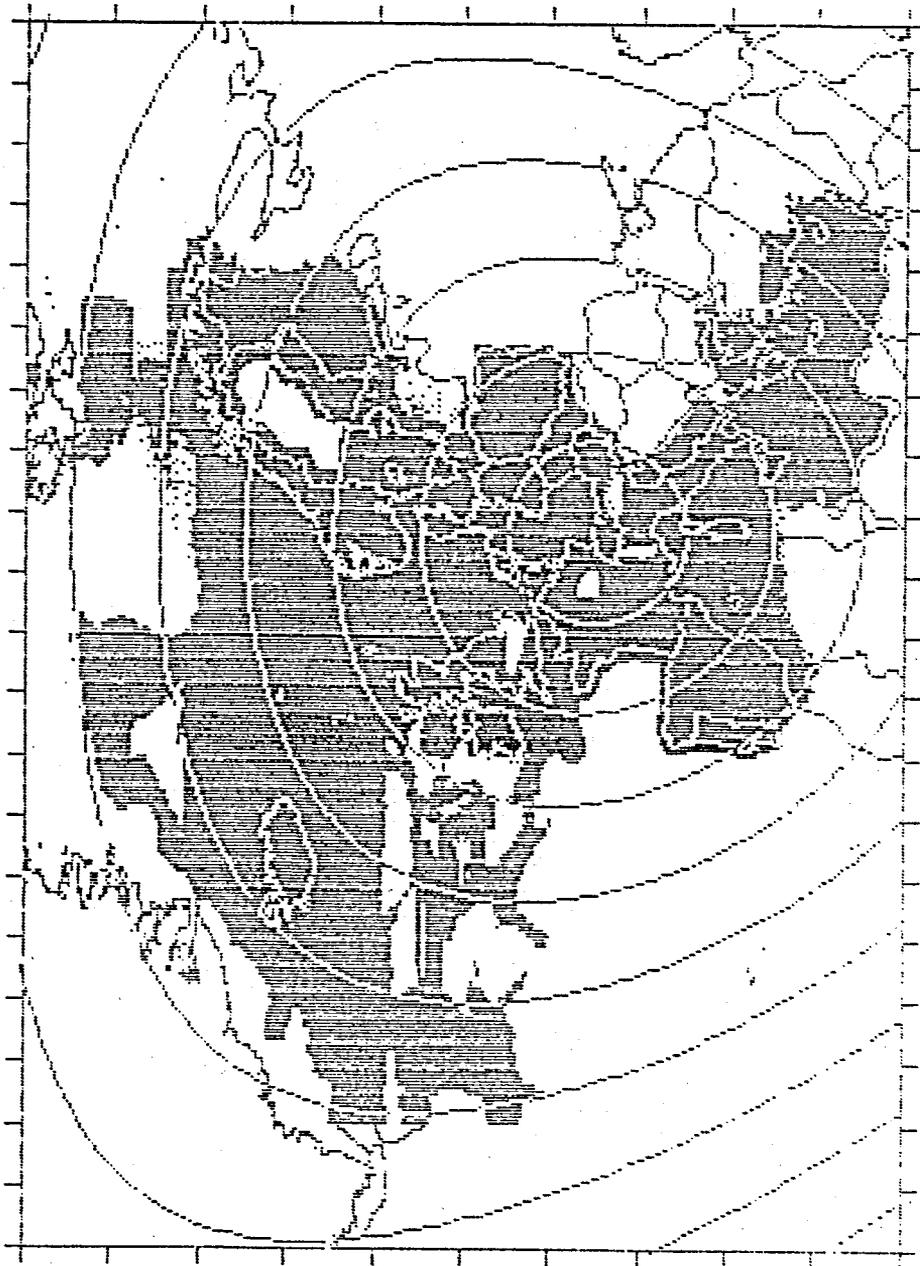


Abb.6.1 6'x10' Daten (Torge,Weber,Wenzel, 1984)  
5° Äquidistanzen (Kreise) um die Schweiz

6' x 10' Gitter

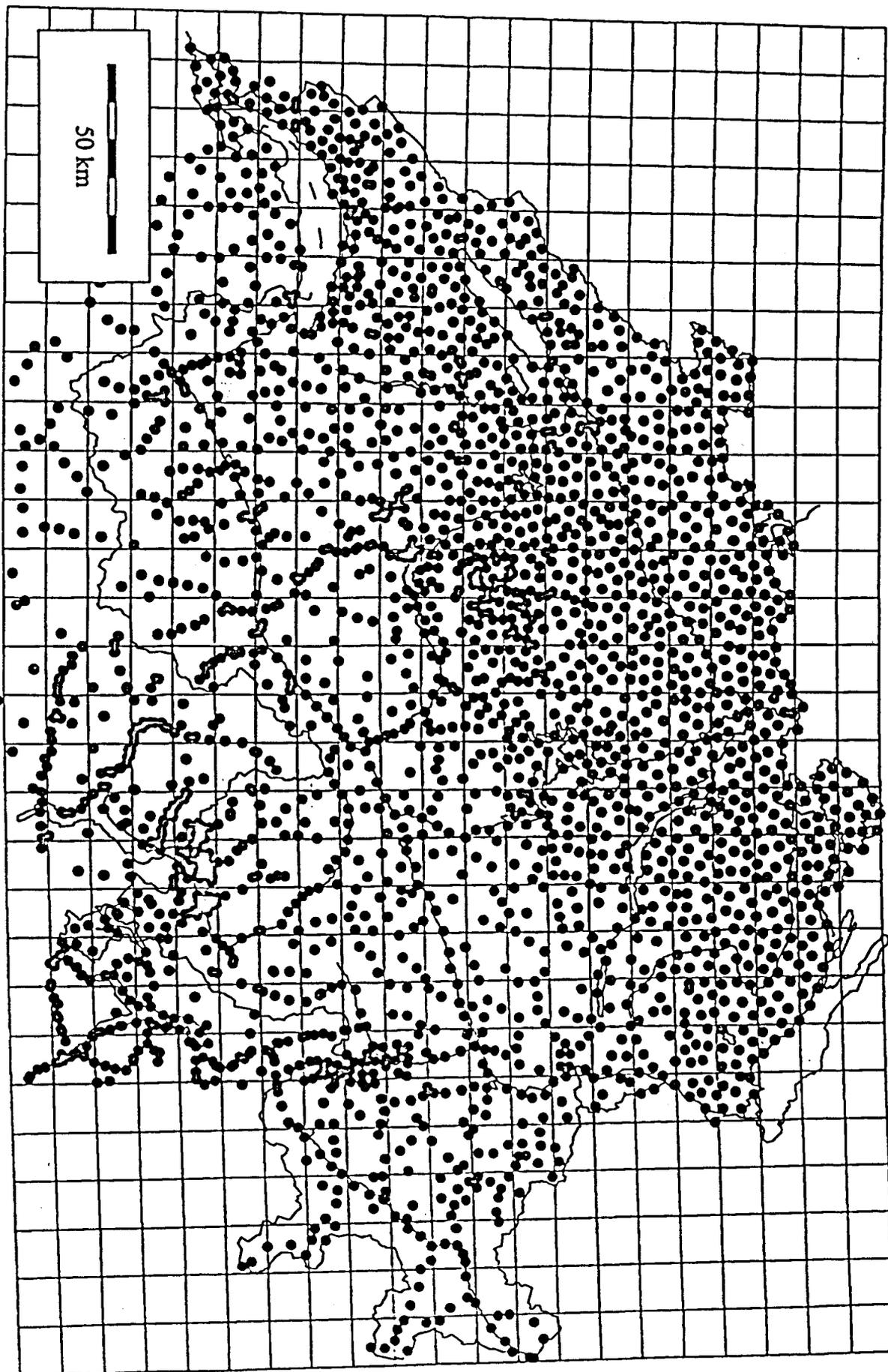


Abb.6.2 Verteilung der verwendeten Schwerstationen in der Schweiz  
(Klingelé & Olivier, 1980, Kissling, 1980, Bürki, 1985b)

### 6.1.2 Referenzanomalien und Referenzgeoid

Als Näherung oder vielmehr als Referenz für das lokale Geoid wurden die GEM 10C Parameter benutzt (Lerch et al., 1978). Aus dem  $180 \times 180$  Koeffizientensatz wurden Schwereanomalien in einem  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  Gitter gerechnet. Diese Werte wurden anschliessend mit Hilfe einer einfachen Polynominterpolation (aus Programm LAG, Elmiger, Gurtner, Wirth) auf ein  $6' \times 10'$  Gitter interpoliert. Dies drängte sich auf, da die benutzte VAX für die Berechnung im feinen Gitter etwa 20 Stunden CPU aufgewendet hätte. Dieser Zeitbedarf war trotz dem Einbau (durch M. Müller, IGP) der Clenshaw-Summierung (Gleason, 1985) in das Berechnungsprogramm anzuschlagen. Die Clenshaw-Summation hatte sich auch aus numerischen Gründen aufgedrängt. Die im ursprünglichen Programm verwendete vollständige Rekursion zur Berechnung der Kugelfunktionen in Potentialreihenentwicklung (Reihenentwicklung p. 24. in Heiskanen/Moritz, 1967) war für kleinere Modelle genügend. Mit Modellen jedoch, die Dimensionen von ca.  $30 \times 30$  übersteigen, ist die numerische Instabilität durch Stellenverlust so gross, dass die Rechnung abgebrochen werden muss. Die Geoidundulationen können im gleichen Run berechnet werden. Sie werden dem Differenzgeoid am Schluss wieder zugeschlagen. Das GEM 10C Modell wurde ebenfalls im System GRS80 berechnet. Die Verwendung eines globalen Modelles als Referenzfläche bringt den Vorteil mit sich, dass die Stokesintegration nicht über allzu grosse Kalotten gerechnet werden muss. In unserem Fall wurden als maximal Abstand  $15^\circ$  gewählt. Ausserhalb dieser Distanz wird das Geoid als durch das Modell gegeben betrachtet. Diese Vernachlässigung ist nicht von Bedeutung, da zur Bestimmung des lokalen Geoides ohnehin eine Datums- transformation vorgenommen wird, die allfällige langwellige Trends absorbiert. Durch die Verwendung einer derartigen Referenz ist der elliptische Fehler ebenfalls zu vernachlässigen (Arabelos, 1980). Als Veranschaulichung wird noch eine globale Ansicht eines Kugelfunktionsmodelles gezeigt (Abb.6.3). Allerdings sind dort die Koeffizienten von GEM 9 (Lerch et al., 1977) verwendet worden. Die GEM 10C Freiluftanomalien sowie die entsprechenden Geoidundulationen im GRS80 sind in Abb.6.4a bzw. in Abb.6.4b im europäischen Rahmen dargestellt. In Abb.6.5 sind die im Massstab der Schweiz nur schwach strukturierten GEM 10C Geoidundulationen aufgetragen.

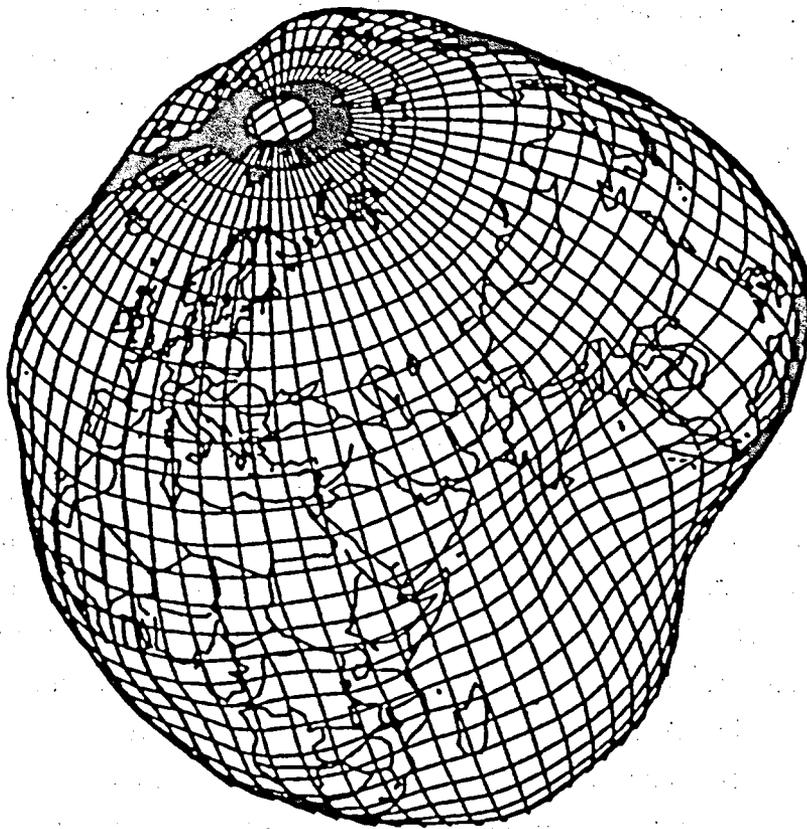


Abb.6.3 Globale Ansicht der Geoidundulationen GEM9

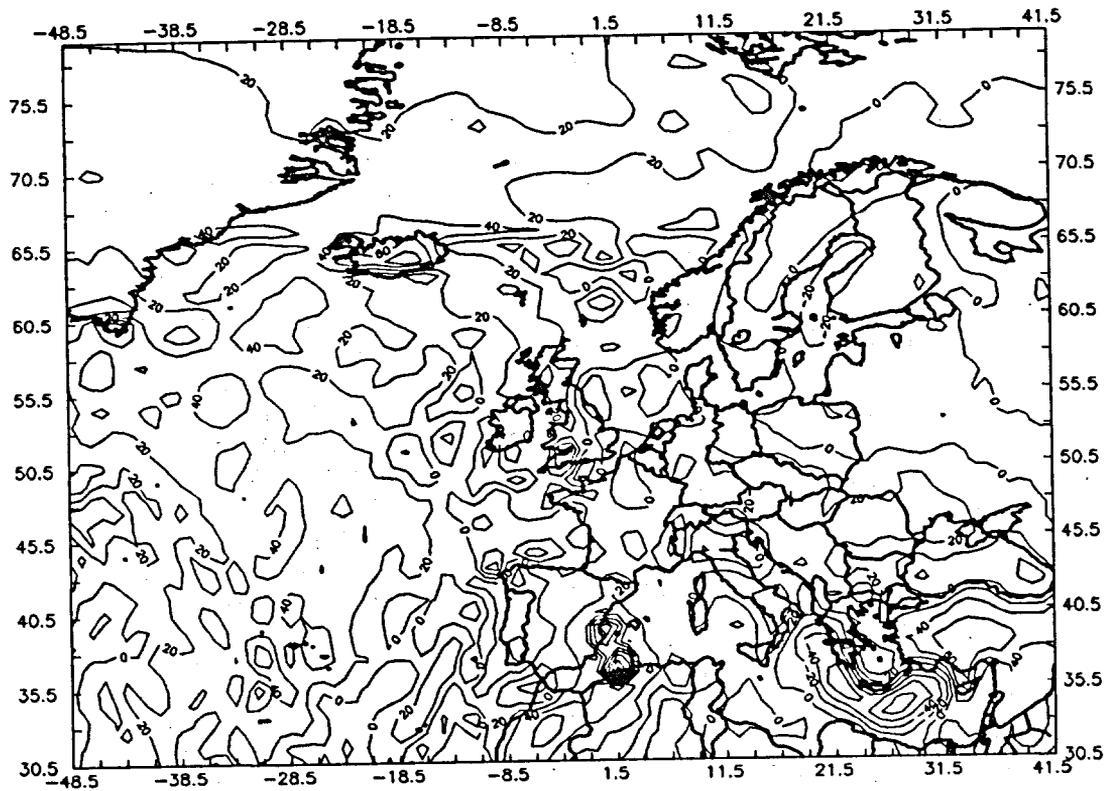


Abb.6.4a Freiluftanomalien im europäischen Raum GEM10C (GRS80) [mgal]

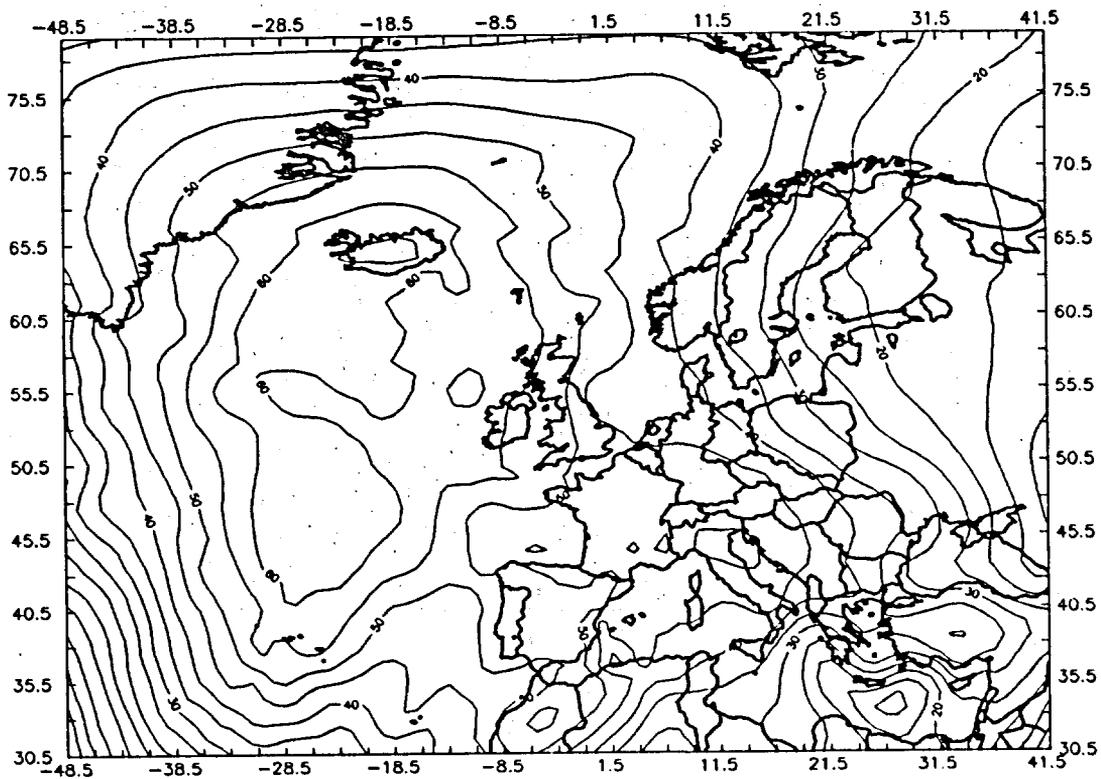


Abb.6.4b Geoidundulationen im europäischen Raum GEM10C (GRS80) [m]

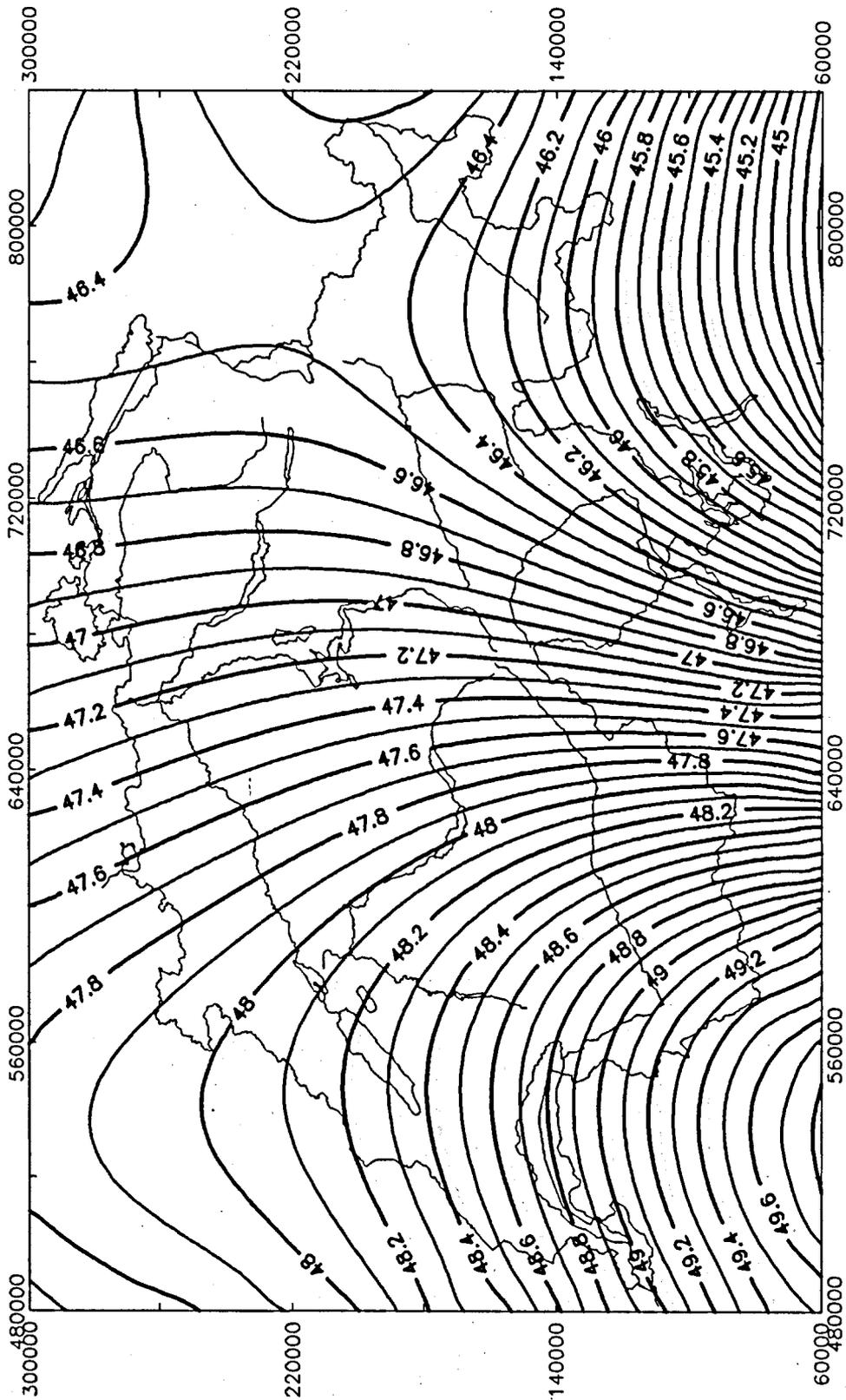


Abb.6.5 Geoidundulationen GEM10C im Bereich der Schweiz (GRS80) [m]

### 6.1.3 Bestehendes Astro-Geoid in der Schweiz

Das in der Schweiz verwendete Geoid (Abb.6.6) stammt von Gurtner (1978). Basierend auf Vorstudien und Vorarbeiten von Elmiger (1969, 1975a, 1975b) hat Gurtner ein auf dem Flächennivellement von reduzierten Lotabweichungen aufbauenden Verfahren ein astro-geodätisches Geoid bestimmt. Zur Reduktion der Lotabweichungen verwendete er das 500m x 500m Höhenmodell und Informationen über den Verlauf der Krusten-Mantelgrenze sowie ein früheres Modell des Ivrea-Körpers (Berckhemer, Kaminski, Menzel). Die reduzierten Lotabweichungen wurden vor der Integration interpoliert. Untersucht wurden dabei Kollokationsansätze und Polynominterpolationen (Elmiger, 1975). Durch das Flächennivellement erhält man ein Cogeoid, das zu den vorgängig reduzierten Potentialwerten wieder addiert werden muss. Dieses Verfahren kann als Methode der Regularisierung mit der 'Remove-Restore Technik' bezeichnet werden.

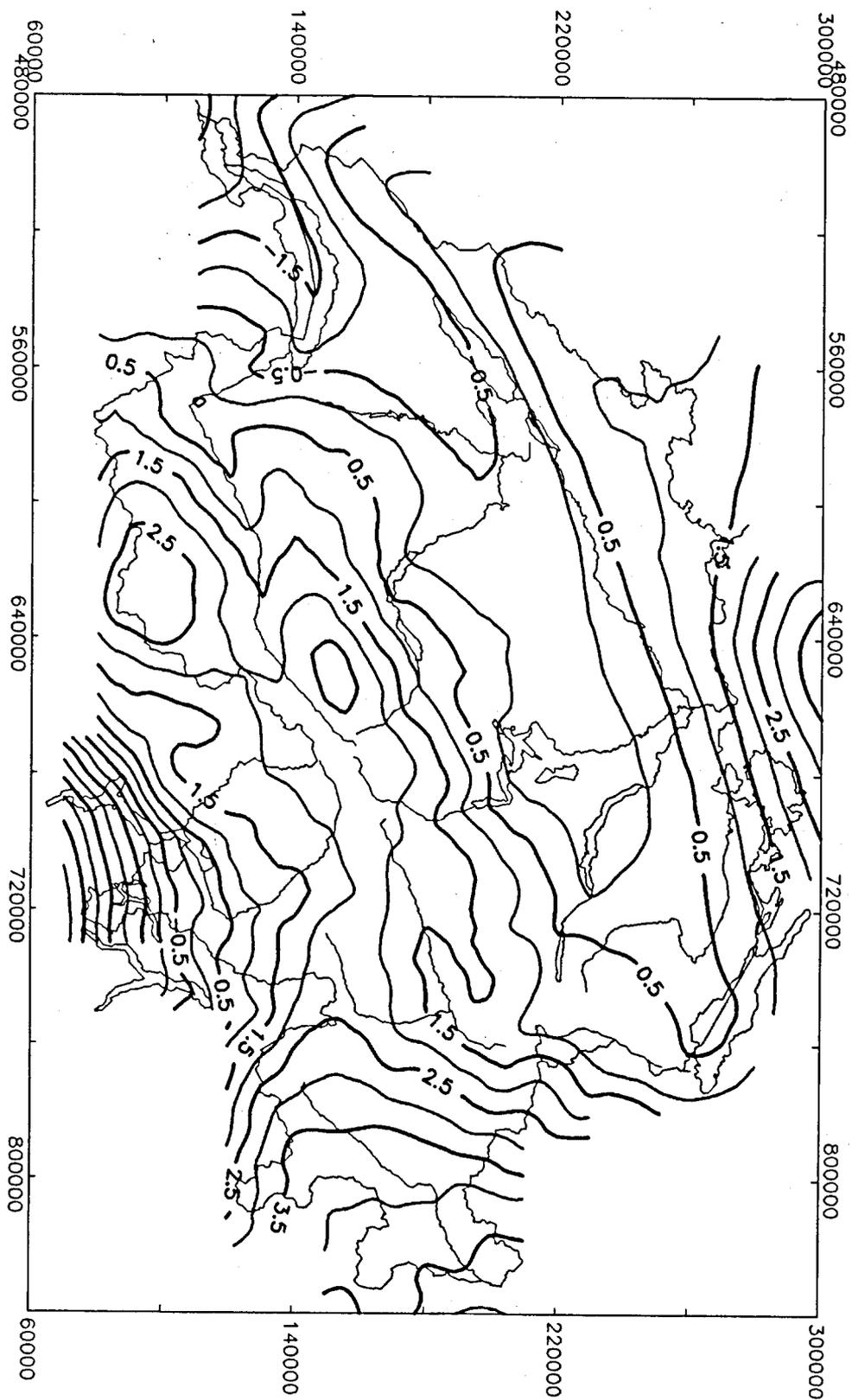


Abb. 6.6 Astro-Geoid im CH-Datum ( Gurtner, 1978 ) [m]

#### 6.1.4 Zur Reduktion der Schweredaten

Da die verschiedenen Datensätze unterschiedlich reduziert worden sind und zudem sich nicht auf identische Referenzsysteme beziehen, wurden sämtliche Daten neu reduziert und einheitlich auf das GRS1980 bezogen. Damit werden sie mit den mittleren europäischen Schweredaten (Torge et al., 1984) direkt vergleichbar. Die Topographieeffekte wurden aus den Bougueranomalien und den Absolutschweren zurückgerechnet. Einige Datenfiles waren direkt mit Topographieeffekten versehen (Marti, 1988). Bei der Rückrechnung der Bouguerdaten ist darauf zu achten, dass zwei Rechenweisen zur Bouguerreduktion verwendet werden können. Sie sind unter den Bezeichnungen "Ebene" und "Sphärische" Bouguerreduktionen bekannt. Der Unterschied ist schwach höhenabhängig und beträgt im hier behandelten Gebiet 2 bis 5 mgal.

Des Weiteren werden die Freiluftreduktionen oftmals mit unterschiedlich hohem Approximationsgrad berechnet. Die Unterschiede betragen aber weniger als 1 mgal.

Ältere Absolutschweren beziehen sich noch auf das System 'Potsdam'. Insbesondere trifft dies auf die in Hunziker (1956) tabulierten Referenzschwerewerte zu. Diese Schwerewerte sind im Vergleich zum heutigen Schwerereferenznetz um 15 mgal zu gross. Fischer (1970a,b) bearbeitete das gravimetrische Kontrollnetz neu. Die neuesten Absolutschweremessungen in der Schweiz stammen von Marson (Kahle et al., 1981, Marson et al., 1981).

Nach der Bestimmung der Topoeffekte wurden sämtliche Werte einheitlich auf das GRS80 bezogen. Die Normalschwere auf dem Ellipsoid wurde nach z.B. Heiskanen u. Moritz (1967, p. 76) berechnet:

$$g_{\text{norm}}(\text{Ell}) = g_{\text{Äqu}} \frac{1 + \frac{b g_{\text{Pol}} - a g_{\text{Äqu}}}{a g_{\text{Äqu}}} \sin^2 \Phi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \Phi}}$$

mit  $a$  = grosse Ellipsoidhalbachse  
 $b$  = kleine Ellipsoidhalbachse  
 $\Phi$  = geogr. Breite

Die Freiluftreduktion erfolgt nach einer Formel von Heiskanen u. Moritz (1967) p.79.:

$$g_{\text{norm}}(h) - g_{\text{norm}}(\text{Ell}) = -g_{\text{Äqu}} \frac{h}{a} \left( 2 + 2.4 f + 0.8 f_g + 2(f_g - 2f) \sin^2 \Phi - 3 \frac{h}{a} \right)$$

$$f = \frac{a - b}{a} \quad \text{und} \quad f_g = \frac{g_{\text{Pol}} - g_{\text{Äqu}}}{g_{\text{Äqu}}}$$

Die Freiluftanomalien am Punkt P mit der Höhe h wurden durch

$$g_{\text{frei}}(P) = g_{\text{gem}}(P) - g_{\text{norm}}(h)$$

erzeugt.

Dabei wurde die in 6.1.4 gegebene Normalschwereformel (Heiskanen, Moritz, 1967) benützt. In Abb.6.8 ist die Differenz zwischen exakter Reduktionsformel und Standardwert als Funktion der Höhe h aufgetragen.

$$g_{\text{diff}} = [g_{\text{norm}}(h) - g_{\text{norm}}(\text{Ell})] - [-0.3085 * h]$$

Der Abbildung 6.8 ist zu entnehmen, dass der Standardwert im Bereich von 1 mgal dasselbe Resultat liefert.

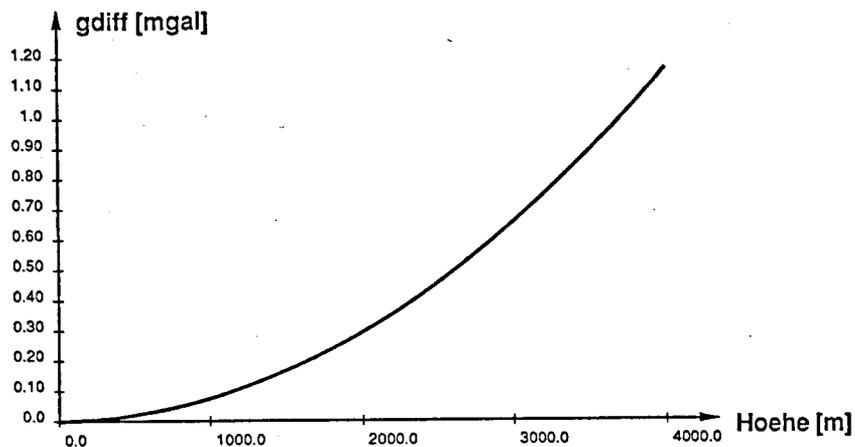


Abb. 6.8 Differenz zwischen exakter Reduktionsformel und Standardkorrektur [mgal]

Faye-Anomalien ergaben sich durch Abzug der auf Stationshöhe bezogenen Topographieeffekte bis 167 km Abstand (sie wurden mit dem Programm SCILLA und PLOUFF von Klingelé, Plouff berechnet). Die Wirkung der Nahtopographie wurde bei einem kleinen Teil der Daten mit Hilfe der Sektorenmethode, ansonsten anhand von quadermässig aufgebauten 50m DTMs berechnet. Die Dichte ist mit  $2.67 \text{ gr/cm}^3$  eingeführt. Die Bouguer-Anomalien wurden neu durch die sphärische Bouguerkorrektur erzeugt. Auch hier ist die Dichte  $2.67 \text{ gr/cm}^3$ . Wichiencharoen (1982b) untersucht den Effekt verschiedener Reduktionen auf Potential und Schwere. Dabei wird auch die Reduktion mit ebenen Zylinderscheiben betrachtet. Die sphärische Bouguerreduktion nach Lambert (1930) kann mit

Bäschlin (1948, p.500) geschrieben werden

$$\delta g_{\text{sph}} = -2\pi G \rho R \sin \psi \cdot \left[ (c(r) + s(r)) \left( \frac{r}{R} \cos \psi + \frac{1}{3} \sin \psi s^2(r) \right) - \frac{2}{3} \sin^2 \psi c(r) - \sin \psi \cos \psi \varphi(r) \right]_{r=R}^{R+h}$$

mit den Abkürzungen:

$\psi$  = halber Öffnungswinkel der betrachteten Kallotte (max. Winkelabstand)

$$s(r) = \frac{r - R \cos \psi}{R \sin \psi}$$

$$\alpha(r) = \sqrt{s^2(r) + 1}$$

$$\varphi(r) = \ln(s(r) + c(r))$$

Die Differenz zwischen der sphärischen und der ebenen Bouguer-Korrektur ist höhenabhängig, übersteigt in unseren Gebieten aber nicht die 10 mgal-Grenze. In Abb. 6.9 ist diese Differenz für einen Einflussradius der berücksichtigten Massen von 167 km aufgetragen:

$$g_{\text{diff}} = \delta g_{\text{sph}}(h) - [-2\pi G \cdot 2.67 \cdot h]$$

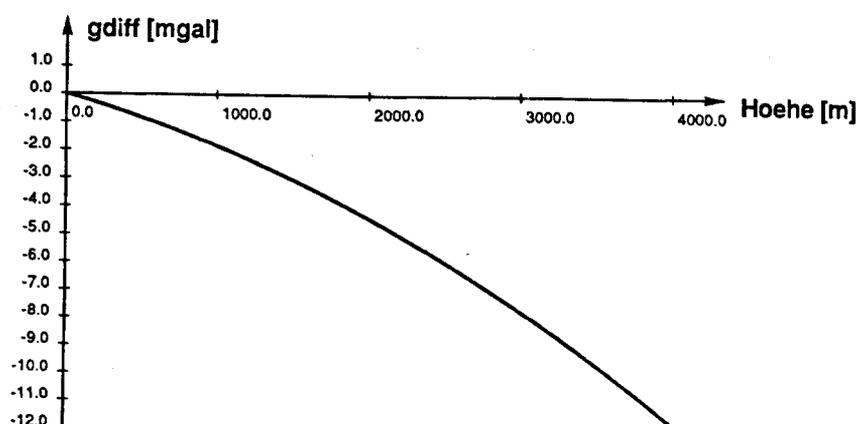


Abb.6.9 Differenz sphärische - ebene Bouguerkorrektur [mgal]

Weitere Reduktionen betreffen den "Moho-Effekt". (Damit ist die Schwerewirkung des Dichtesprunges an der Moho-Diskontinuität gemeint). Der Dichtekontrast zwischen Erdkruste und Erdmantel wird (siehe auch Kap. 5.2) auf  $0.40 \text{ g cm}^{-3}$  angesetzt. Eine Näherung für die mittlere Tiefe der Moho ergibt sich im betrachteten Gebiet zu 34 km. Sie liegt in derselben Grössenordnung wie die von Kahle und Werner (1980) ermittelte sogenannte "Ausgleichstiefe" für Mitteleuropa (32 km). Für die Schweiz wird in dieser Arbeit der Wert von 34 km eingesetzt. Die Tiefen der Moho wurden von der Zusammenstellung aus Bürki (1988) übernommen. Die Originaldaten stammen aus Müller, St. et al. (1980), Deichmann et al. (1986), Ansorge et al. (1987). Der Ivreaeffekt wurde nach Bürki (1988), Wirth (1985) berechnet.

### **Bestimmung der mittleren Freiluftanomalie aus Punkt-Freiluftanomalien**

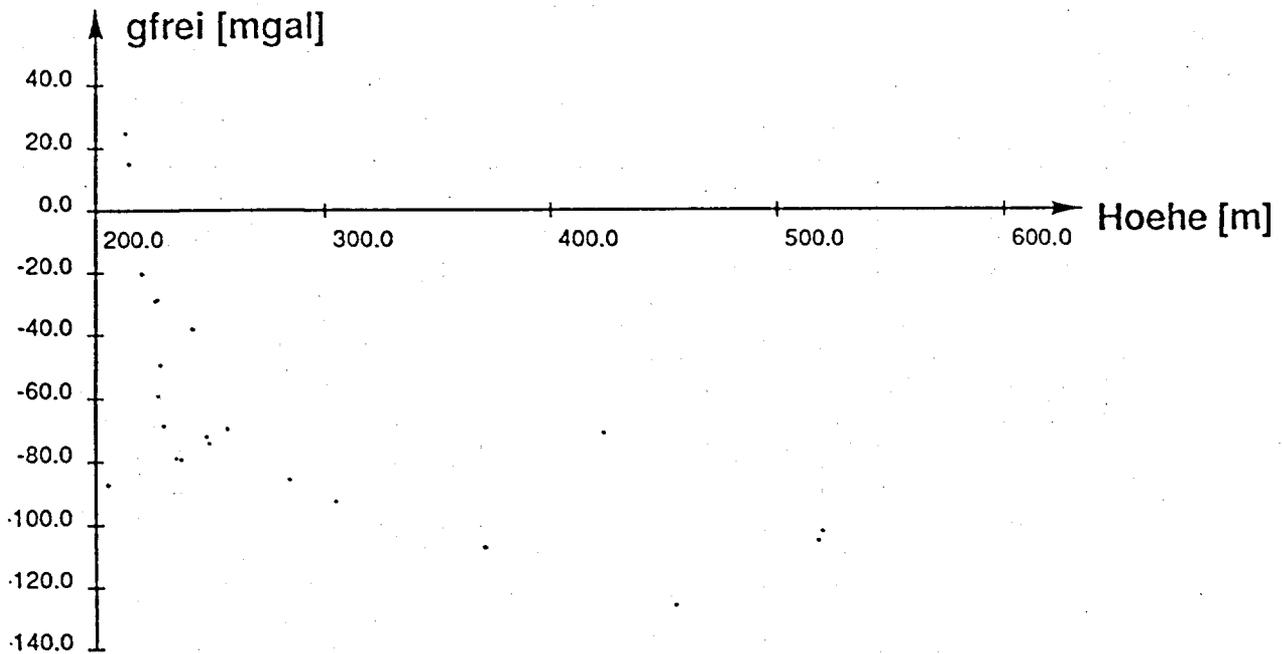
Die Schwereanomalien wurden zwecks nachträglicher Integration zu mittleren Anomalien in  $6' \times 10'$  Kompartimenten zusammengefasst. Dies erfolgte mit dem Program GDATE (Kuhn, Geiger). Für die jeweiligen Kompartimente wurde eine mittlere Höhe aus einem von Elmiger kompilierten (im Süden durch Bürki (1988) erweiterten)  $500 \times 500 \text{ m}$  DTM berechnet (Programm HDATE Kuhn, Geiger). Da im Regelfall die Freiluftanomalien linear mit der Stationshöhe korreliert sind, wird hier das übliche Verfahren angewandt, wonach eine lineare Regression für die Anomalien innerhalb eines Kompartimentes in Abhängigkeit der Stationshöhe gerechnet wird (STODA, Kuhn, Geiger). Die so gewonnenen Anomalien sind in Abb.6.11 zusammengestellt.

Zur Bestimmung der mittleren  $\Delta g$  müssen mindestens 3 Stützwerte vorhanden sein, sonst wird der entsprechende  $6' \times 10'$  Wert verworfen. Auf diese Art blieben noch 336 Anomalien übrig. In der Gegend der Ivrea-Zone traten bei der Bestimmung der mittleren Anomalien zusätzliche Schwierigkeiten auf. Interessanterweise existieren Kompartimente, in denen die Freiluftanomalien stark negativ mit der Stationshöhe korreliert sind (vgl. Abb.6.10). Dies ist auf die stark positive Anomalie des Ivreakörpers zurückzuführen.

### **Bestimmung der mittleren Freiluftanomalie aus Punkt-Bouguer-Anomalien**

Im Alpenbereich der Schweiz sind die Schweredaten naturgemäss sehr schlecht verteilt. Insbesondere tauchen Probleme da auf, wo die Schweremessungen eine schlechte Höhenverteilung aufweisen. Dies ist gerade in Berggegenden der Fall, wo praktisch nur entlang der Täler gravimetriert wurde. Die bei derartigen Bedingungen durch lineare Regression auf die mittlere  $6' \times 10'$  Höhe extrapolierten Freiluftanomalien können erhebliche Fehler von  $\sigma$  bis zu 40 mgal und mehr (Abb.6.12) aufweisen. Zur Veranschaulichung dieser

Effekte wurde gleichwohl ein Geoid mit diesen extrapolierten Freiluftanomalien berechnet. Um jedoch die fehlerhaften Daten von insgesamt 76 Kompartimenten durch korrektere Werte zu ersetzen, wurde auf die Methode der Regularisierung zurückgegriffen. Die Regularisierung besteht darin, toporeduzierte Werte zur Interpolation zu verwenden. Dazu wurden die Bougueranomalien mit einem Kollokationsansatz (Programm HITCOL von Wirth) (Wirth, 1990a,b) an den mittleren Koordinaten der 6'x10' Kompartimente interpoliert und danach wieder mit der Bouguerkorrektur und dem topographischen Effekt auf der mittleren Höhe des Kompartimentes beaufschlagt. Der Topographieeffekt wurde aus 500m x 500m Höhenraster berechnet (Programm LOST, Wirth, 1990b). Die so ermittelten Freiluftanomalien sind in Abb.6.13 dargestellt. Mit diesen interpolierten Werten stehen 352 mittlere Anomalien in der Schweiz zur Verfügung.



**Abb.6.10** Negativ-Höhenkorrelierende Freiluftanomalien in der Ivrea-Zone  
(Gebiet Valle d'Ossola und Umgebung)







### 6.1.5 Stochastisches Verhalten der Daten

Hier soll das stochastische Verhalten der Schweredaten illustriert werden. Der linear von der Höhe abhängige Anomalienverlauf ist in der Regel auch im Gebirge vorhanden. Die Korrelation ist praktisch in allen 6'x10' Kompartimenten besser als 0.9. Die Neigung der korrelierenden Geraden mag etwas variieren, da sie bekanntlich die Dichte der Topographie im betreffenden Gebiet widerspiegelt. Der Abszissendurchstosspunkt (Konstante  $a$ ) entspricht ungefähr der mittleren Bougueranomalie plus einem Topographie-Beitrag. Zur Identifikation von  $a$  und  $b$  schreiben wir den bekannten Regressionsansatz (z.B. Heiskanen/Moritz, 1967) um:

$$\begin{aligned}\Delta g_f &= a + b H = \Delta g_{\text{Boug}} + g_{\text{Topo}} + g_{\text{Boug}} \\ &\approx \Delta g_{\text{Boug}} + \tau_0 + \tau_1 H + \beta H\end{aligned}$$

Dies gilt, falls die Topokorrektur ungefähr linear mit der Höhe zusammenhängt (vergl. Abb. 6.18).  $\beta$  ist der Bouguerkoeffizient ( $\beta \approx 0.1119 \text{ mgal/m}$  bei einer Dichte von  $2.67 \text{ gr cm}^{-3}$ ). Damit kann man die Koeffizienten  $a$  und  $b$  identifizieren als:

$$\begin{aligned}a &= \Delta g_{\text{Boug}} + \tau_0 \\ b &= \tau_1 + \beta\end{aligned}$$

Es ist also ersichtlich, dass sowohl  $a$  als auch  $b$  vom Ort des Kompartimentes abhängen müssen. Die Koeffizienten  $b$  sind in Abb. 6.14 in Abhängigkeit der Lage der Kompartimente aufgetragen. Aus den Koeffizienten  $b$  lässt sich direkt eine Topographiedichte bestimmen. Dieses Verfahren wurde von Geiger (1982, unveröf.) angewandt, es ist jedoch zu Gunsten des in Kap. 5.2 beschriebenen Verfahrens fallengelassen worden. Nach Kap. 5.2 ergeben sich für die Abweichungen von der Standard-Dichte oder vom Standard-Bouguer-Koeffizienten ( $2.67 \text{ gr/cm}^3$  bzw.  $0.1119 \text{ mgal/m}$ ) Werte im Rahmen von  $\pm 15\%$ . Betrachtet man die Bouguer-Anomalien, so fällt die starke negative Korrelation auf, die auch nicht bei den vollreduzierten Werten (Bouguer minus Moho- und Ivrea-Effekt) verschwinden (Abb. 6.16, Abb. 6.17). Dies könnte wegen der Verwandtschaft der Mohoreduktion mit der isostatischen Reduktion als isostatische Labilität (isostatische Auftriebskräfte müssten vorhanden sein) interpretiert werden. Der Effekt ist aber bis auf eine Streuung von  $6 \text{ mgal}$  (Abb. 6.19) auch durch nicht interpretierte Trends und variierende Dichten zu erklären (Kap. 5.2). Klingelé und Kahle (1982) untersuchen gebietsweise die linearen Korrelationen in der Schweiz. Sie finden ebenfalls eine geringere Dichte im Bündnerland (siehe auch Kap. 5.2). Der Effekt der Reduktion der Anomalien ist direkt in den Kovarianzen (gerechnet nach Cocard) (Abb. 6.20) anhand der grösseren Halbwertsbreiten (ca.  $80 \text{ km}$  gegenüber ca.  $10 \text{ km}$  bei Freiluftanomalien) sichtbar.



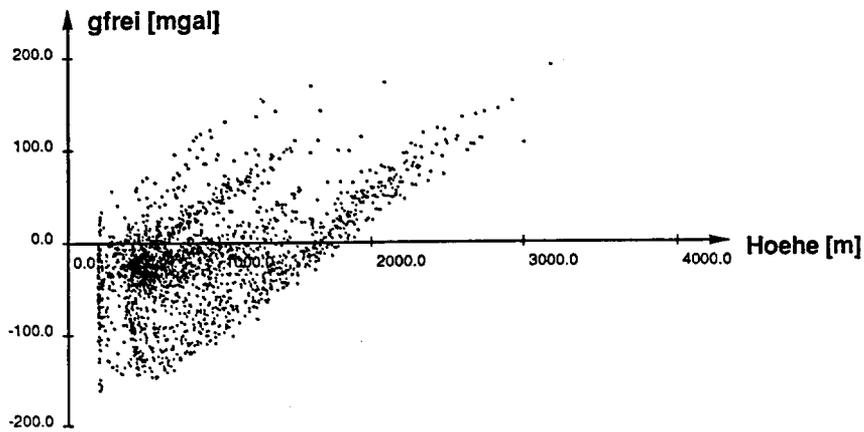


Abb.6.15. Höhenverteilung der Freiluftanomalien ( $g_{\text{frei}}$  [mgal])

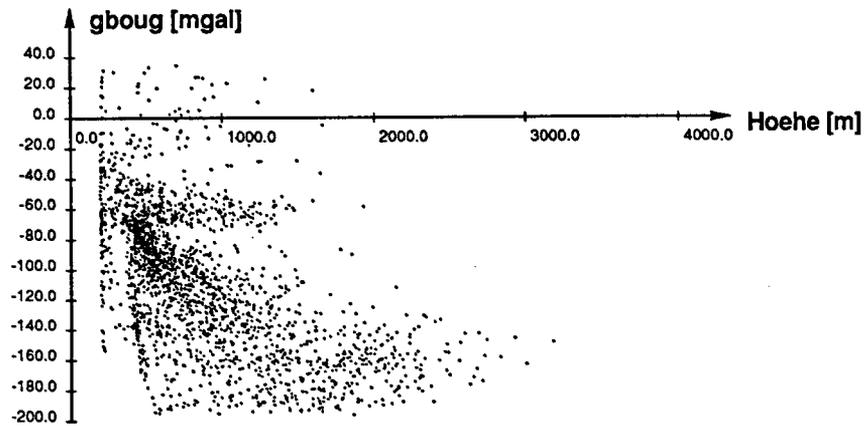


Abb.6.16. Höhenverteilung der Bougueranomalien ( $g_{\text{boug}}$  [mgal])

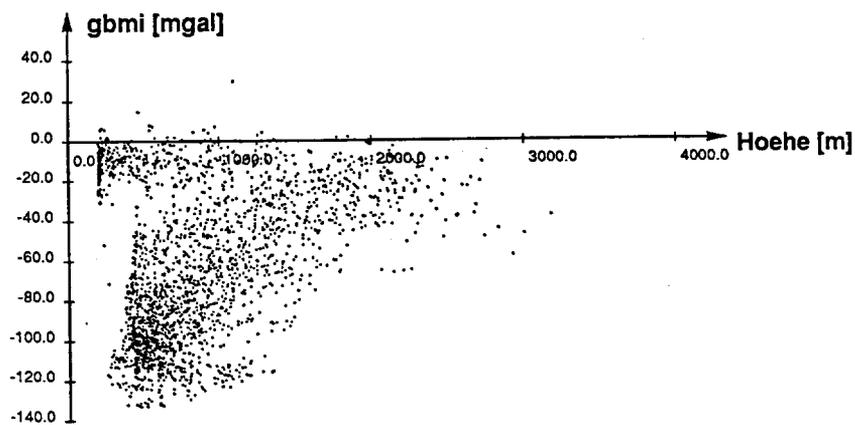


Abb.6.17. Höhenverteilung der um Moho- und Ivrea-Effekt reduzierten Bougueranomalien ( $g_{\text{bmi}}$  [mgal]), Manteldichte:  $3.1 \text{ gr cm}^{-3}$

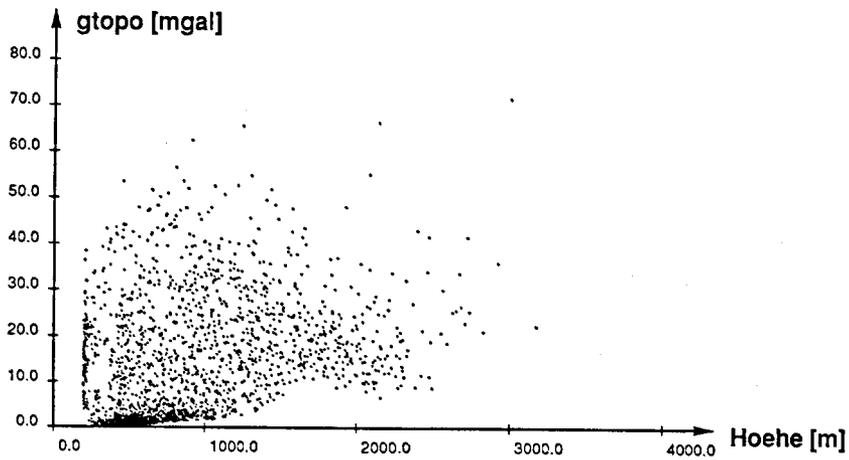


Abb.6.18. Höhenverteilung der Topographie-Effekte ( $g_{topo}$  [mgal]), Dichte:  $2.67 \text{ gr cm}^{-3}$

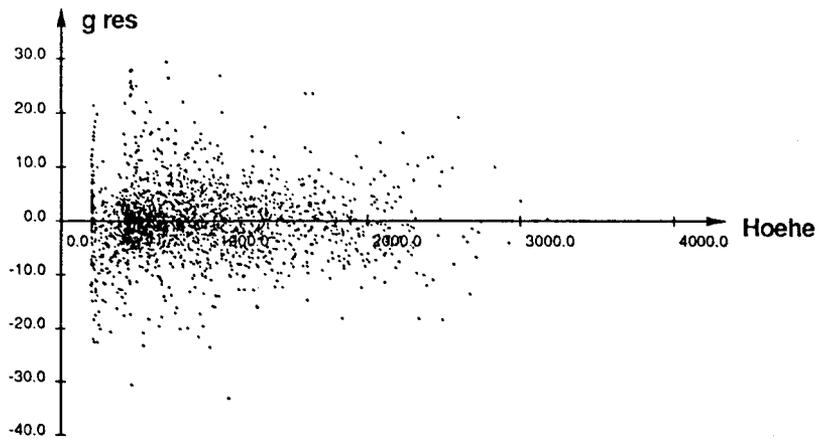


Abb.6.19. Höhenverteilung der Residuen der nach Kap. 5.2 reduzierten Bougueranomalien ( $g_{res}$  [mgal]) (gleiche Figur wie Abb. 5.9)

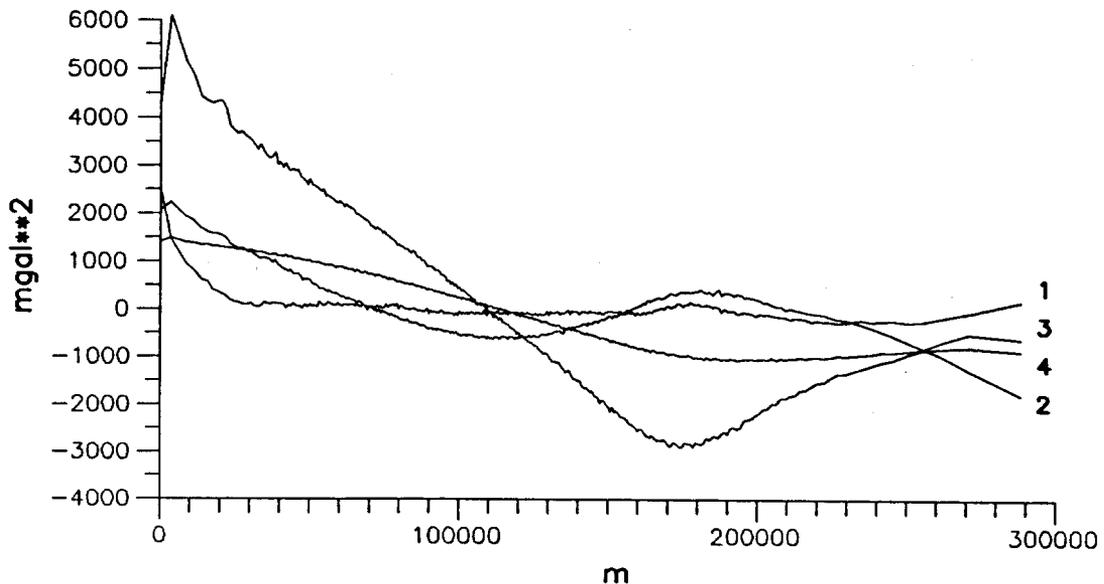


Abb.6.20. Kovarianzen [ $\text{mgal}^2$ ]:  
 1: Freiluft    2: Bouguer  
 3: Moho-reduzierte Bougueranomalie  
 4: Vollreduzierte Bougueranomalie

## 6.2 Zur Berechnung des Geoides

### 6.2.1 Vorgehen bei der Berechnung

Zur Berechnung der Geoidundulation wurde der konventionelle Ansatz verwendet (z.B. Rapp, Rummel, 1975):

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

$N_1$  bezeichnet die Referenzgeoidhöhe (hier GEM10C, siehe Kap 6.1.2)

$N_2$  wird aus den Differenzanomalien durch die Stokesintegration über ein beschränktes Gebiet  $\Gamma$  gewonnen (hier im Umkreis von min.  $15^\circ$  um die Schweiz, Kap.6.1.1).

$N_3$  wird aus den Differenzanomalien durch die Stokesintegration über das Komplement von  $\Gamma$  (ganze Kugel ohne  $\Gamma$ ) gewonnen. Dieser Term wird für den Bereich der Schweiz als linear angenommen. Durch die Datumstransformation (Kap. 6.3.2) wird er eliminiert.

$\Delta g_1$  ist die 'Referenz'- Freiluftanomalie (hier GEM10C)

$\Delta g_2$  ist die 'gemessene' mittlere Freiluftanomalie

$\gamma$  Normalschwere

$$N_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int S(\Delta g_2 - \Delta g_1) d\Omega$$

Die Stokesfunktion  $S$  beinhaltet keinerlei Modifikation und sei zur Erinnerung nochmals angeschrieben. Diese explizite Form ergibt sich aus der in Kap. 3.2.2 hergeleiteten Reihenentwicklung, wenn die Summe erst ab dem zweiten Term läuft (Heiskanen/Moritz, 1967):

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

Die starke Singularität bei  $\psi \rightarrow 0$  ist integrierbar (siehe Kap.6.2.2). Um aber numerischen Problemen vorzubeugen, erfolgt die Berechnung der Geoidhöhen stets in den Ecken der Kompartimente, so dass sich der Berechnungsaufpunkt (Geoid-Punkt) und der Quellpunkt (Ort, auf den sich die mittlere Anomalie bezieht) nie mehr als  $0.7 \cdot$  Kompartimentbreiten nähern (ca. 7 km). Um den Fehler zu korrigieren, der sich durch das Einsetzen des Kompartiment- Mittelpunktes in die Stokes-Formel ergibt, wurde eine abstandsabhängige Formel entwickelt (Kapitel 6.2.4). Sie erlaubt es, das Argument der Stokes-Funktion so zu modifizieren, dass der korrekte 'mittlere' Stokes-Funktionswert resultiert. Die Werte der

Stokes-Funktion werden jeweils explizite berechnet. Ursprünglich war aus Rechengeschwindigkeitsgründen vorgängig eine Tabelle der Stokesfunktion erzeugt worden, in der eine Interpolation für das gewünschte Argument vorgenommen wurde (Kuhn, 1981). Diese Massnahme erwies sich auf Grund der jetzigen Computergeschwindigkeiten nicht mehr als zwingend. Andere Integrationsverfahren wie die Ringintegration (Kearsley, A.H.W., 1986) oder Linienintegrale (Obenson, 1983) wurden hier nicht verwirklicht. Ebenso sind verschiedene Vorschläge gemacht und auch realisiert worden, die dahin zielen, die Daten im Nahbereich des Aufpunktes zu verdichten, um dort eine feinere Integrationsschrittweite verwenden zu können. Zur Interpolation wird meistens ein Kollokationsansatz (Lachapelle, 1972, Alamdari, 1981 u.a) oder Funktionsansätze (Spline) (Forsberg, Kearsley, 1989 u.a) verwendet. Durch die Verwendung eines Referenzgeoides entledigt man sich für lokale Geoidbetrachtungen der Nullpunkts-Probleme, wie sie in Kap. 4.3.2 beschrieben sind. Im Prinzip müsste ein Integrationsgebiet von der Grösse der Auflösung des Referenzmodells (hier 180x180) genügen, um die Systematiken durch die Referenz herausfiltern zu können. Da jedoch gerade in den höheren Termen grössere Fehler auftreten, muss man über diese 2°-Grenze hinausgehen. Im vorliegenden Fall wurde der Radius auf 15° angesetzt (siehe Kap. 6.1.1). Die verbleibenden langwelligen Sytematiken müssen dann erst in der Grössenordnung von sicher mehr als 5° Auflösung wirksam werden. Dies bedeutet jedoch, dass allfällige, von diesem Vernachlässigungsfehler herrührenden Trends im kleinen Gebiet der Schweiz durch die Transformation in das lokale System absorbiert werden.

### 6.2.2 Näherung der Stokes' Funktion

#### Integrabilität der Nullpunktssingularität

Die Singularität der Stokes-Funktion bei  $\psi \rightarrow 0$  ist behebbar. Dies ist sehr einfach durch eine Koordinatentransformation

$$(\theta, \lambda) \rightarrow (r, \alpha) \quad \text{und} \quad \psi(\theta, \lambda) \rightarrow \psi(r, \alpha) \approx \psi(r)$$

zu zeigen, wobei  $r$  der Abstand zum Aufpunkt und  $\alpha$  das entsprechende Azimut darstellt. In einer kleinen Umgebung des Aufpunktes entsprechen  $(r, \alpha)$  ebenen Polarkoordinaten. Zugleich lässt sich  $S(\psi)$  durch

$$S_0(\psi) \approx \frac{2}{\psi} \approx \frac{2R}{r}$$

nähern.

Das Flächenelement wird

$$d\sigma = d\Omega = \cos \theta \, d\theta \, d\lambda \rightarrow \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \approx \frac{1}{R^2} r \, dr \, d\alpha$$

Es wird also

$$\int S(\psi) \, d\sigma \approx \frac{1}{R^2} \int S_0(r) r \, dr \, d\alpha = \frac{2}{R} \int d\alpha \, dr ,$$

was auch für  $r = 0$  endlich bleibt. Für eine kleine Umgebung  $\varepsilon_r$  des Aufpunktes folgt:

$$\int_{\varepsilon_r} S(\psi) \, d\sigma \approx 4 \pi \frac{r}{R}$$

Das Integral strebt sicher gegen 0 für  $r \rightarrow 0$ .

### 6.2.3 Genauigkeitsabschätzungen des Integrals

Hier werden die Fehler der Integration über die Rechtecke untersucht. Ein Ziel ist es, eine einfache Korrekturformel zu entwickeln, die es erlaubt, die Stokes-Funktion auch in den aufpunktnächsten Kompartimenten einfach zu evaluieren. Gängige Methoden, wie die Aufspaltung der 6'x10' Blöcke in kleinere Teile zur Berechnung der Funktion an mehreren Stellen im Kompartiment wurden ursprünglich (Kuhn, 1980) angewendet. Dies sollte durch die erwähnte Korrekturformel umgangen werden können.

#### Genauigkeit der Näherung

Bättig (1983) untersucht den Fehler

$$\frac{\varepsilon(\psi)}{S(\psi)} = \frac{S(\psi) - S_0(\psi)}{S(\psi)}$$

Es ist klar, dass  $\varepsilon(\psi)$  für abnehmende  $\psi$  gegen 0 strebt, da

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} S(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow 0} S_0(\psi)$$

In Abb. 6.22 ist  $\epsilon/S$  gegeben. Es ist ersichtlich, dass für eine Umgebung mit  $r < 20$  km eine obere Schranke von der Form

$$0 \leq \frac{\epsilon}{S} < \epsilon_1 + \epsilon_2 r \approx 2.5 \cdot 10^{-3} + 1.1 \cdot 10^{-6} r$$

gegeben werden kann. Die Näherung ist also zu klein.

Weiter kann man setzen

$$\frac{\epsilon}{S} = \frac{\epsilon}{S_0} + O\left(\left(\frac{\epsilon}{S_0}\right)^2\right)$$

Dies gilt im Bereich bis  $r \approx 20$  km auf besser als  $3 \cdot 10^{-3}$ .

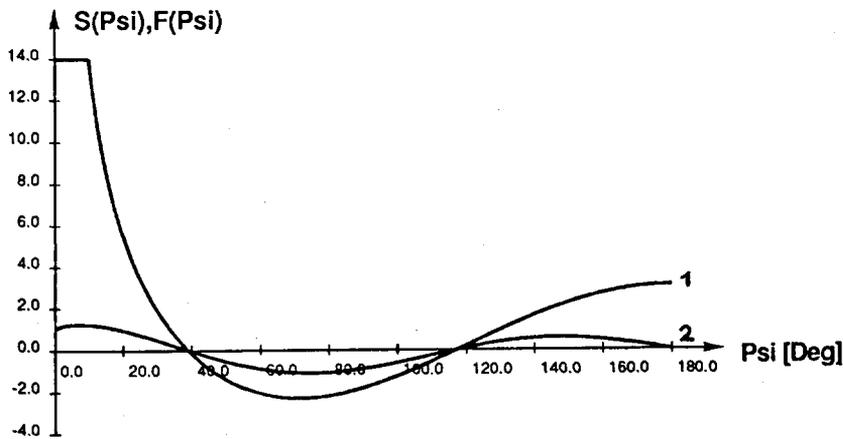


Abb. 6.21 1: Stokes' Funktion  $S(\psi)$  ; 2:  $F(\psi) = 1/2 \sin \psi S(\psi)$

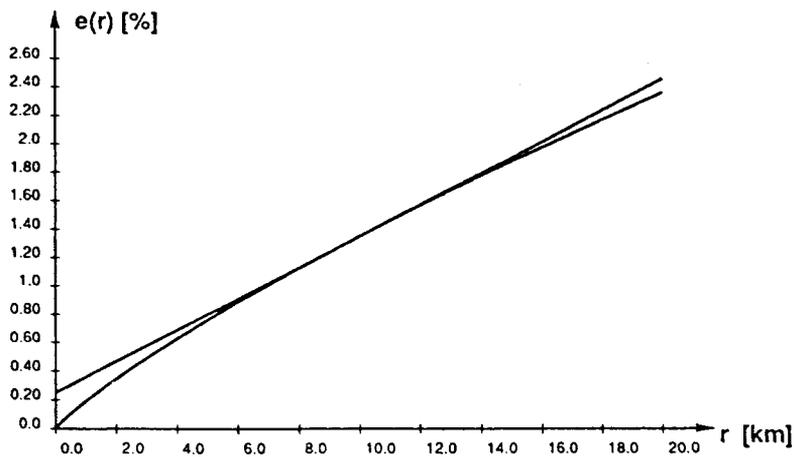


Abb. 6.22 Relativer Fehler der Näherung  $S_0$  mit einer linearen oberen Schranke

### Integration über quadratische Kompartimente

Zur numerischen Behandlung der Nahzone führen wir die oben beschriebene Koordinatentransformation durch. Dabei soll aber die Struktur der Integrationsgebiete, d.h., das  $6' \times 10'$  Raster nicht aufgegeben werden. Dies bewirkt etwas kompliziertere Integrationsränder, hat aber den Vorteil, dass Abschätzungen und Formeln direkt im Programm integriert werden können, ohne die gegebenen Schweredaten ändern zu müssen.

Vom gesamten Integral

$$N = \frac{R}{4\pi \gamma} \sum_k \Delta g_k \int_{Q_k} S(\psi) d\sigma$$

betrachten wir zunächst lediglich das Integral der Stokes-Funktion über ein Kompartiment im Nahbereich. Da wir die Betrachtungen in einer kleinen Umgebung des Aufpunktes durchführen, werden die Stokes-Funktion als auch die Quadratflächen in einer ebenen Näherung verwendet. Zudem werden die Effekte aus rechnerischen Gründen, allerdings o.E.d.A., nur in den diagonal angeordneten Grundquadraten berechnet. Integrale über Kompartimente, die nicht auf der Diagonalen liegen, lassen sich aus Diagonalkompartimenten ohne weiteres berechnen. Der Index  $k$  bezeichne nun die Lage der aufpunktnächsten Ecke gegenüber dem Aufpunkt  $P$  (siehe Abb. 6.23). Durch die Lage auf der Diagonale kann das Integral auf das Dreieck  $D_k$  beschränkt bleiben. Wir erhalten somit:

$$I_k = \int_{Q_k} S(\psi) d\sigma \approx 2 \cdot \int_{D_k} S_0(\psi) d\sigma = \frac{4}{R} \int_{\alpha_k}^{\pi/4} (r_2(\alpha) - r_1(\alpha)) d\alpha$$

Aus der Abb. 6.23 ist ersichtlich, dass

$$t_k = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{k}{k+1}$$

$$r_1(\alpha) = \frac{k a}{\sin \alpha} \quad ; \quad r_2(\alpha) = \frac{(k+1) a}{\cos \alpha}$$

Weiter sei vorübergehend die Abkürzung

$$f_0 = \ln \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) \approx 1.7628$$

eingeführt.

Damit erhält man das geschlossene Integral:

$$I_k = \frac{2a}{R} \left( (2k+1)f_0 - (k+1) \ln \frac{\sqrt{1+t_k^2} + t_k}{\sqrt{1+t_k^2} - t_k} - k \ln \frac{\sqrt{1+t_k^2} + 1}{\sqrt{1+t_k^2} - 1} \right)$$

oder

$$I_k = \frac{2a}{R} f_k$$

Es ist direkt ersichtlich, dass das Integral linear von der Seitenlänge des Quadrates abhängt. Dies trifft allerdings nur dank der  $1/r$  Abnahme der Näherung  $S_0$  zu. Die Funktion  $f_k$  ist in Abb. 6.24. dargestellt. Für die dem Aufpunkt nächsten Kompartimente erhält man

$$I_0 = 1.7628 \frac{2a}{R}$$

$$I_1 = 0.4763 \frac{2a}{R}$$

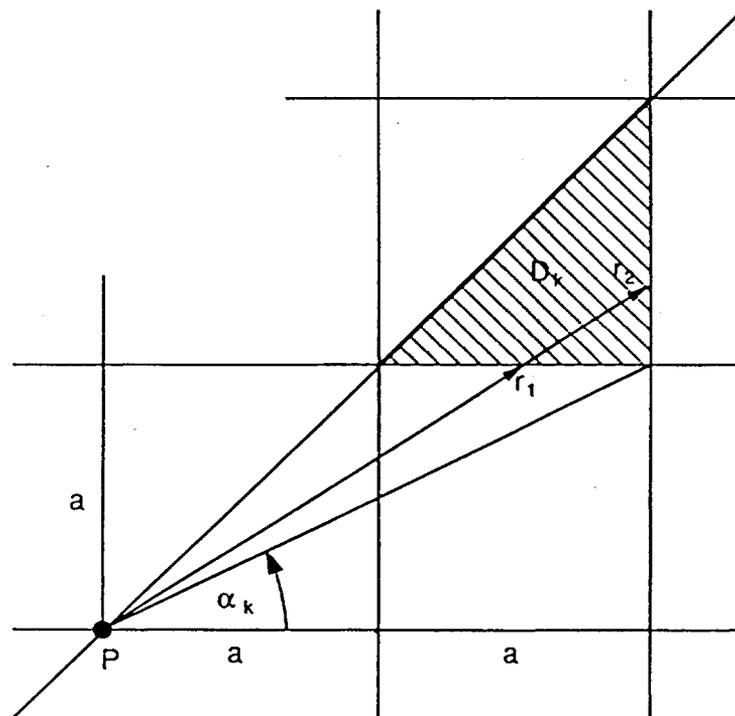


Abb. 6.23 Zur Integration der Stokes' Funktion über quadratische Kompartimente

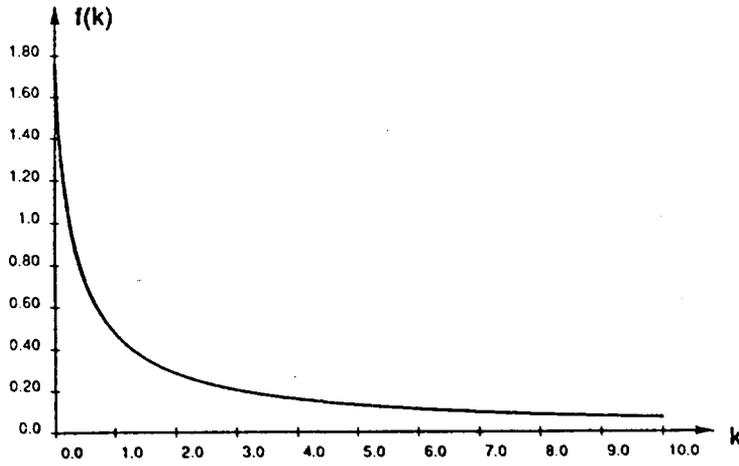


Abb. 6.24 Funktion  $f_k$  ( $k$  bezeichnet den Abstand in Quadratseiteneinheiten)

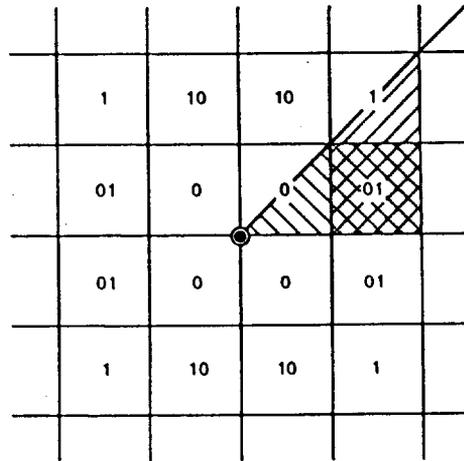


Abb. 6.25 Zur Berechnung von Nicht-Diagonalelementen

Für das Nichtdiagonal-Element  $I_{01}$  erhält man nach der Abbildung 6.25

$$I_0(2a) = 2 I_{01}(a) + I_0(a) + I_1(a)$$

Das Integral  $I$  ist linear in der Dimension des Integrationsquadrates  $a$

$$I_0(2a) = 2 I_0(a) \quad \text{also:} \quad I_{01} = (I_0 - I_1) / 2$$

oder mit obigen Zahlen:

$$I_{01} = 0.6433 \frac{2a}{R}$$

### 6.2.4 Korrektur der einfachen Integration

#### Genauigkeit der Integration im Bereich der Näherung

Wir untersuchen den Fehler, der durch die Integration der Näherung  $S_0$  entsteht:

$$\rho = \frac{\int S \, d\sigma - \int S_0 \, d\sigma}{\int S_0 \, d\sigma} = \frac{\int \frac{\varepsilon}{S_0} S_0 \, d\sigma}{\int S_0 \, d\sigma}$$

Mit der oberen Schranke für den Fehler

$$\frac{\varepsilon}{S} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 r \approx 2.5 \cdot 10^{-3} + 1.1 \cdot 10^{-6} r$$

der Definition des Mittelwertes

$$\overline{S_0} = \frac{\int S_0 \, d\sigma}{\int d\sigma}$$

und den Integralen

$$\int S_0 \, d\sigma \approx I_k = \frac{2a}{R} f_k$$

$$\int d\sigma = \frac{a^2}{R^2}$$

erhält man

$$\rho = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{2R}{S_0}$$

oder angewendet auf die Integrationen  $I_k$  über Quadrate der Kantenlänge  $a$ :

$$\rho_k(a) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{a}{f_k}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= 2.5 \cdot 10^{-3} \\
 \epsilon_2 &= 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1} \\
 f_0 &= 1.7628 \\
 a &= 10000 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass bei der Verwendung der Näherungsformel zur Integration des nächstliegenden Quadrates der Seitenlänge 10 km das Resultat lediglich 0.8 % zu klein ausfallen würde.

### Fehler bei der Verwendung von Mittelwerten im Nahbereich

Es stellt sich weiter die Frage, wie weit man zur Evaluation der Stokes-Funktion einen mittleren Abstand  $m_k$  (Abstand Aufpunkt - Mittelpunkt des Quell-Quadrates) verwenden darf. Der Fehler wird hier abgeschätzt. Gesucht ist der Fehler  $\epsilon_k$

$$\epsilon_k = \int S \, d\sigma - S(m_k) \Delta\sigma$$

Die Approximation  $S \approx S_0$  und die Integrationsformeln der obigen Abschnitte erlauben eine explizite Rechnung:

$$\epsilon_k = \int S_0 \, d\sigma - S_0(m_k) \Delta\sigma = \frac{2a}{R} f_k - \frac{2R}{m_k} \frac{a^2}{R^2}$$

Der Mittelpunktsabstand ist:

$$m_k = \frac{a}{2} (1 + 2k)$$

Die Verwendung des Mittelpunktes zur Abstandsberechnung bewirkt bei der Integration einen relativen Fehler von (siehe Abb.6.26):

$$e(k) = \frac{\epsilon_k}{I_k} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{(1+2k) f_k}$$

Es ist interessant zu bemerken, dass der relative Fehler wiederum unabhängig von der Quadratdimension ist. Für die vier nächstliegenden Quadrate ( $k=0$ ) würde der Fehler ca. 20% betragen (vgl. Abb. 6.26).

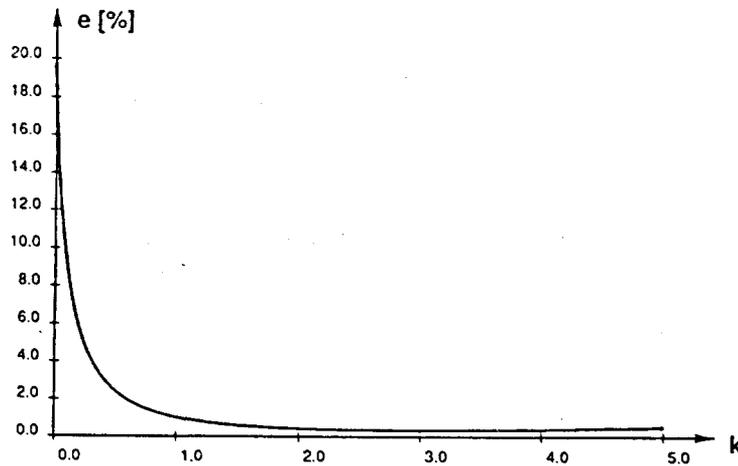


Abb. 6.26 Fehler bei Verwendung des Mittelpunktwertes in Abhängigkeit des Kompartimentabstandes (in Einheiten der Quadratseitenlänge).  $k=0$  bezeichnet das aufpunktnächste Kompartiment.

Man kann nun weiter fragen, wie gross der Abstand  $m_{k0}$  sein müsste, um einen korrekten Wert der Stokesfunktion zu liefern nach der Bedingung:

$$\int S \, d\sigma_k = S(m_{k0}) \, \Delta\sigma$$

Mit den üblichen Näherungen und Abkürzungen erhalten wir:

$$I_k = \frac{2R}{m_{k0}} \frac{a^2}{R^2}$$

und damit den gesuchten Abstand

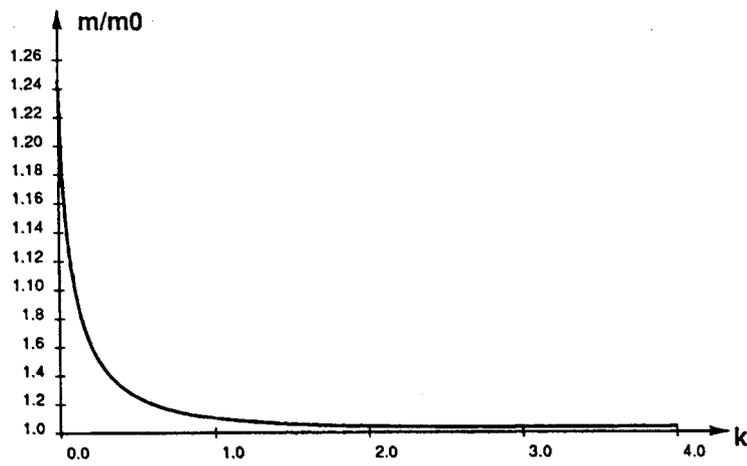
$$m_{k0} = \frac{a}{f_k}$$

Das Verhältnis zum Mittelpunktsabstand wird wiederum unabhängig von der Quadratdimension (dieses Verhältnis ist in Abb.6.27 abgebildet):

$$\frac{m_k}{m_{k0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+2k) f_k$$

Damit hat man eine einfache Korrekturformel gefunden, die es erlaubt, den Effekt des Mittelpunktfehlers zu reduzieren. Die Stokesfunktion wird nicht im Abstand  $m_k$  evaluiert, sondern bei  $m_{k0}$ . Diese Formel wurde im Bereich der nächstliegenden Kompartimente zur

Berechnung des Geoides angewendet.



**Abb. 6.27** Verhältnis der beiden Quellpunktabstände in Abhängigkeit des Kompartimentabstandes (in Einheiten der Quadratseitenlänge).  $k=0$  bezeichnet das aufpunktnächste Kompartiment.

### 6.2.5 Beziehung zwischen Höhenanomalie und Geoidundulation

Um die eigentlichen Geoidundulationen  $N$  zu erhalten, müssen sie mit den Höhenanomalien in Beziehung gesetzt werden. Dazu werden 4 entsprechende Punkte eingeführt:

- A Oberflächenpunkt
- B Telluroidpunkt
- P Geoidpunkt
- Q Ellipsoidpunkt

Damit hat man (siehe z.B. Heiskanen/Moritz, 1967) für die verschiedenen Höhen:

- $h$  QA Ellipsoidische Höhe
- $H^*$  QB Normalhöhe
- $\zeta$  BA Höhenanomalie
- $H$  PA Orthometrische Höhe
- $N$  QP Geoidundulation

Dabei gilt

$$h = H + N = H^* + \zeta$$

Die Bezeichnungen der Potentiale und der entsprechenden Schwerewerte sind:

- $W$  reales Potential ;  $g$  entsprechender Schwerewert
- $U$  Normalpotential ;  $\gamma$  entsprechender Normalschwerewert
- $T$  Störpotential

Wir gehen von einer Linearisierung der Störpotentiale (dabei ist die Definition  $U_B = W_A$  zu beachten) aus und bilden:

$$T_A - T_P = W_A - U_A - W_P + U_P = \gamma_B \zeta - \gamma_Q N$$

Diese Differenz kann umgeschrieben werden in:

$$T_A - T_P = (W_A - W_P) - (U_A - U_P) = -\int g dH + \int \gamma dH$$

Die Integrale können auf Grund des Mittelwertsatzes der Integralrechnung als

$$1/2 (g_A + g_P) H'$$

geschrieben werden. In linearer Näherung wird  $H' = H$  und damit

$$1/2 (g_A + g_P) H$$

und

$$1/2 (\gamma_A + \gamma_P) H$$

$g_P$  wird aus den Oberflächenwerten in folgender Weise reduziert

$$g_P = g_A - t_A - \gamma_A + \gamma_P + t_P$$

Damit wird

$$T_A - T_P = -\int g dH + \int \gamma dH = -1/2 (2g_A - 2\gamma_A - t_A + t_P) H$$

Für die Freiluftanomalie wird gesetzt:

$$\Delta g_f = g_A - \gamma_B$$

mit dem Freiluftgradienten  $v$  wird:

$$\gamma_A \approx \gamma_B + v \zeta$$

$t_A, t_P$  : sind die 'Topographischen Effekte' (Topographie + Bouguereffekt) an den jeweiligen Punkten A und P. Die Effekte haben 'oben' (A) und 'unten' (P) entgegengesetztes Vorzeichen und sind dem Betrage nach ungefähr dem Bouguereffekt  $b$  gleich:

$$t_A \approx -t_P \approx b$$

Die Bougueranomale ist dann

$$\Delta g_B = \Delta g_f - b$$

Damit kann man schreiben:

$$-\int g dH + \int \gamma dH = -\Delta g_B H + v \zeta H = \gamma_B \zeta - \gamma_Q N$$

oder

$$\delta N = N - \zeta = \frac{\Delta g_B - 2 v N}{\gamma_Q} H$$

$v$  : Vertikalgradient der Normalschwere (= Freiluftgradient  $\approx -0.3$  mgal/m)

Diese Näherung weicht nur ganz minim von der in Heiskanen/Moritz (1967) gegebenen Näherungsformel ab. Der Unterschied ist belanglos, da beide Formeln ohnehin als Näherungen zu betrachten sind. In Abb. 6.28 ist  $-\delta N$  aufgetragen.

### Anwendung bei der Geoidbestimmung

Da wir bei der Berechnung des Stokesgeoides die topographischen Massen in den Freiluftanomalien nicht wegreduziert haben, wir uns aber auf eine Kugel (Ellipsoid) beziehen, bestimmt man eine dem Quasigeoid sehr nahe liegende Fläche, die, um das Geoid selbst zu erhalten, um die Differenz  $\delta N$  korrigiert werden muss. Also

$$N = N_{\text{Stokes}} + \delta N$$

### Anwendung zur orthometrischen Korrektur

Sehr interessant ist nun die Anwendung der Näherungsformel zur Bestimmung von orthometrischen Korrekturen, wo ja bekanntlich genau diese Differenz  $\delta N$  auftaucht. Für Abschätzungen lässt sie sich noch weiter vereinfachen, indem der Term  $2vN$  vernachlässigt wird. Dies ist wohl für das Gebiet der Schweiz möglich, da  $\Delta N < 10$  m und damit der

$$\text{Fehler an } \delta N [\text{mm}] < 6 \cdot H [\text{km}]$$

bleibt. Als Faustformel für die Korrektur der orthometrischen Höhe zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$  erhält man also:

$$\Delta H_{xy} \approx \frac{1}{\bar{\gamma}_{xy}} \left( \Delta g_B(y) H_y - \Delta g_B(x) H_x \right)$$

Da in der Schweiz ein relativ guter Satz von Bouguer-Anomalien vorhanden ist und die Bouguer-Anomalien gegenüber den Freiluft-Anomalien stark geglättet sind, können die Korrekturen durch Interpolation an beliebigen Stellen vorgenommen werden.

Da die Normalschwere über den Breitenbereich der Schweiz lediglich in der Grössenordnung

$$\frac{\delta \gamma_Q}{\gamma_Q} < 10^{-4}$$

variiert, kann für die Normalschwere auch ein fester Wert gesetzt werden z.B.:

$$\text{GRS80: } \gamma_{xy}(47^\circ) = 980794 \text{ mgal}$$

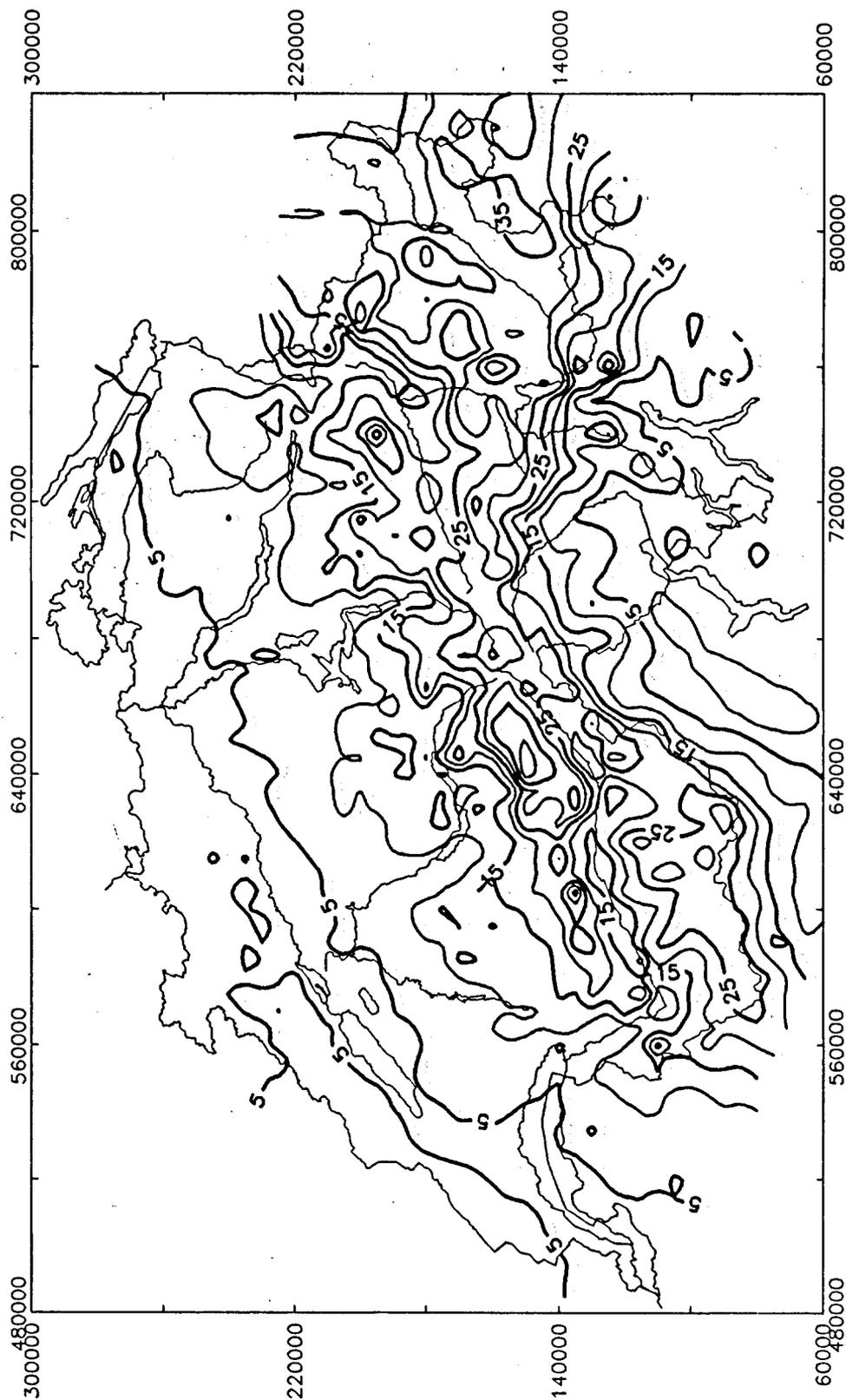


Abb. 6.28 Unterschied zwischen der Höhenanomalie und der Geoidundulation in [cm]

## 6.3 Gravimetrisches Geoid

### 6.3.1 Verschiedene Geoide

Die Geoide wurden nach dem in 6.2.1 beschriebenen Verfahren berechnet. Hier werden die aus verschiedenen Datensätzen berechneten Geoide sowie ihre Differenzen zum Astrogeodätischen Geoid dargestellt. Die Differenzen sind durch das unterschiedliche Datum der beiden Geoide zu erklären. In Kapitel 6.3.2 werden Transformationsparameter bestimmt, die zum Übergang vom GRS80 auf das CH-Datum verwendet werden.

Das nur aus GEM10C und den europäischen Daten gerechnete Geoid (Abb. 6.29) ist etwas glatter als die beiden anderen Versionen, die lokale Daten berücksichtigen. Die definitive Version wurde mit GEM10C, den europäischen Daten sowie den mittleren Schweizer Daten, ergänzt mit aus Bouguer-Anomalien interpolierten Werten, berechnet (Abb. 6.30). Die Abb. 6.31 zeigt den durch Einführen der lokalen Daten entstehenden Effekt im Geoid (Differenz: definitive Version minus Geoid aus GEM10c und europäischen Daten). Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die im Wallis fehlenden europäischen Daten und durch GEM10C-Werte ersetzt (Kap. 6.1.1) durch die lokalen Schwerewerte korrigiert werden. Im zentralen Teil des Tessin und der Ivrea-Zone vermögen die europäischen Werte nicht genügend die oft negativ mit der Höhe korrelierten Freiluftanomalien zu repräsentieren (siehe Bemerkung Kap. 6.1.5).

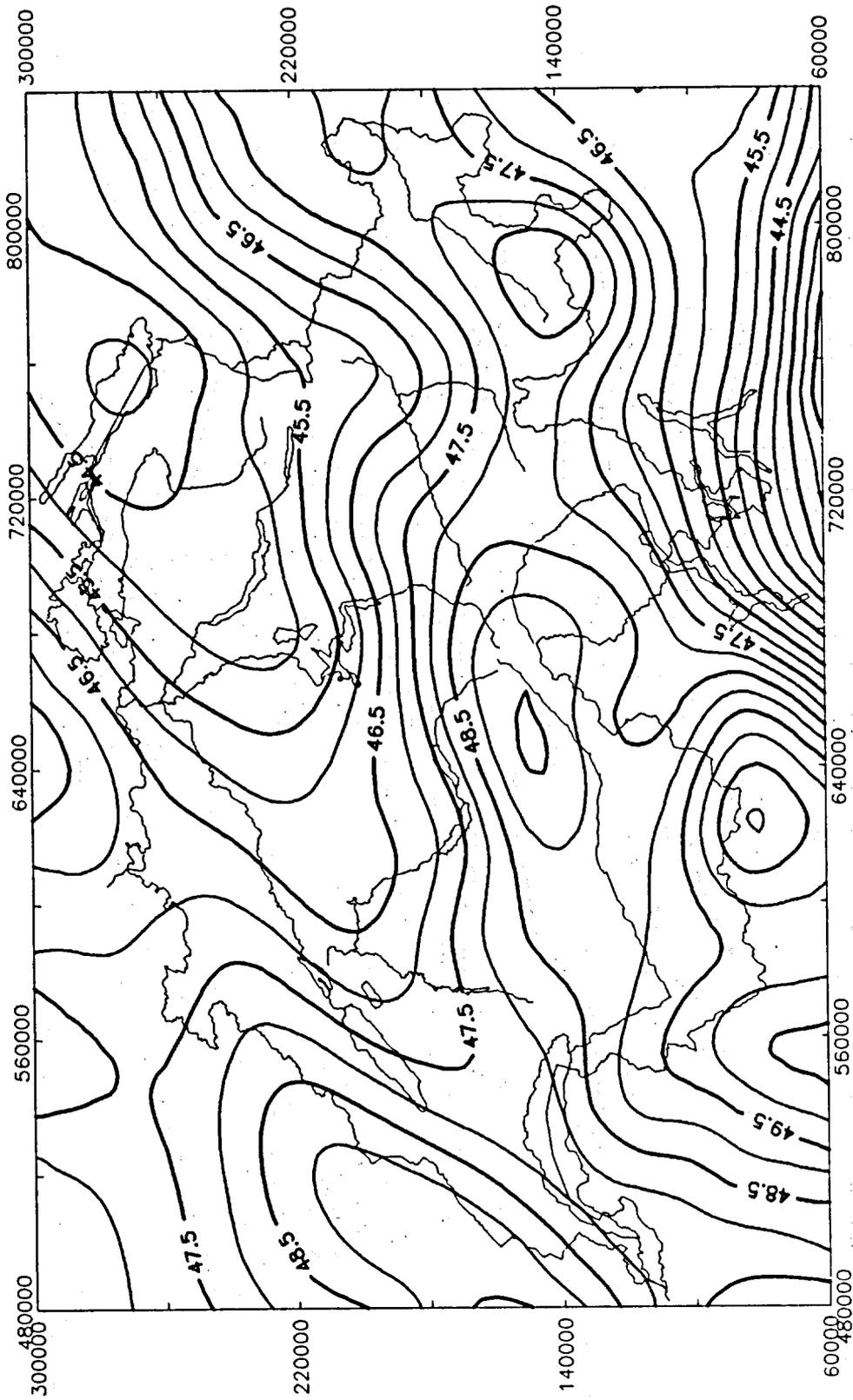


Abb.6.29. Geoid aus GEM10C und europäischen Daten (GRS80) [m]

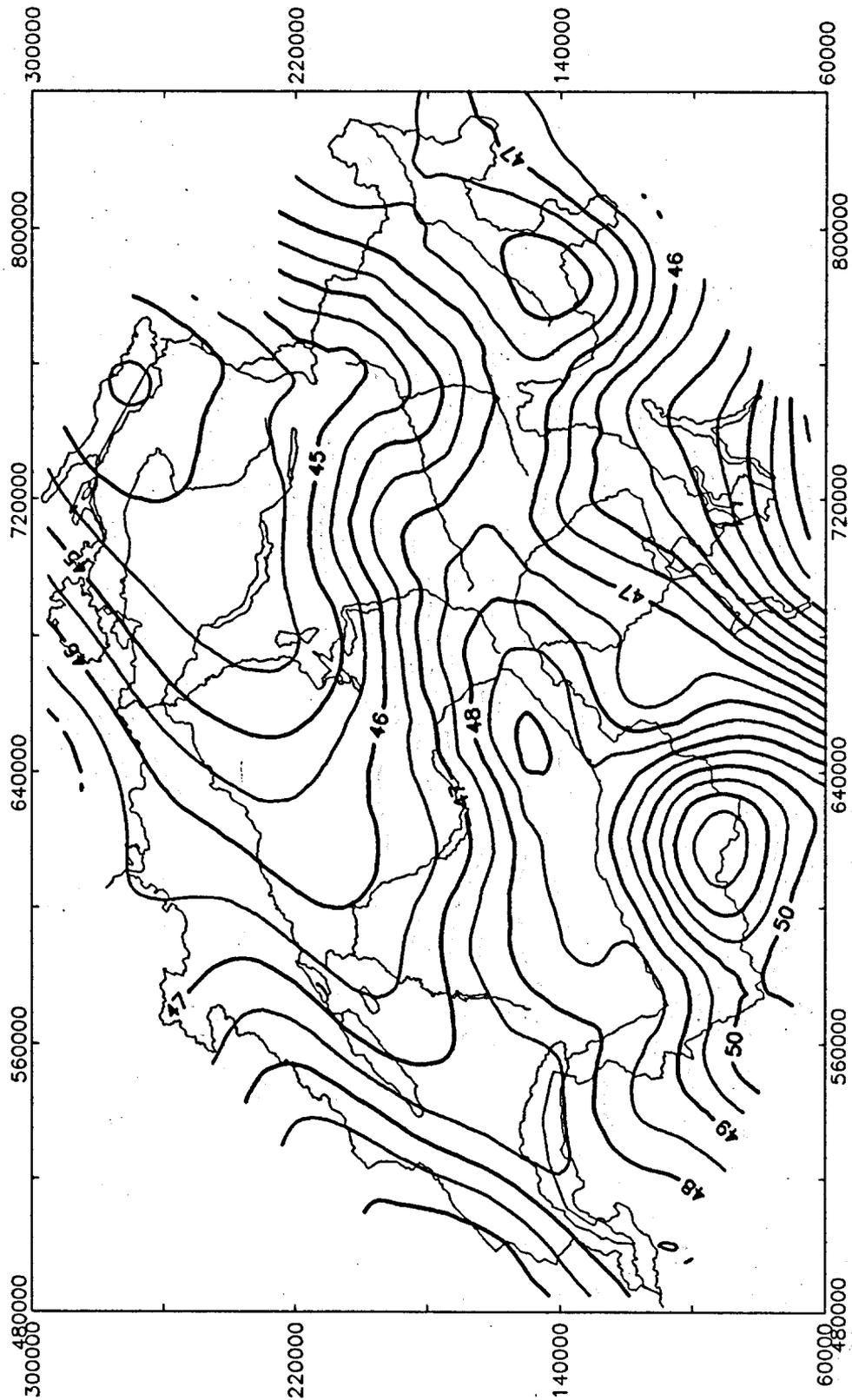


Abb.6.30. Geoid aus GEM10C, europäischen Daten, mittleren Schweizer Daten und aus Bougueranomalien interpolierten Daten (GRS80) [m]

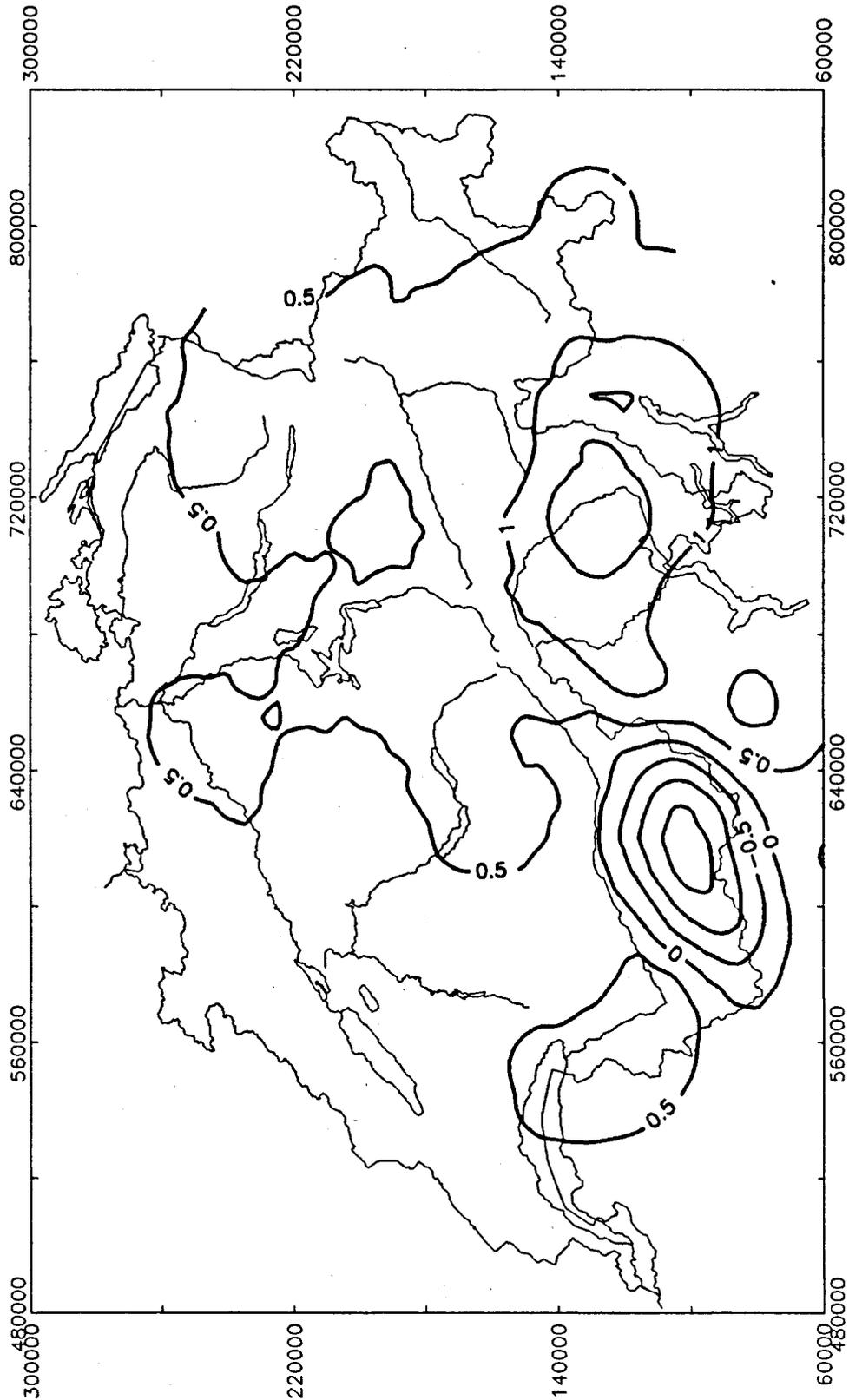
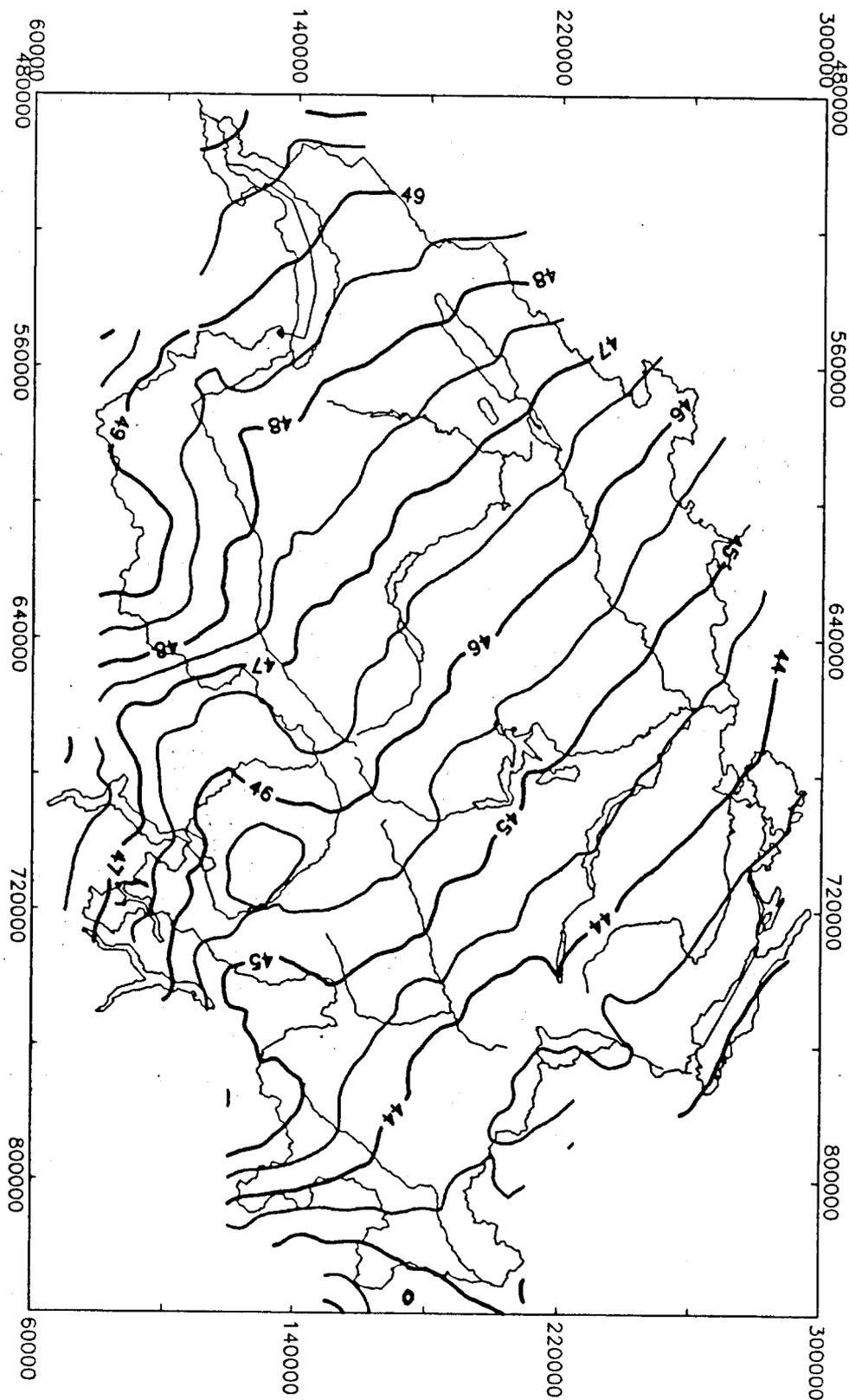


Abb.6.31. Differenz: Geoid nur aus GEM10C und europäischen Daten gerechnet minus Geoid mit Berücksichtigung der Schweizer Daten (GRS80) [m]



**Abb.6.32. Differenz: Gerechnet mit GEM10C, europäischen Daten, mittleren Schweizer Daten und mit aus Bougueranomalien interpolierten Daten (GRS80) - Astro-Geoid (CH-Datum) [m]**

### 6.3.2 Bestimmung von Datumparametern

Da das Astro-Geoid im Schweizer Datum gegeben ist [Bessel-Ellipsoid,1903], ist die Möglichkeit gegeben, das Schweizer System direkt im GRS80 zu lagern. Geht man davon aus, dass das gravimetrische Geoid die (im Rahmen der Genauigkeit) gleiche Fläche wie das Astro-Geoid darstellen sollte, so kann man argumentieren, dass die Differenz in der Geoidundulation lediglich durch die Verwendung unterschiedlicher Koordinatensysteme zustandekommt. Wir setzen einen Koordinatenübergang in ellipsoidischen Koordinaten an, um die Differenzen (Kap. 6.3.1) zu eliminieren. In Heiskanen und Moritz (1967, Gl. 5-54 bis 5-59) sind die benötigten Gleichungen hergeleitet.

Wir setzen vorübergehend

$$s = \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos \Delta\lambda$$

damit wird

$$\begin{aligned} \delta N = & - a (\cos \phi_0 \sin \phi - \sin \phi_0 \cos \phi \cos \Delta\lambda) \cdot & \delta \xi_0 \\ & - a \cos \phi \sin \Delta\lambda \cdot & \delta \eta_0 \\ & + s & \delta N_0 \\ & + (s - 1) \cdot & \delta a \\ & + a (s \cdot \sin^2 \phi_0 + \sin^2 \phi - 2 \sin \phi_0 \cos \phi) \cdot & \delta f \end{aligned}$$

Darin bedeuten:

$\delta N$	Differenz der Geoidhöhen (hier GRS80 - CH)		
$\delta \xi_0$	Korrektur an $\phi_0$		
$\delta \eta_0$	Korrektur an $\lambda_0$		
$\delta N_0$	Höhenoffset am CH-Datum		
$\delta a$	Differenz der grossen Ellipsoidhalbachsen (hier GRS80 - CH)		
$\delta f$	Differenz der Ellipsoidabplattungen (hier GRS80 - CH)		
$a$	Grosse Halbachse	CH-System	: 6377397.155 m
$\phi_0$	Nullpunktsbreite	CH-System	: 46° 57' 8".66
$\lambda_0$	Nullpunktslänge	CH-System	: 7° 26' 22".50
$\Delta\lambda$	$\lambda - \lambda_0$		

Die Parameter  $\delta \xi_0$ ,  $\delta \eta_0$ ,  $\delta N_0$ ,  $\delta a$ ,  $\delta f$  können durch eine LSQ Schätzung bestimmt werden. Allerdings sind die geometrischen Ellipsoidparameter ( $a$  und  $f$ ) sehr schlecht definierbar, da die

Schweiz für eine echte Massstabsbestimmung viel zu klein ist. In der Ausgleichung werden demzufolge die Differenzen  $\delta a$  und  $\delta f$  festgehalten:

$$\begin{aligned}\delta f &= f_{\text{GRS80}} - f_{\text{CH}} = 1/298.257 - 1/299.15281 \\ \delta a &= a_{\text{GRS80}} - a_{\text{CH}} = 6378137 - 6377397.155 \text{ m}\end{aligned}$$

Die ellipsoidischen Transformationsparameter lassen sich in kartesische, geozentrische Translationen umrechnen. Die expliziten Formeln stammen aus Heiskanen und Moritz (1967) und lauten mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}k &= \delta N_0 + \delta a + a \sin^2 \phi_0 \delta f \\ \delta x_0 &= -a \sin \phi_0 \cos \lambda_0 \delta \xi_0 - a \sin \lambda_0 \delta \eta_0 - \cos \phi_0 \cos \lambda_0 k \\ \delta y_0 &= -a \sin \phi_0 \sin \lambda_0 \delta \xi_0 + a \cos \lambda_0 \delta \eta_0 - \cos \phi_0 \sin \lambda_0 k \\ \delta z_0 &= a \cos \phi_0 \delta \xi_0 - \sin \phi_0 k + 2 a \sin \phi_0 \delta f\end{aligned}$$

Um Anhaltspunkte über die Effekte der Interpolation von Bouguer-Anomalien zu erhalten, wurden zwei Transformationsparametersätze bestimmt. Die linke Kolonne gibt die Parameter für das aus GEM10C, europäischen und mittleren schweizerischen Daten berechnete Geoid im GRS80. In den Daten, die zur rechten Kolonne führten, sind schlechte mittlere Daten durch aus Bouguer-Anomalien interpolierte Werte ersetzt. Die Ausgleichung liefert die drei ellipsoidischen Lagerungsparameter  $\delta \xi_0$ ,  $\delta \eta_0$ ,  $\delta N_0$  sowie die geozentrischen Translationen  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$

	nur Freiluft Anomalien	mit Bouguer Anomalien
$\delta \xi_0 =$	3.62 ± 0.01 sec	3.48 ± 0.02 sec
$\delta \eta_0 =$	3.54 ± 0.01 sec	3.46 ± 0.02 sec
$\delta N_0 =$	46.97 ± 0.05 m	46.83 ± 0.06 m

und in kartesischen Koordinaten:

$\delta x_0 =$	309.2 ± 0.3 m	312.9 ± 0.4 m
$\delta y_0 =$	150.9 ± 0.6 m	148.6 ± 0.7 m
$\delta z_0 =$	606.9 ± 0.3 m	603.9 ± 0.3 m

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird:

$$s_0 = \quad 27 \quad \text{cm} \qquad \qquad \qquad 30 \quad \text{cm}$$

Werden zur Transformation nur Punkte im Mittelland und in den Voralpen verwendet, so findet man eine Übereinstimmung von 16 cm.

Die Ausgleichung erfolgte mit der Annahme, dass die Geoidhöhen unkorreliert seien, was die

---

Angabe einer relativ hohen Genauigkeit der Parameter bewirkt. In den Abbildungen 6.33 und 6.34 sind die Residuen nach der Transformation dargestellt. Sie verdeutlichen die bereits in Kap.6.3.1 beschriebenen Datenprobleme im Gebiet des Monte Rosa (Kt. Wallis) und in der Ivrea Zone. Die Transformationsgrößen sind ebenfalls für die beiden Rechnungsvarianten aufgetragen (6.35 und 6.36). Die im wesentlichen als schiefe Ebene zu interpretierende Form unterscheidet sich bei beiden Varianten nur im Absolutbetrag und in der Neigung. Die Unterschiede betragen über die Schweiz gesehen doch immerhin gegen 20 cm (Abb. 6.37). Die Lagerung ist also nur in diesem Rahmen gesichert. Um diese Geoidbestimmung z.B. mit GPS zu stützen, müsste mindestens eine Höhengenaugigkeit von ca. 10 cm über die ganze Schweiz erreicht werden.

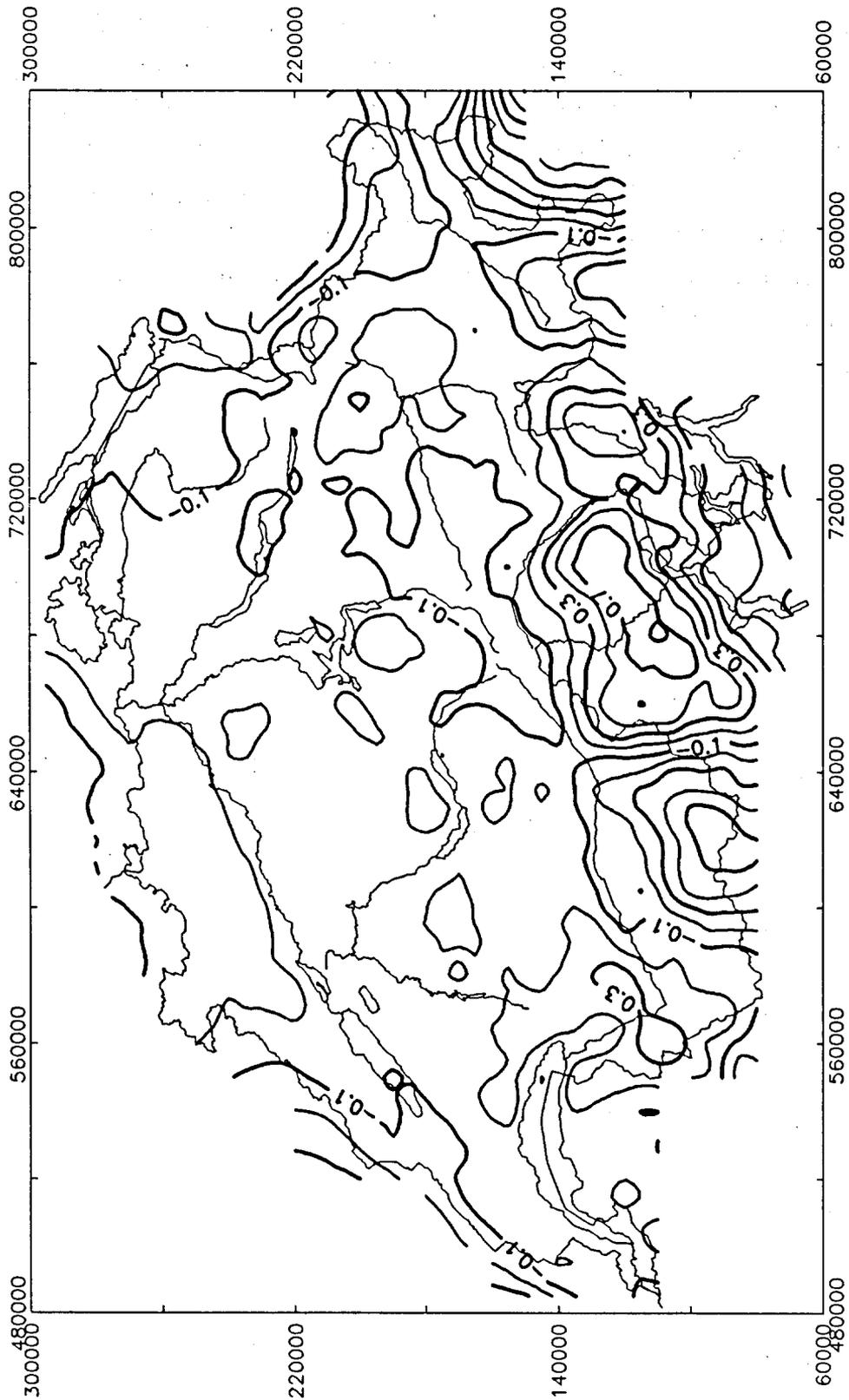


Abb.6.33. Residuen nach der Transformation auf das Astro-Geoid: Gerechnet mit GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten (GRS80) [m]

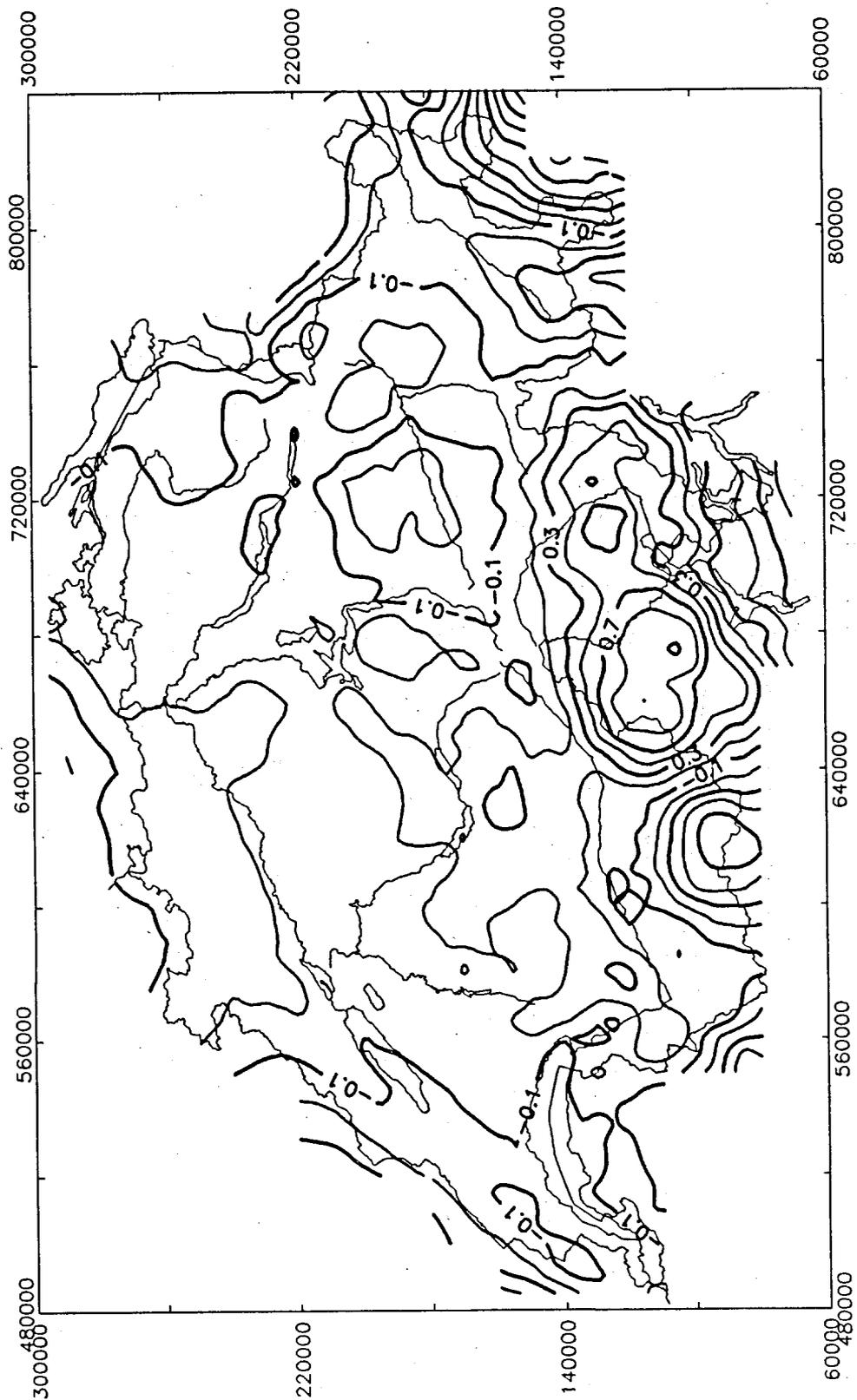


Abb.6.34. Residuen nach der Transformation auf das Astro-Geoid: Gerechnet mit GEM10C, europäischen Daten, mittleren Schweizer Daten und mit aus Bouguer-Anomalien interpolierten Daten (GRS80) [m]

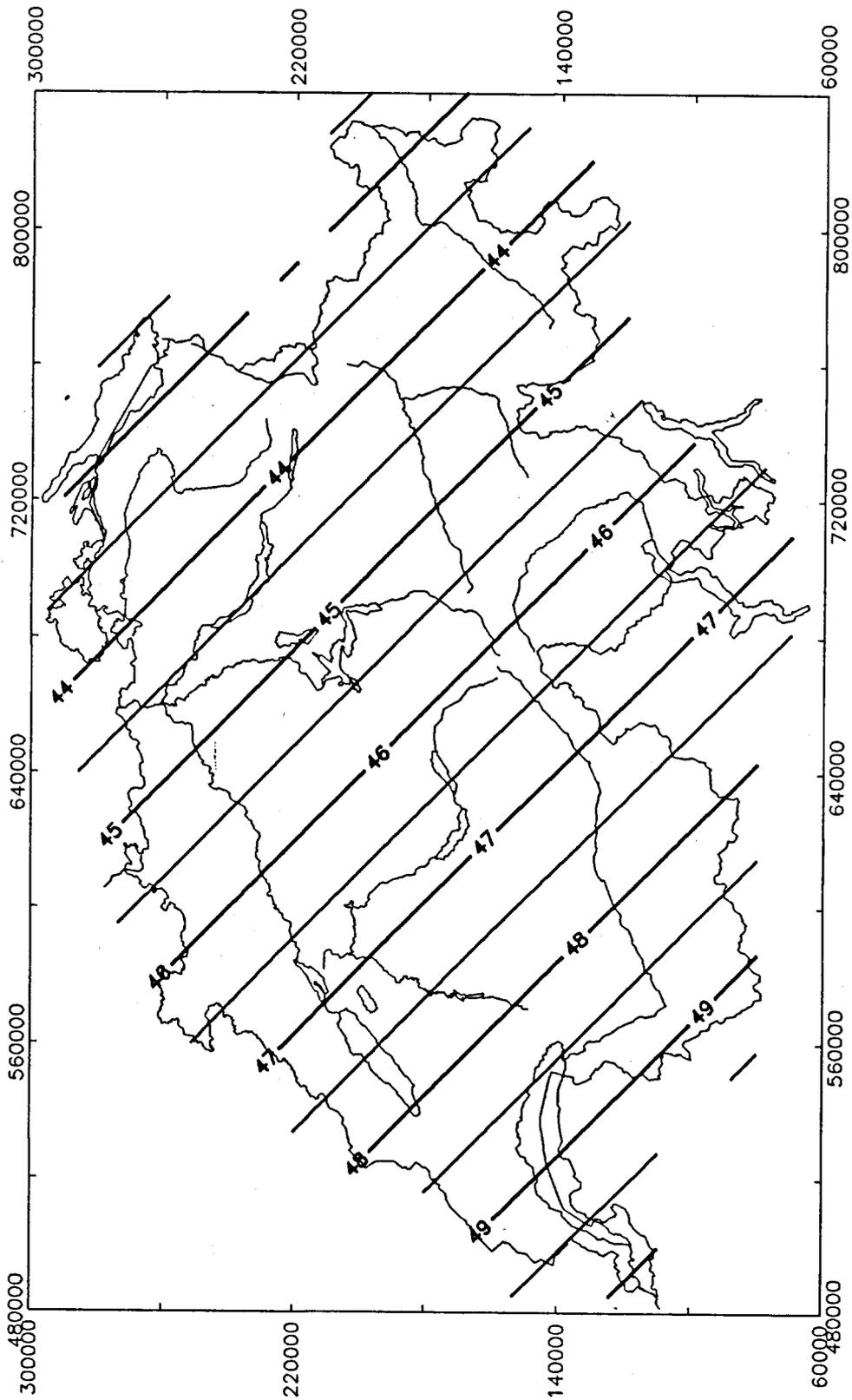


Abb.6.35. Transformationsgrößen CH-Datum → GRS80: gerechnet mit: GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten - Astro-Geoid (CH-Datum) [m]

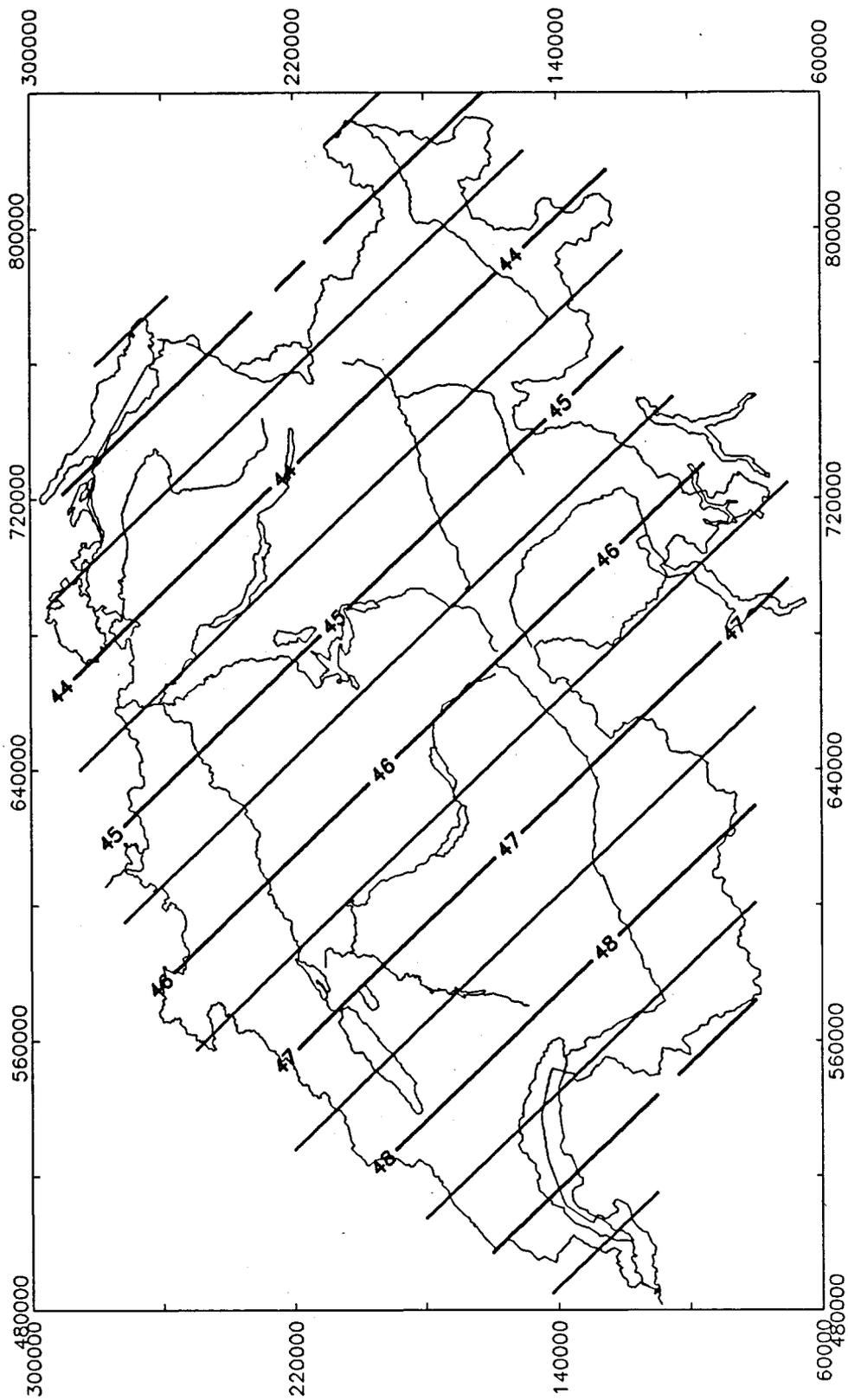


Abb.6.36. Transformationsgrößen CH-Datum → GRS80: Gerechnet mit GEM10C, europäischen, mittleren Schweizer Daten und mit aus Bougueranomalien interpolierten Daten - Astro-Geoid (CH-Datum) [m]

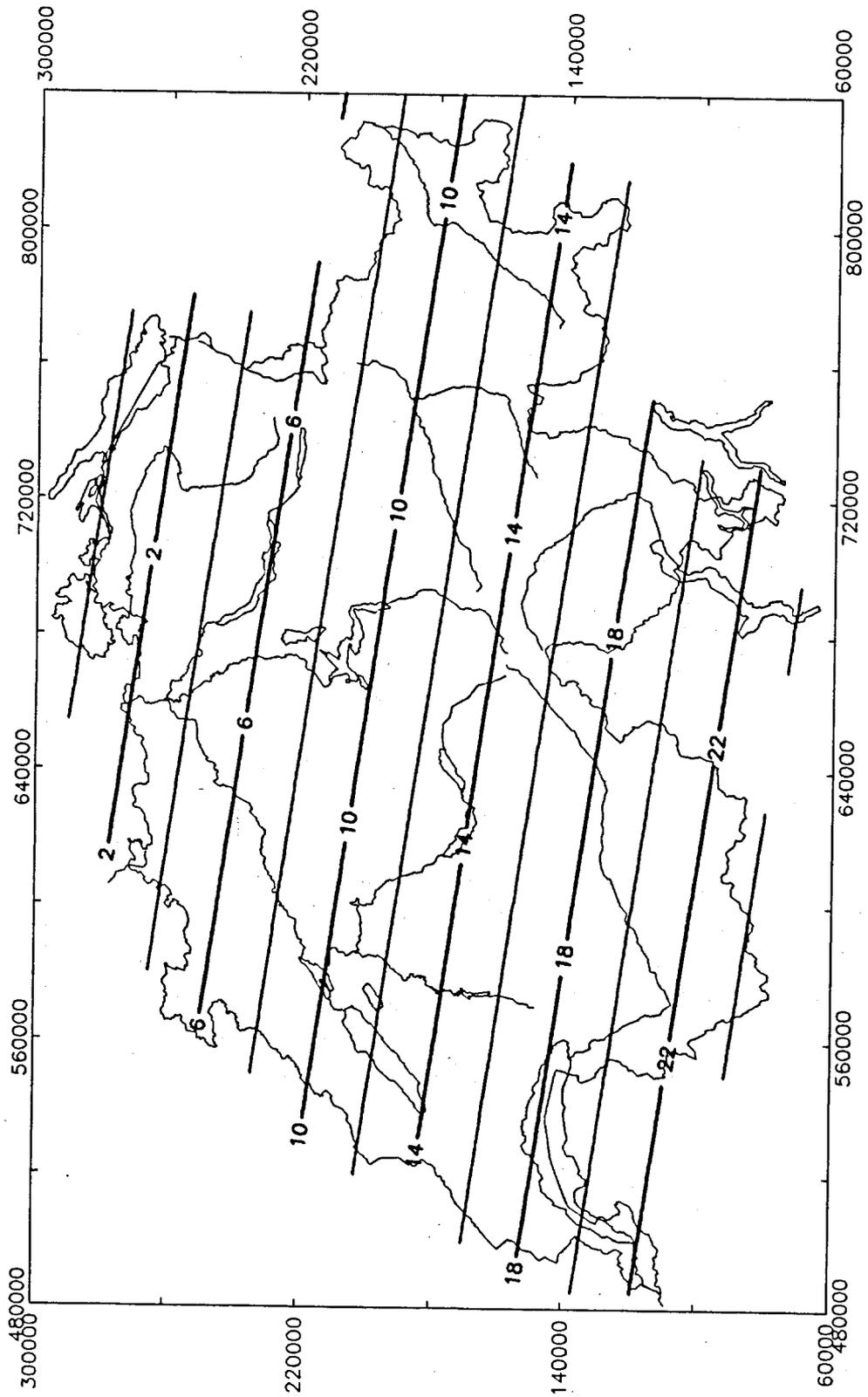


Abb.6.37. Differenz zwischen den Transformationsgrößen CH-Datum → GRS80:  
 gerechnet mit: GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten und  
 gerechnet mit GEM10C, europäischen, mittleren Schweizer Daten und mit aus  
 Bougueranomalien interpolierten Daten [cm]

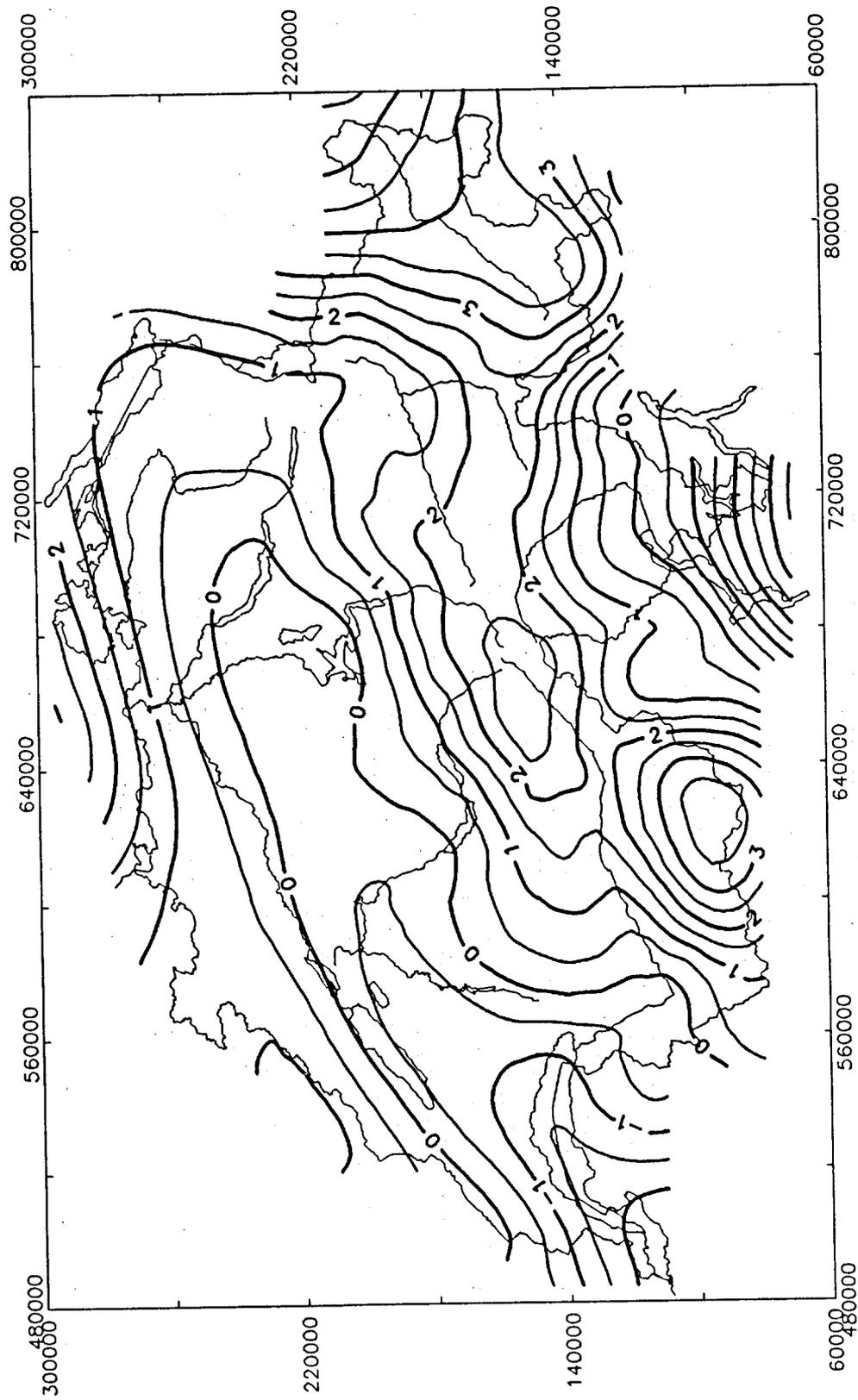


Abb.6.38. Gravimetrisches Geoid im CH-Datum. Gerechnet aus GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten. [m]

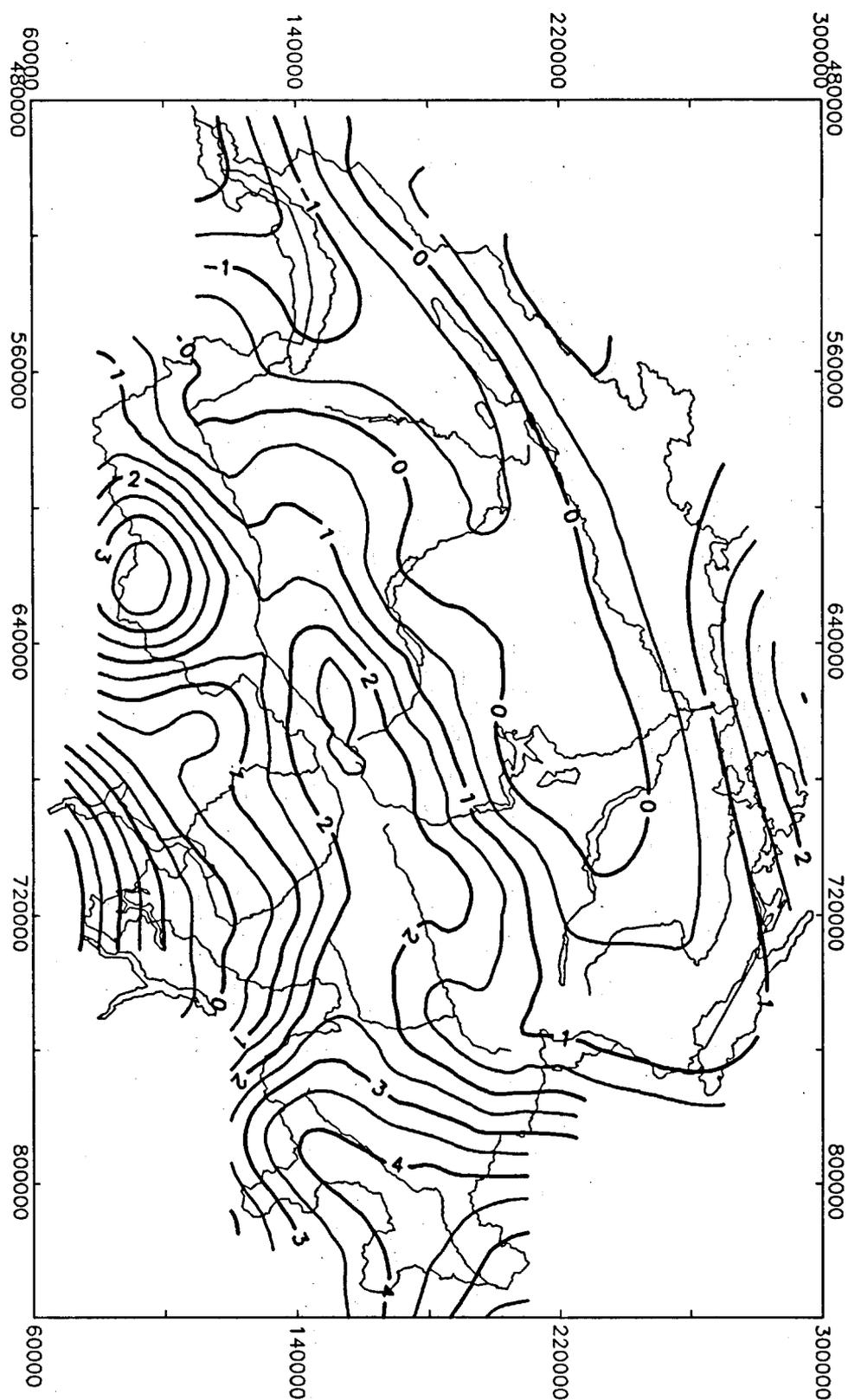


Abb.6.39. Gravimetrisches Geoid im CH-Datum. Gerechnet aus GEM10C, europäischen, mittleren Schweizer Daten und aus Bougueranomalien interpolierten Daten. [m]

### 6.3.3 Fehler

Eine Abschätzung der Fehler erfolgt über die direkte Berechnung der Kovarianz-Funktion der Geoidhöhen. Dazu werden die Formeln, die in den Kapiteln 4.1 und 2.9 entwickelt wurden, verwendet. Für die Covarianz bei der Stokesberechnung gilt:

$$C(N,N) = \frac{R^2}{\gamma_Q^2 (4\pi)^2} \langle S(y,x) \sigma(x), S(y',x) \sigma(x) \rangle$$

In obiger Form geschrieben, geht man von unabhängigen  $\Delta g$  aus. Die Gewichtsansätze (Verhältnisse) wurden in folgender Weise gewählt (siehe Abb.6.12, Lerch et al., 1978, Torge et al., 1984):

Europäische Daten 6'x10'	:	10
GEM 10 C Anomalien	:	30
CH-Daten 6'x10'      Mittelland	:	3
CH-Daten 6'x10'      Voralpen	:	3
CH-Daten 6'x10'      Alpen	:	7
CH-Daten 6'x10'      Einzelne Werte	:	20,30

Werte der letzten Kategorie wurden durch interpolierte Werte ersetzt. Das Gewicht wurde auf Grund von Vergleichen mit mittleren Freiluftanomalien wie oben gewählt:

CH-Daten 6'x10'      Interpoliert	:	3 - 7
-----------------------------------	---	-------

In Abb.6.46/47 sind die Covarianzen, die sich aus einem konstanten Fehler an allen  $\Delta g$  und der Fehlerfortpflanzung durch das Stokesintegral (Kap.2.9.1) ergeben würden, dargestellt. Es zeigt sich die fast ideale Isotropie und Homogenität. Die Distanzabhängigkeit ist ebenfalls aufgetragen (6.48). Zur Illustration des Kapitels 2.9.4 ist eine (Legendre)-Polynom-Approximation 4. Grades mit den entsprechenden Residuen (Abb.6.49) eingetragen. Durch das Einführen der verschiedenen Gewichtsansätze bei den Schwereanomalien wird die eben besprochene Isotropie und Homogenität zerstört. Dies zeigen die Abbildungen 6.44/45. Die Varianzen wurden für beide Geoidberechnungsvarianten gerechnet und abgebildet (Abb.6.40/41). Ganz deutlich machen sich die fehlenden Daten im europäischen Datensatz bemerkbar (vor allem im Süden und Osten, siehe Bemerkung Kap. 6.1.1). Ebenso sind bei der ersten Variante die Punkte mit hohen Fehlern an  $\Delta g$  ('Problempunkte') zu erkennen (Glarneralpen und Ivreazone / Monte Rosa) (vergl. auch Abb. 6.12). Die Varianz liegt generell etwas höher als bei der Version, in der die 'Problempunkte' durch bouguerinterpolierte Werte ersetzt wurden. Die hier dargestellten a priori Varianzen fallen gegenüber den mittleren Fehlern

an den Restklaffen (die als eine Art äusserer Fehler interpretiert werden könnte) etwas optimistisch aus, liegen aber noch im Rahmen. Interessant sind die Relativgenauigkeiten (Abb.6.42/43), die im wesentlichen dasselbe Bild wie die beschriebenen Varianzen (Abb.6.40/41) zeigen. Wiederum ist erkennbar, dass zur Stützung über die ganze Schweiz mindestens 15 cm ellipsoidische Höhengenaugigkeiten gebraucht werden. Ungenauere Höhenangaben wären nutzlos. Dies entspricht auch etwa Abschätzungen, die Marti (private Mitteilung) für die GPS-Stützung des Astro-Geoides gemacht hat. Die Relativgenauigkeiten wurden aus der vollen Covarianzmatrix für die Geoidhöhen (in einem regelmässigen Gitter der Dimension  $9 \times 11 (= 99 \text{ Punkte})$  angeordnet) berechnet. Die Covarianzmatrix ( $99 \times 99$ ) ist zur Illustration in Abb. 6.45 abgebildet. Die Gitterstruktur ( $9 \times 11$ ) ist deutlich wiedererkennbar.

Als einen 'äusseren' Fehler könnte man das Fehlermass, das aus dem Vergleich mit dem Astro-Geodätischen Geoid gewonnen wurde, bezeichnen. In einem gewissen Sinne können die beiden Geoidbestimmungsmethoden als unabhängig bezeichnet werden, unterscheiden sich doch die Methoden als auch die Daten recht stark vom 'Stokes' schen Vorgehen. Aus den Restklaffen nach der Datumstransformation (Kapitel 6.3.2) ergibt sich ein Sigma

$$s_0 = 27 \text{ cm}$$

Benützt man zur Transformation nur Punkte im Mittelland und in den Voralpen, so ergibt sich ein Fehler von:

$$s_0 = 16 \text{ cm}$$

Wird das Geoid ohne die lokalen Schwereinformationen berechnet, also nur aus den europäischen Daten, so ergibt sich ein mittlerer Fehler nach der Transformation von

$$s_0 = 39 \text{ cm.}$$

Der Einbezug der lokalen Schweredaten bringt eine Verbesserung von 25%. Interessant ist, dass ein grosser Teil der lokalen Daten natürlich bereits in den 'Wenzel'-Daten stecken.

Bei gleicher (unkorrelierter) Genauigkeit der Schwerewerte erhält man ein Mass für den Einfluss alleine der Form des Dateneinzugsgebietes. Danach würde eine durchgehende Genauigkeit von 1 mgal gerade 16mm Fehler in der Geoidhöhe bedeuten, d.h., um ein 1 cm Geoid zu erhalten, wäre man auf 0.5 mgal genaue mittlere Anomalien angewiesen.

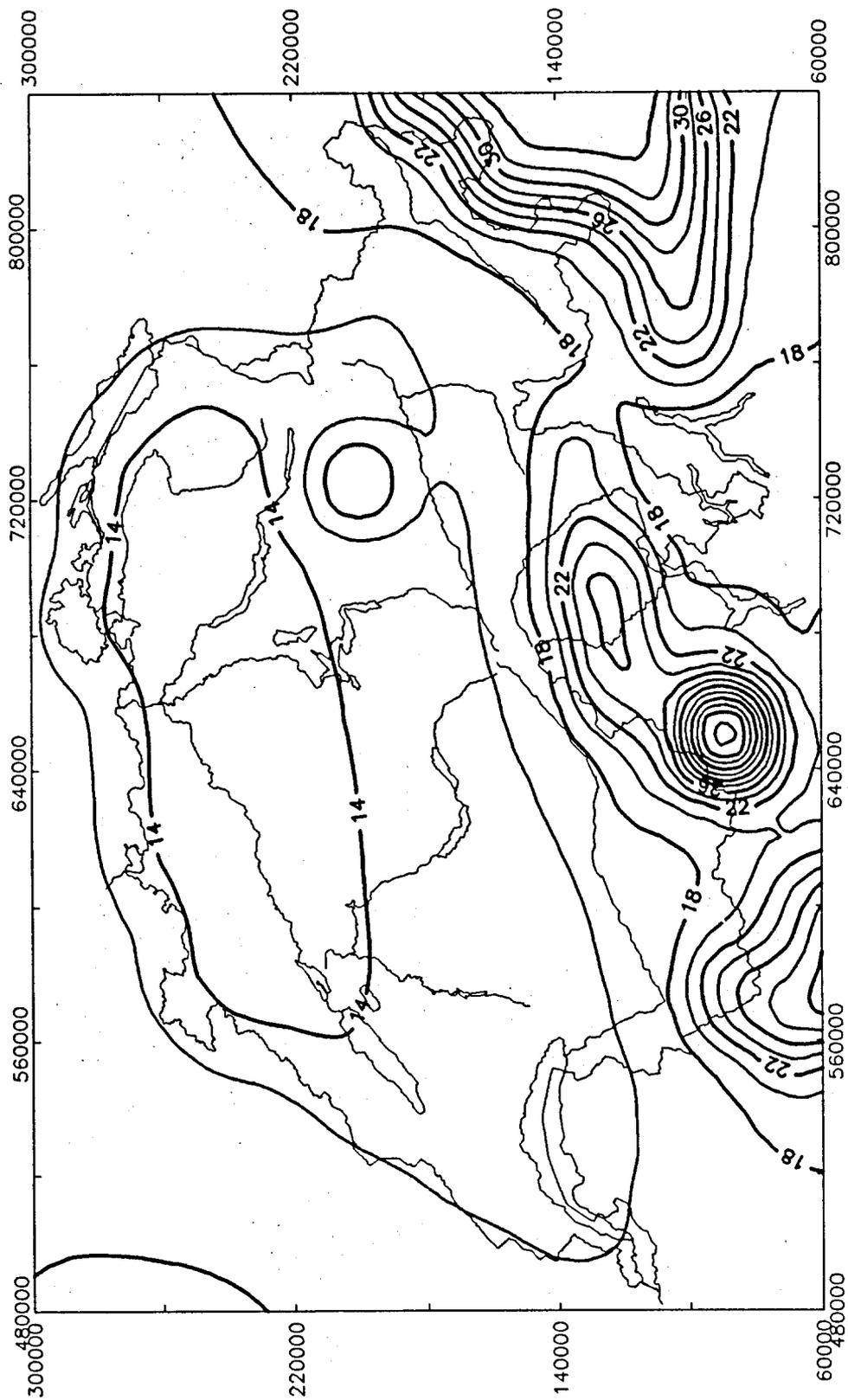


Abb.6.40. Varianzen [cm] : gerechnet mit: GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten

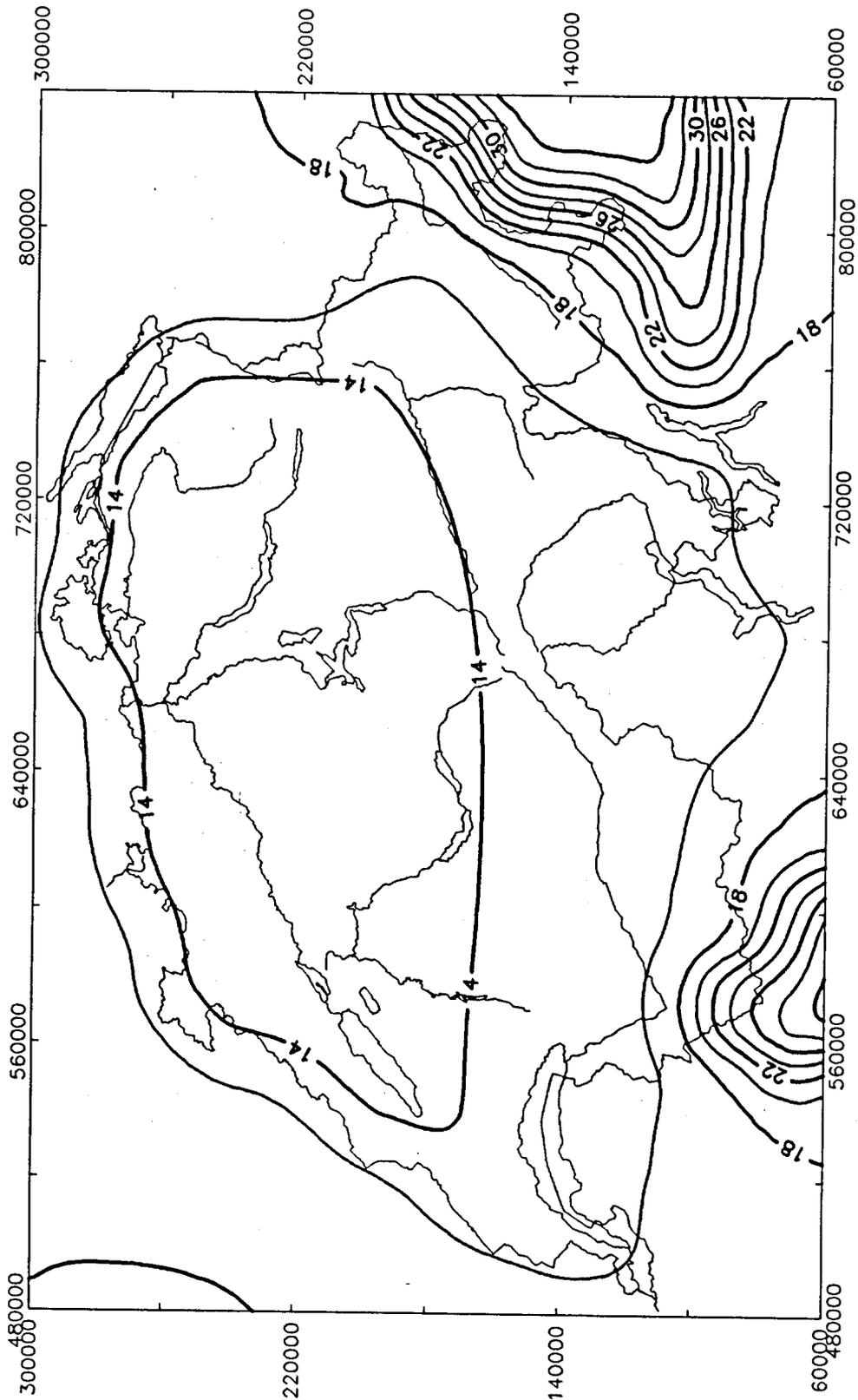


Abb.6.41. Varianzen [cm] : Gerechnet mit GEM10C, europäischen, mittleren Schweizer Daten und mit aus Bougueranomalien interpolierten Daten

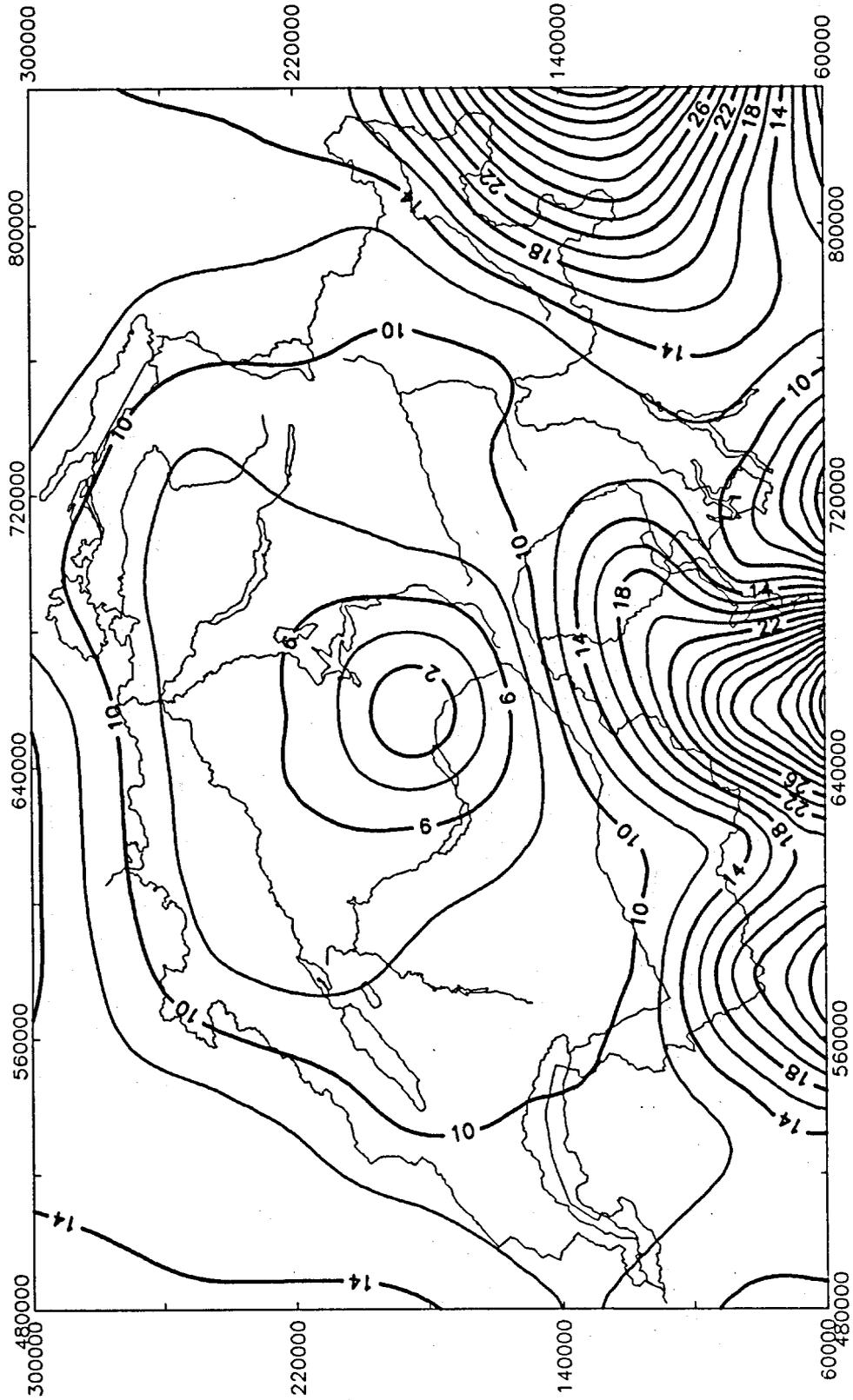


Abb.6.42. Relativ-Genauigkeiten [cm]: Gerechnet aus GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten.

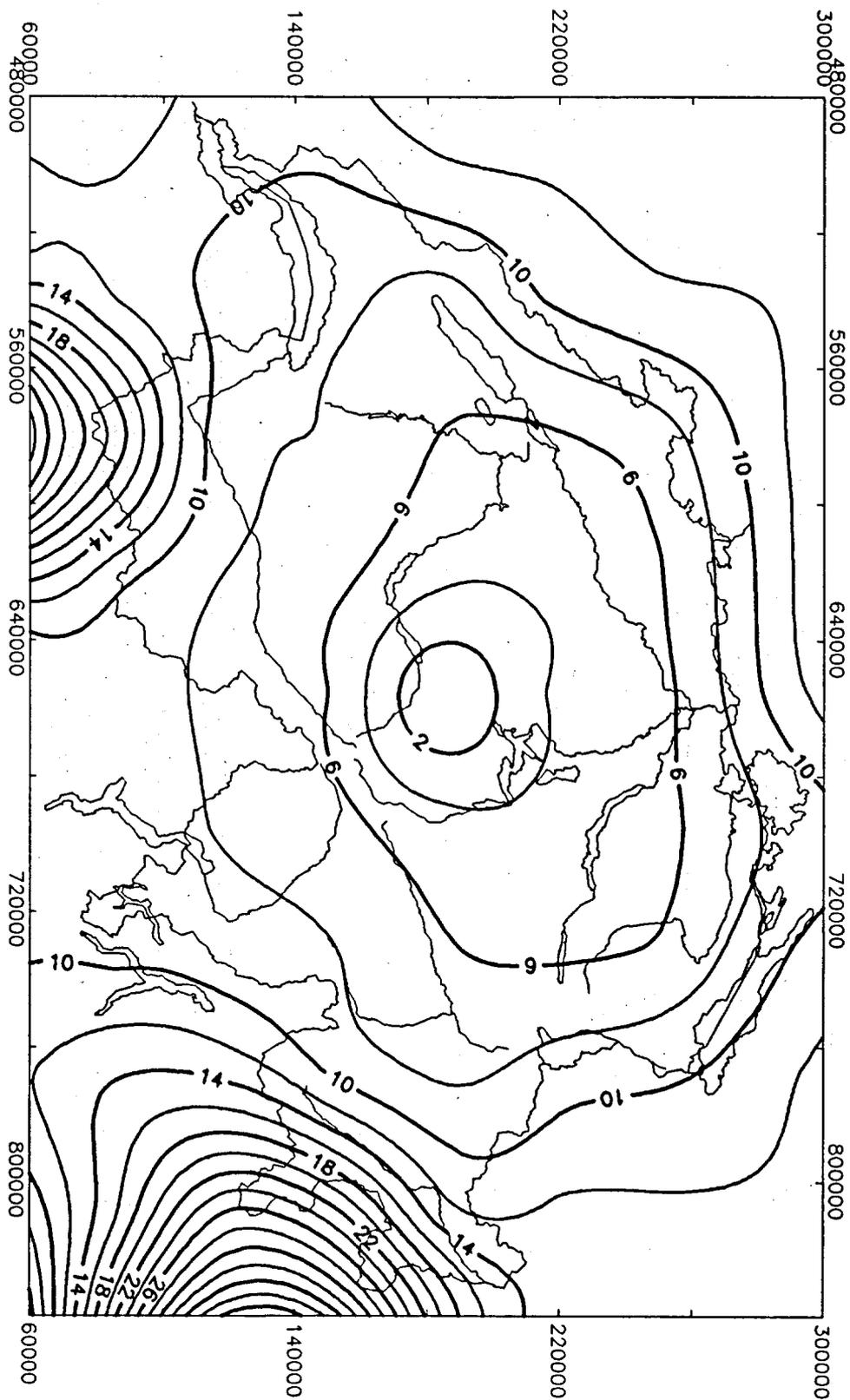


Abb.6.43. Relativ-Genauigkeiten [cm]: Gerechnet aus GEM10C, europäischen, mittleren Schweizer Daten und aus Bougueranomalien interpolierten Daten.

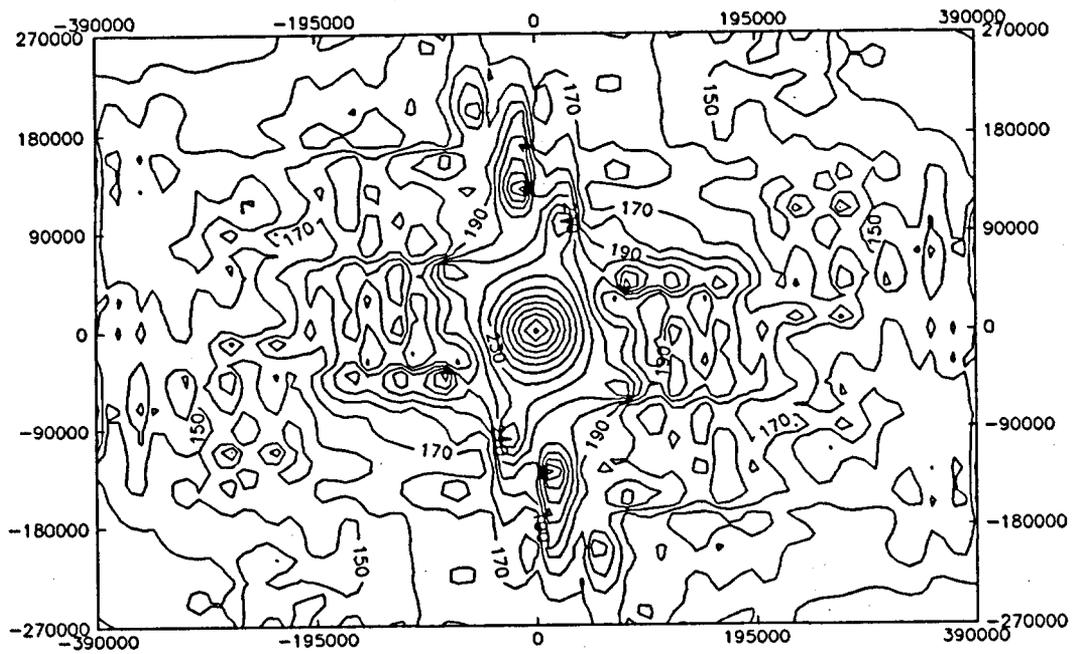


Abb.6.44. Kovarianz von  $9 \times 11 = 99$  Geoidpunkten in einem Gitter angeordnet [cm<sup>2</sup>]:  
 Gerechnet aus GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten.  
 Dargestellt in Abhängigkeit der Koordinatendifferenz [m].

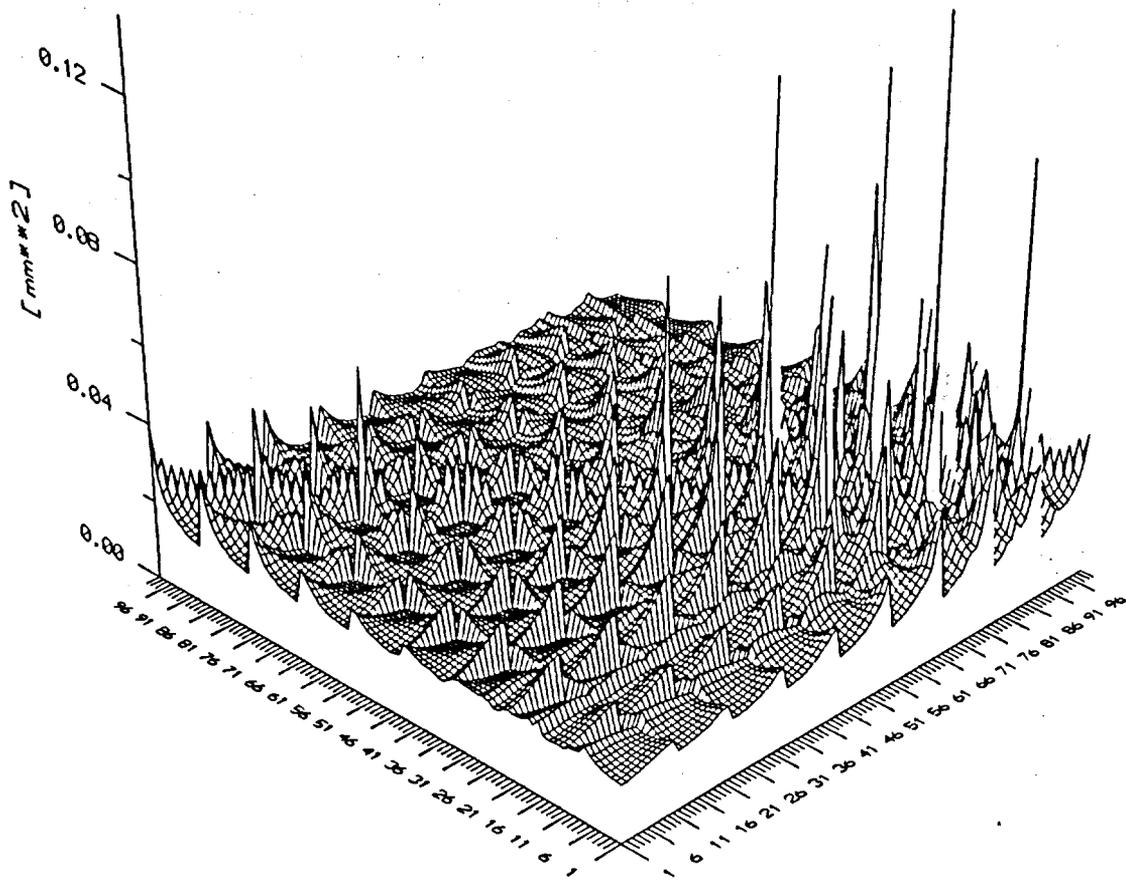


Abb.6.45. Kovarianz von  $9 \times 11 = 99$  Geoidpunkten in einem Gitter angeordnet [m]:  
 Gerechnet aus GEM10C, europäischen und mittleren Schweizer Daten.

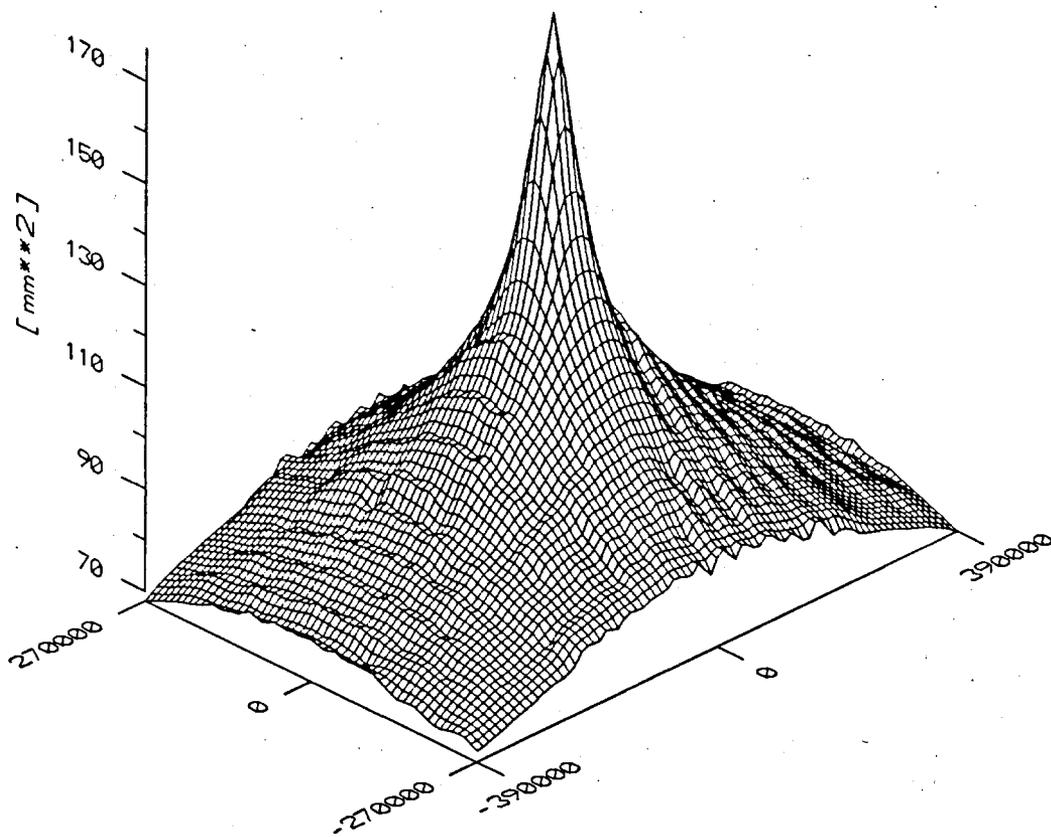


Abb.6.46. Kovarianz  $[\text{mm}^2]$  in Funktion der Koordinatendifferenzen  $[\text{m}]$  der Aufpunkte.  
Gerechnet mit homogenen Varianzen der Schwereanomalien. (Stokes-Kovarianz)

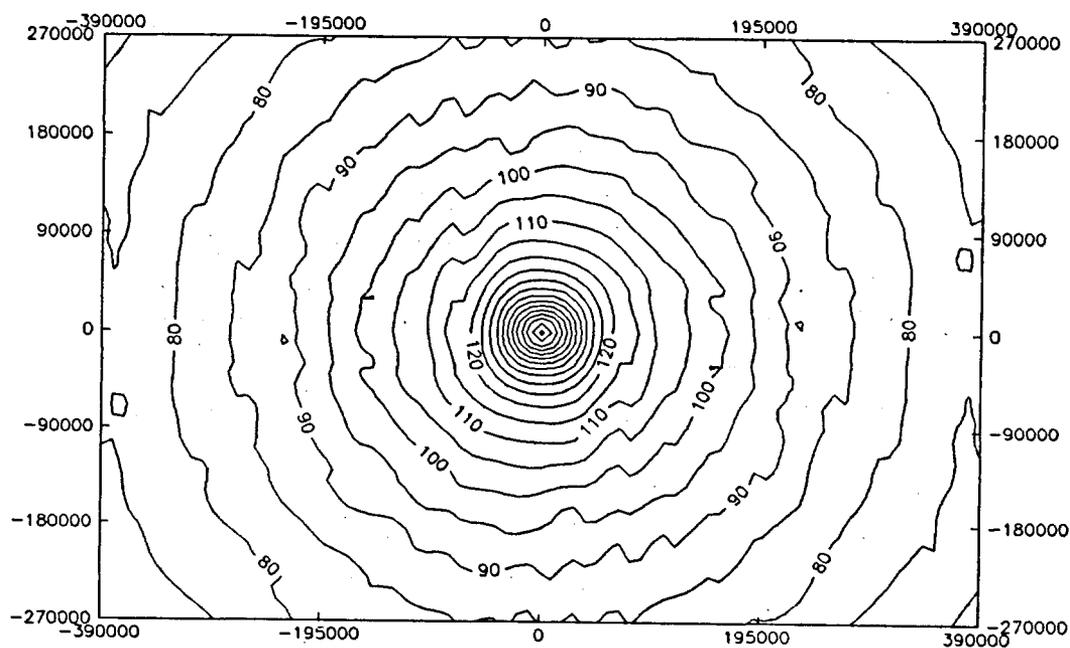
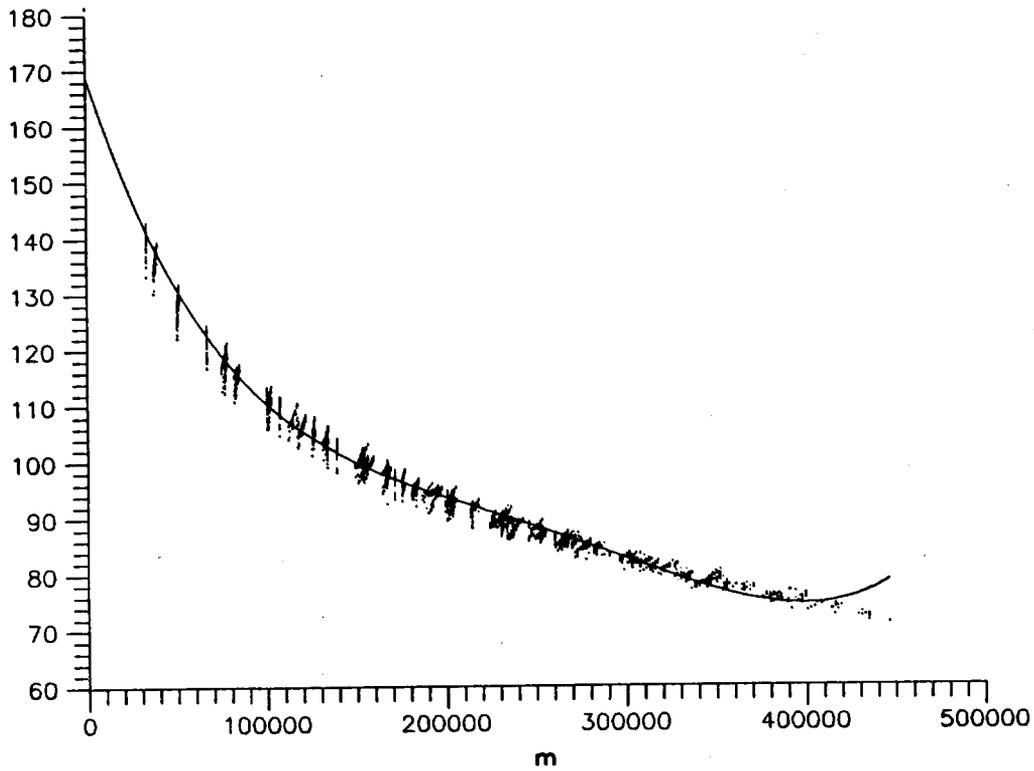
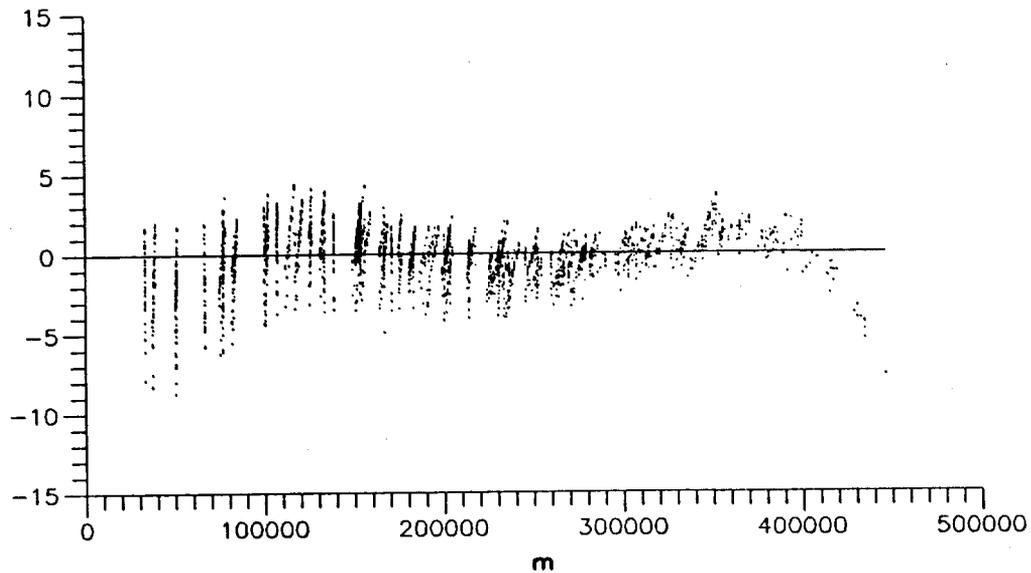


Abb.6.47. Kovarianz  $[\text{mm}^2]$  in Funktion der Koordinatendifferenzen  $[\text{m}]$  der Aufpunkte.  
Gerechnet mit homogenen Varianzen der Schwereanomalien. (Stokes-Kovarianz)



**Abb.6.48. Kovarianz in Funktion des Punktabstandes. Gerechnet mit homogenen Varianzen der Schwereanomalien. (Stokes-Kovarianz) (Legendre)-Polynom-Approximation 4. Grades. [ $\text{mm}^2$ ]**



**Abb.6.49. Kovarianz in Funktion des Punktabstandes. Gerechnet mit homogenen Varianzen der Schwereanomalien. (Stokes-Kovarianz) Residuen der (Legendre)-Polynom-Approximation 4. Grades. [ $\text{mm}^2$ ]**

## 7 Zum Schluss

### Nochmals eine Zusammenfassung und einige Schlussfolgerungen

Die strenge Stokes'sche Lösung liefert wohl nicht das bestmögliche Geoid, ist aber vom Prinzip her eine schöne und interessante Lösung. Aber wie jede andere Geoidbestimmungsmethode, ist auch das Integrationsverfahren nach Stokes gewissen Randbedingungen und Limiten unterworfen. Die Grenzen der Methode sind gut am hier bearbeiteten Beispiel erkennbar. Geht man davon aus, dass mittlere Höhen in genügender Genauigkeit vorhanden sind ( $< 30$  m), so ist die Punktverteilung innerhalb eines Kompartimentes einer der limitierenden Faktoren. Insbesondere sollte die Höhenverteilung der Messpunkte der tatsächlichen Höhenverteilung entsprechen. Gerade diese Bedingung ist jedoch in Gebirgsgegenden kaum zu erfüllen. Ein derartiges isoliertes Gebiet ist in der Gegend vom Glärnisch anzutreffen. Das zweite Problem wird durch starke horizontale Gradienten innerhalb des Kompartimentes verursacht. Derartige Verteilungen verunmöglichen eine sinnvolle Bestimmung eines mittleren  $\Delta g$ 's. Starke horizontale Gradienten können nur durch relativ oberflächennahe Störkörper erzeugt werden. Diese Probleme wurden im Gebiete des Simplon und der Ivrea-Zone angetroffen. Um diese Unannehmlichkeiten zu umgehen, wurde eine Art 'Regularisierung' mit Hilfe von Bougueranomalien vorgenommen. An den mittleren Koordinaten eines Kompartimentes wurde durch die Interpolation von Bougueranomalien und anschliessendem Hinzurechnen des Topographieeffektes eine 'beobachtete' mittlere Freiluftanomalie erzeugt. Die Methode ist in dem Sinne als regularisierend zu betrachten, dass sie Ausreisser der Regression eliminieren kann. Interessant ist, dass trotz dieser Hilfe die Residuen in den betroffenen Gebieten nur schwach verkleinert wurden.

Im I. Teil der Arbeit lag das Schwergewicht auf der funktionalen Darstellung des Schwerefeldes. Die formal einfach aussehenden Beziehungen sind oft nicht ganz einfach in die Praxis umzusetzen. Der grosse Vorteil liegt aber an der Übersichtlichkeit der Formeln, die auch komplizierte Zusammenhänge verständlich erscheinen lässt. Insbesondere ermöglicht der Operator-Kalkül sehr elegante Herleitungen, indem die Formeln sehr allgemein bleiben und auch ihre Allgemeingültigkeit behalten, solange man sich im festgelegten Funktionenraum und der entsprechenden Norm bewegt.

Die Lösung des Randwertproblems wird über diesen Weg bewerkstelligt. Man findet so auch die Verwandtschaft des Poisson- und des Stokes-Kern. Das Verfahren wurde hier auf die Sphäre angewendet, kann aber genau gleich für andere Koordinatensysteme benützt werden. Die Flexibilität der Operatorschreibweise zeigt sich auch bei der funktionalen Darstellung des Schwerefeldes. Dort lassen sich die fehlertheoretischen Zusammenhänge einfach formulieren. Dabei ist zu bemerken, dass zwischen der diskreten und der kontinuierlichen Beschreibung

formell kein Unterschied besteht. Integrale können ohne weiteres als Summen und die meisten Integraloperatoren als Matrizenmultiplikatoren verstanden werden.

Die spektrale Betrachtungsweise kann formell ebenfalls in der oben beschriebenen Operatorschreibweise formuliert werden. In dieser Arbeit wird die Fouriertransformation explizit an einer Formelentwicklung zur Berechnung von Masseneffekten exerziert. Es zeigt sich, dass neben der vertikalen Schwerekomponente auch die horizontalen Komponenten und das Potential durch sehr verwandte Formeln beschrieben werden können. Man findet durch eine 3-d Transformation eine Beschreibung des gesamten Schwerefeldes als Vektorfeld im dreidimensionalen Spektralbereich. Aus der Spezialisierung auf die Vertikalkomponente ergibt sich die 'Parker'-Formel. Viele Herleitungen mögen beim ersten Durchlesen etwas langatmig erscheinen, doch sind es gerade die Herleitungen, die oft gewisse Tricks beinhalten, die im Endergebnis kaum mehr aufscheinen.

Im II. Teil wurde das Geoid nach der Stokes Formel berechnet. Vorgängig waren einige kleinere Störeffekte des Schwerefeldes Thema der Arbeit. Eine Abschätzung zeigt, dass der bekannte Treibhauseffekt auch das Schwerefeld beeinflusst. In den nächsten Jahren besteht jedoch auf Grund dieser Tatsache keine Notwendigkeit zur Neumessung aller Gravimeterstationen ( $7 \cdot 10^{-11}$  Schwereänderung). Andererseits wären säkulare Schwereänderungen als zusätzlicher Datensatz für die Beurteilung von Klima-Veränderungen in Erwägung zu ziehen. Zur Regularisierung von Schwereanomalien wird ein reales Schätzmodell vorgestellt, bei dem gleichzeitig physikalische Parameter bestimmt werden. Das Modell kann man auch als Interpretationsmodell werten. Der Hauptvorteil liegt daran, dass man a priori Kenntnisse über geologische Strukturen einführt und dann Dichten schätzt, die auch räumlich variieren dürfen. Diese Variation wird im vorliegenden Fall der Einfachheit halber durch Polynome approximiert. Zusätzlich wird ein nicht interpretierter, harmonischer Trend abgespalten. Aufgrund dieser Rechnungen scheinen sich etwa  $0.33$  bis  $0.34 \text{ gr/cm}^3$  Dichtekontrast an der Moho zu bestätigen, wie er bereits von Kahle et al. (1976a,b) postuliert und später von Kissling (1980) bestätigt wurde. Im Bündnerland lassen sich gegenüber  $2.67 \text{ gr/cm}^3$  verringerte Dichten erkennen, die allerdings nicht unbedingt an der Oberfläche zu suchen sein müssen. Ein interessantes, isoliertes Hoch zeigt sich zwischen dem Wallis und Aosta. Die übrigen in jenem Gebiet vorhandenen Unregelmässigkeiten sind auf den nicht vollständig reduzierten Ivrea-Körper zurückzuführen. Immerhin bringt der obige Modellansatz eine Regularisierung der Bougueranomalie auf  $6 \text{ mgal}$  Streuung. Die Höhenkorrelation ist komplett verschwunden. Dies heisst, dass eine 2-d Interpolation ohne weiteres erlaubt wäre.

Als Abschluss wird die Stokes' Integration ausgeführt. Sie liefert in einigermaßen begehbarem Gelände, wie dem Mittelland und den Voralpen, Geoidhöhen im Bereich von  $\pm 10$  bis  $\pm 14 \text{ cm}$  Genauigkeit. Diese Werte ergeben sich sowohl aus a priori Rechnungen als auch aus Transformationsresiduen. Im Hochgebirge und in der Ivreazone ist im Mittel ein

Fehler von ca.  $\pm 30$  cm anzusetzen.

Um das Stokes Verfahren zu verbessern, müsste z.B. mit dem in Kap. 5.2 vorgestellten Modell die Regularisierung vorgenommen und die Integration über die regularisierten Werte ausgeführt werden. Da diese Werte höhenunabhängig sind, wäre die Bildung von mittleren Anomalien absolut unkritisch. Der indirekte Effekt der reduzierten Massen muss anschliessend wieder addiert werden. Eine weitere Möglichkeit, den 'Stokes' zu gebrauchen, besteht darin, den in Kap. 2.7. verwendeten Gewichtsansatz für die Integration von ungleichabständig verteilten Punkten zu verwenden. Die Integration kann sich dann z.B. über dreiecksvermaschte Flächen erstrecken. Effizienter sind dann aber wohl numerische Methoden der Approximation (Spline etc.). Um allerdings in die Gegend des cm-Geoides zu gelangen, müssten im hier vorliegenden, klassischen Fall die mittleren Anomalien auf besser als 1mgal bekannt sein.

### **Schwerefeldbezogener Ausblick**

Aus den vorliegenden Untersuchungen ergeben sich einige weitere mögliche Aktivitäten, die zu verfolgen sowohl für den Praktiker als auch für den Theoretiker von Interesse sein können. Man kann im Umfeld dieser Arbeit drei Wirkungszentren lokalisieren, die untereinander relativ stark wechselwirken. Diese drei wären

Schwerefeld,  
Methoden,  
Geodynamik

**Schwerefeld:** Hier wird eine möglichst genaue Beschreibung des Schwerefeldes angestrebt, und zwar global wie auch lokal. Da hier die Rede vom "lokalen" Geoid der Schweiz ist, soll vom globalen Problem abgesehen und lediglich auf das zweite Bezug genommen werden. Zum Erreichen eines möglichst genauen lokalen Geoides sind verschiedenste Methoden einzusetzen. Eine der wirkungsvollsten und häufig eingesetzten ist die Regularisierung durch die Reduktion bekannter Felder. Da dürften in naher Zukunft denn auch grosse Informationsmengen von geophysikalischer Seite her anfallen. So kann man auf neue Moho-Tiefeninformationen gespannt sein, wie sie zum Beispiel im Nationalen Forschungs-Programm "Geologische Tiefenstruktur der Schweiz", (NFP20) erhoben werden (z.B. Ansorge et al., 1987, St. Mueller, 1986). In Arbeit befindliche genaue digitale Geländemodelle und Kenntnisse auch kleiner geologischer Strukturen lassen eine Auflösung des Schwerefeldes weit innerhalb des cm zu. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass diese Auflösung auch tatsächlich in Genauigkeit umgewandelt werden kann. Dazu müssen sowohl die Messverfahren als

auch die Auswertemodelle neu überdacht werden. An dieser Stelle spielt die Methodik eine wichtige Rolle.

**Methoden:** Um höchst-genaue Geoide bestimmen zu können, sollten auch gewisse methodische Untersuchungen stattfinden. Es stehen etwa vier Hauptthemen im Vordergrund: Interpolation und Approximation, Regularisierung, Randwertproblem, Inversion. Dabei ist zu beachten, dass der Faktor 'Variation mit der Zeit' mit zunehmender Genauigkeit der Verfahren an Bedeutung gewinnt, was zur Berücksichtigung von Zeitanätzen zwingt. Ebenso sind numerische Methoden zur Approximation oder auch zur Randwertproblemlösung zu verfolgen. Da bieten sich die Methoden aus der Statistik (Kollokation, Kridging) (vergl. Kap.4.1) aber auch die Methode der finiten Elemente oder der Oberflächenelemente an. Zur Behandlung des Schwerefeldes durch geometrische oder abbildungstheoretische Verfahren (vergl. Kap. 4.2) sind noch nicht sehr viele Erfahrungen gesammelt worden. Ein die Geodäsie, vor allem aber die Geodynamik interessierendes Problem betrifft die Inversion von Felddaten. Dieses Gebiet eröffnet auch ein weites Feld von Applikationen, da Feldinversionen vom Interesse her nicht auf die Geodäsie beschränkt bleiben.

**Geodynamik:** Hier steht die Interpretation im Vordergrund. Aus den Interpretationen lassen sich wieder Modelle konstruieren, die zum Beispiel für Regularisierungen verwendet werden oder für zeitliche variierende Modelle reale Randbedingungen liefern können. Für die Interpretation jedoch, müssen Daten als auch Inversionsverfahren zur Verfügung stehen. Dabei werden grosse Anstrengungen unternommen, die Interpretationsmethoden so integral wie möglich zu gestalten. Das heisst, dass Daten verschiedensten Typs in einem einzigen Modell behandelt werden sollten. Dabei muss der Modellbegriff in stetem Wandel begriffen sein, so wären zu stark vereinfachende (Stichwort: Isostasie) Modelle neu zu überdenken.

## Ein Dank

geht an alle direkt oder indirekt von dieser Arbeit Betroffenen. Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Kahle sei für die Ermöglichung dieser Arbeit und seine stete (auch die nicht unwichtige moralische) Unterstützung während der Ausarbeitung dieses Berichtes herzlich gedankt. Herrn Prof. Dr. Sünkel sei für die Übernahme des Korreferats und seine kompetenten Korrekturhinweise und Verbesserungsvorschläge ebenfalls herzlich gedankt. In der Arbeit sind indirekt verschiedene Detailergebnisse aus Seminar- und Diplomarbeiten eingeflossen. All den (damaligen) Studenten sei ebenfalls ein Dank ausgesprochen. In chronologischer Reihenfolge waren dies W. Kuhn, B. Wirth, E. Frei, U. Bättig, D. Santini, I. Bernauer, M. Bohren, F. Arnet. Einige in der Arbeit verwendete Programme konnten von Kollegen übernommen werden. Sie sind nach Möglichkeit in der Arbeit zitiert. Insbesondere muss hier Herrn M. Cocard für seine wertvolle PC-Unterstützung gedankt werden. Ebenso waren die vielen Diskussionen zum Thema Schwerfeld, genauso wie die zahlreichen Handreichungen, wie Kopieren, Zeichnen etc., sehr hilfreich. Die während der Fertigstellung erfolgte Abnahme etlicher Tagesgeschäfte durch die Kollegen und Kolleginnen erleichterte die Fertigstellung dieser Arbeit ganz wesentlich. Dafür sei namentlich mein ganz herzlicher Dank den Kolleginnen und Kollegen I. Gantenbein, Dr. E. Klingelé, Dr. B. Bürki, M. Cocard, F. Ettl, U. Marti, M. Müller und Dr. B. Wirth ausgesprochen. Meinen Eltern darf ich für die Ermöglichung des Studiums, das mithin zu dieser Arbeit geführt hat, danken. Nicht vergessen möchte ich meiner Frau und meinen Kindern, die vor allem in der Zeit der Fertigstellung der Arbeit die zu kurz gekommenen Vaterpflichten zu verkraften hatten, für Ihre tatkräftige Unterstützung zu danken.

## 8 Literaturverzeichnis

Abkürzungen:	CSTG	International Coordination of Space Techniques for Geodesy and Geodynamics
	DGK	Deutsche Geodätische Kommission
	JGR	Journal of Geophysical Research
	JPL	Jet Propulsion Laboratory
	NFP	Nationales Forschungs-Programm
	OSU	Ohio State University
	Pageoph	Pure and Applied Geophysics
	SGK	Schweizerische Geodätische Kommission
	UCSE	University of Calgary, Division of Surveying Engineering
	VPK	Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik

Abalakin, V. (1982): Theory of Rotation of a Rigid Earth. In: *Geodesy and Global Geodynamics*, H. Moritz, H. Sünkel (eds.) *Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41*, pp 227-326.

Agarwal, B.N.P. (1971): Direct Gravity Interpretation of Sedimentary Basin Using a Digital Computer-Part I. *Pure and Applied Geophysics* 86, 5-12.

Alamdari, M.N. (1981): Local Evaluation of the Geoid from Gravity Data. *M.Sci.Thesis, The University of New Brunswick*.

Ansorge, J., E.Kissling, N. Deichmann, H. Schwendener, E. Klingelé, St. Müller (1987) : Krustenmächtigkeit in der Schweiz aus Refraktionsseismik und Gravimetrie. *1.NFP20 - Symposium, Bad Ragaz, Bulletin Nr. 4 des Nationalen Forschungsprojekts NFP20*.

Arabelos, D. (1980): Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung, dargestellt am Testgebiet Griechenland. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 98*.

Arnet, F.(1989): Schwerefeldberechnungen mit der Finiten-Element-Methode. *Seminararbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie*.

Baker, E.M. (1988): A Finite Element Model of the Earth's Anomalous Gravitational Potential. *Report No. 391, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.

Baranov, W., (1975): Potential Fields and their Transformations in Applied Geophysics. *Gebrüder Borntraeger- Berlin - Stuttgart, 121p*.

Bäschlin, C.F. (1948): Lehrbuch der Geodäsie. *Orell Füssli Verlag, Zürich, p. 892*.

Bättig, U. (1983): Zur Gravimetrischen Geoidbestimmung. *Seminararbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie*.

Bender, F.(ed.)(1985): Angewandte Geowissenschaften. *Ferdinand Emke Verlag, Stuttgart*.

Bernauer, I., A. Geiger (1986): Lokale Schwerefeldbestimmung und gravimetrische Modellrechnungen im Satelliten (GPS)-Testnetz 'Turtmann' (Wallis). *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Band 38*.

Beutler, G., I. Bauersima, W. Gurtner, M. Rothacher, T. Schildknecht, A.Geiger (1987): Atmospheric Refraction and Important Biases in GPS Carrier Phase Observations. *Paper presented at IUGG Meeting, Vancouver, August 1987*.

Bjerhammar, A. (1987): Discrete Physical Geodesy. *OSU Report No. 380, p .109*.

- Bohren, M. (1989): Modellierung des Schwerfeldes mit finiten Differenzen. *Seminararbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie.*
- Brans, C., R.H. Dicke (1961): Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev. 124, pp. 925-935.*
- Brans, C. (1961): Mach's Principle and a Varying Gravitational Constant. *Dissertation, Princeton.*
- Brauer, J.R. (ed.) (1988): Finite Element Analysis. *Marcel Dekker Inc, ISBN 0-8247-7832-4.*
- Brillouin, M. (1908): Mémoire sur l'éllipticité du géoïde dans le tunnel du Simplon. *Mémoires à l'Académie des Sciences de l'Institut national de France, Tome XXXIII, No 3, p 230*
- Bronstein, I.N., K.A. Semendjajew (1981): Taschenbuch der Mathematik. eds: Grosche u. Ziegler, Verlag Harri Deutsch, Thun, ISBN 3-87 144-492-8.
- Bruns, H. (1878): Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur Europäischen Gradmessung. *Publication des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes. p 49.*
- Bürki, B. (1985a): Die operationelle Bestimmung von Lotabweichungen mit Erläuterungen zur transportablen Zenitkamera TZK3 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie und zum computergestützten Auswertesystem. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 91.*
- Bürki, B. (1985b): Die Ivrea-Messkampagne 1983. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 92.*
- Bürki, B. (1988): Integrale Schwerfeldbestimmung in der Ivrea-Zone und deren geophysikalische Interpretation. *Dissertation ETH Nr.8621. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Zürich.*
- Cagienard, P. J., H.-G. Kahle, St. Müller, E. Klingelé (1982): Gravimetrische Untersuchungen in der Kontaktzone Helvetikum /Aar- Massiv. *Schweizerische Geodätische Kommission. Geodätisch- geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Band 35.*
- Chrisdodoulidis, D. C. (1979): Influence of the Atmospheric Masses on the Gravitational Field of the Earth. *Bull. Geod. 53 (1979) pp. 61-77.*
- Colombo, O.L. (1981): Numerical Methods for Harmonic Analysis on the Sphere. *Report No. 310, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Cook, A.H. (1987): Experiments on Gravitation. In: *300 Years of Gravitation, eds. S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge.*
- Cooley, J., J. Tukey (1965): An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math. Comput., 19, 1967, 297-301.*
- Cordell, L. (1973): Gravity Analysis Using an Exponential Density-Depth Function - San Jacinto Graben, California. *Geophysics 38, 684-690.*
- Coulon, de, F. (1984): Théorie et traitement des signaux. *Traité d'électricité, Vol XX, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Edition Georgi, ISBN 2-604-00008-3.*
- Courant, R., D. Hilbert (1968a): Methoden der mathematischen Physik I. *Heidelberger-Taschenbücher, Band 30, Springer-Verlag, ISBN 3-540-04177-X.*

- Courant, R., D. Hilbert (1968b): Methoden der mathematischen Physik II. *Heidelberger-Taschenbücher, Band 31, Springer-Verlag, ISBN 3-540-04178-8.*
- Deichmann, N., J. Ansorge, St. Müller (1986) : Crustal Structure of the Southern Alps beneath the Intersection with the European Geotraverse. *Tectonophysics, 126 (1986) S. 57-83.*
- Dicke, R.H., P.J.E. Peebles (1965): Gravitation and Space Science. *Space Sci. Rev. 4, pp. 419-460.*
- Dickey, J.O., T.M. Eubanks, R. Hide (1988): Interannual and Decade Fluctuations in the Earth's Rotation. *JPL Geodesy and Geophysics Preprint, No 166. March 1988.*
- Dirac, P.A.M. (1937): The Cosmological Constants. *Nature, 139, pp 323.*
- Divis, K., J. Tresl, J. Kostecky (1981): Effect of the Anomalous part of the Atmosphere on the Observed Acceleration of Gravity. *Studia geoph. et geod., 25, 321-331.*
- DMA (1987): Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. *DMA TR 8350.2, 30. Sept. 1987.*
- Ecker, E., E. Mittermayer (1969): Gravity Correction for the Atmosphere. *Boll. Geof. Teor. Appl., 11, 41, 70-80, 1969.*
- Eder, G. (1977): Elektrodynamik. *B.I. Hochschultaschenbücher, Band 233.*
- Eeg, J., T. Krarup (1973): Integrated Geodesy. *The Danish Geodetic Institute, Internal Report No. 7, Kopenhagen.*
- Elmiger, A. (1969): Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. *ETH-Zürich, Diss. Nr. 4210, p.168.*
- Elmiger, A. (1973) : Einfluss von Lotabweichungen und Geoidhöhen auf die Absteckung des Gotthard- Strassentunnels. *Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik. 4/73.*
- Elmiger, A. (1975a): Erste Ergebnisse einer Geoidbestimmung für die Schweiz aus astronomischen und interpolierten Lotabweichungen. *Bericht an die SGK, Juni 1975.*
- Elmiger, A. (1975b): Das Geoid in der Schweiz. *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik. Fachblatt III/IV - 75, pp.171-176.*
- Elmiger, A., Gurtner, W. (1983) : Astogeodätische Geoidbestimmung und Lotabweichungsinterpolation in der Schweiz. Beitrag zum Geoid- Kolloquium in Graz, 24./25. 1. 1983. *Bericht Nr. 74 des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.*
- Elsigolc, L.E. (1970): Variationsrechnung. *B.I. Hochschultaschenbücher, Band 431.*
- Engi, P., E. Hunziker (1944): Das Geoidprofil im Parallelkreis der Eidgenössischen Sternwarte zu Zürich. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 22, Schweizerische Geodätische Kommission.*
- Engi, P. und Hunziker, E. (1951) : Die Geoidprofile im Parallelkreis von Locarno und im Meridian von Lugano. *Schweizerische Geodätische Kommission. Astronomisch-geodätische Arbeiten der Schweiz, Band 24.*
- Eötvös, R. v., D. Pekár, E. Fekete (1922): Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik, vierte Folge, Band 68, pp 11-66.*

- Erker, E. (1983): Das Geoid in Österreich. Berechnungen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. In: *Das Geoid in Österreich. Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung. Neue Folge, Band III.*
- Finsterwalder, R. (1937): Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. *Zeitschrift für Vermessungswesen, Hefte 13, 14, 16.*
- Finsterwalder, R. (1951): Über die Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen. *Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 5.*
- Fischbach, E., S.H. Aronson (1986): Reanalysis of the Eötvös Experiment. *Phys.Rev.Let., vol. 56, Nr.1, pp.3-6.*
- Fischer, W.(1962): Berechnung der Lotabweichungsdifferenzen zwischen dem Oberflächenpunkt und dem Geoidpunkt einer Lotlinie aus sichtbaren Massen. *Bericht zu Handen der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Protokoll der 108. Sitzung der SGK.*
- Fischer, W. (1970a): Erstellung eines Kontrollnetzes über das schweizerische Schwerenetz mit LaCoste-Romberg-Gravimetern. *Procès-verbal de la 115<sup>e</sup> séance de la Commission géodésique suisse, pp. 63-70.*
- Fischer, W. (1970b): Ausgleichung des Kontrollnetzes über das schweizerische Schwerenetz. *Bericht an die Schweizerische Geodätische Kommission, p.20.*
- Forsberg, R. (1984a): A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methodes in Gravity Field Modelling. *Report No. 355, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Forsberg, R. (1984b): Local Covariance Functions and Density Distributions. *Report No. 356, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Forsberg, R., A.H.W. Kearsley (1989): Precise Gravimetric Geoid Computations over Large Regions. In: *Lecture Notes in Earth Sciences, Springer-Verlag.*
- Frei, E. (1983): Untersuchung zur Bestimmung einer lokalen Kovarianzfunktion. *Diplomarbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie.*
- Gassmann, F. (1959): Zur Messung der Schweredifferenz zwischen zwei Punkten mit einem statischen Gravimeter. *Annexe au procès-verbal de la 103<sup>e</sup> séance de la commission géodésique suisse (Berne), pp. 1-24.*
- Gassmann, F. (1960): Zur gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten und der Lotlinienkrümmungen in der Erdkruste. *Schweizer. Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Heft 2, p.39-49.*
- Gassmann, F., P.Müller (1961): Gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und der Lotkrümmungen für den Punkt St.Anton des Basisvergrößerungsnetzes Heerbrugg. *Schweizer. Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Heft 9.*
- Geiger, A. (1978): Interpolation und Reduktionen auf den Pol. *Diplomarbeit, Institut für Geophysik, ETH-Zürich.*
- Geiger, A., H.-G. Kahle (1986a): Gravimetrisches Geoid der Schweiz. *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 8/86, pp. 311-323.*
- Geiger, A., A. Wiget (1986b): Dopplermessungen für das Projekt ALGEDOP. Messungen und Stationsprotokolle. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 101.*

- Geiger, A., M. Müller (1987): Dopplermessungen für das Projekt ALGEDOP. Auswertung und Interpretation. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 138.*
- Geiger, A. (1988): Der Lichtstrahl in differentialgeometrischer Formulierung. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 140.*
- Girdler, R. W. (1985) : Density contrast at the Lithosphere - asthenosphere boundary. *In: Bericht Nr. 102 des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.*
- Gleason, D.M. (1985): Partial Sums of Legendre Series via Clenshaw Summation. *Manus.geod. 10, pp 115-130.*
- Gleinsvik, P. (1960): Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln. *Mitteilung des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie, Nr. 7.*
- Grafarend, E.W. (1986): Differential Geometry of the Gravity Field. *In: Proceedings: 1st Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy. pp.5-13*
- Grafarend, E.W., B. Schaffrin (1986): The Overdetermined Geodetic Boundary Value Problem. *In: Proc. Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets, Prague, pp 195-225.*
- Grafarend, E.W. (1988): The Geometry of the Earth's Surface and the Corresponding Function in Space of the Gravitational Field. *In: Festschrift, Rudolf Sigl zum 60.Geburtstag, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Nr. 287, 1988, pp.76-94.*
- Granser, H.(1982): Allgemeine Feldfortsetzung und Verfahren zur Dichtebestimmung angewandt auf gravimetrische Untersuchungen im Hochgebirge. *Dissertation, Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Wien, Wien.*
- Granser, H.(1987): Three-Dimensional Interpretation of Gravity Data From Sedimentary Basins Using an Exponential Density-Depth Function. *Geophysical Prospecting 35, 1030-1041.*
- Greiner, W., H. Diehl (1975): Theoretische Physik, Band 3: Elektrodynamik. *Verlag Harry Deutsch, Zürich.*
- Gretener, P. (1954): Schweremessungen nordwestlich von Zürich und ihre geologische Interpretation. *Eclogae geol. Helv., Vol. 47, pp. 173-222.*
- Groten, E. (1982): Tidal Effects in Geodetic Observations. *In: Geodesy and Global Geodynamics, H.Moritz, H.Sünkel ed. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41, pp 327-380.*
- Groten, E. (1984): Model Refinements in the Solution of the Boundary Value Problem of Physical Geodesy. *Proc: Beijing Int. Summer School, Local Gravity Field Approximation, Beijing, China, Aug. 21-Sept. 4, 1984.*
- Gurtner, W. (1978): Das Geoid in der Schweiz. *Mitteilung des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie, Nr. 20, p.110.*
- Hanafi, M.S.A. (1987): Gravity Field Data Reduction Using Height, Density, and Moho Information. *Dissertation am Geodätischen Institut der Technischen Universität Graz.*
- Heck, B. (1986): Time Dependent Geodetic Boundary Value Problems. *In: Proc. Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets, Prague, pp 195-225.*

- Heck, B., W. Grüniger (1987): Modification of Stokes' Integral Formula by Combining Two Classical Approaches. In: *Proc. of IAG General Assembly, Vancouver*, pp 319-337.
- Heiskanen, W.A., H. Moritz (1984): *Physical Geodesy. Reprint Inst. of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.*
- Heitz, S. (1980): *Mechanik fester Körper. Mit Anwendungen in Geodäsie, Geophysik und Astronomie. Band 1. Dümmeler, Bonn, ISBN 3-427-78921-7.*
- Heitz, S. (1983): *Mechanik fester Körper. Mit Anwendungen in Geodäsie, Geophysik und Astronomie. Band 2. Dümmeler, Bonn, ISBN 3-427-78961-6.*
- Hegland, T.M. (1988): Numerische Lösung von Fredholmschen Integralgleichungen erster Art bei ungenauen Daten. *Diss. ETH Nr. 8553, ADAG Administration & Druck AG.*
- Helmert, F.R. (1880): *Mathematische und Physikalische Theorien der Höheren Geodäsie. Band 1 und 2. Druck und Verlag von B.G.Teubner.*
- Henrici, P. (1972): *Elemente der Numerischen Analysis, Band 1. B.I.-Taschenbücher, Bd.551, p.227.*
- Henrici, P. (1972): *Elemente der Numerischen Analysis, Band 2. B.I.-Taschenbücher, Bd.562, pp.227-425.*
- Hein, G.W. (1982a): A Contribution to 3d-Operational Geodesy. (Part 1: Principle and Observational Equations of Terrestrial Type). *DGK, Reihe B, Nr. 258/VII.*
- Hein, G.W. (1982b): A Contribution to 3d-Operational Geodesy. (Part 1: Principles of Solution). *DGK, Reihe B, Nr. 258/VII.*
- Höpcke, W. (1980): *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. de Gruyter, ISBN 3-11-007514-8.*
- Hofmann-Wellenhof, B. (1983): Representation of the Gravitational Potential by Multipoles. *Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 47.*
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Moritz (1986): Introduction to Spectral Analysis. *Lecture Notes, 4<sup>th</sup> Int. Summer School in the Mountains, Aug. 25.-Sept.5., Austria.*
- Holota, P. (1986): Boundary Value Problems in Physical Geodesy: Present State, Boundary Perturbation and the Green-Stokes Representation. In: *Proc. 1<sup>st</sup> Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, 3-6 June, Roma.*
- Hotine, M. (1969): *Mathematical Geodesy. ESSA Monograph 2, U.S. Dept. of Commerce Environmental Science Services Administration, Washington, D.C.*
- Hunziker, E. (1959): Gravimetermessungen in den Jahren 1953 bis 1957. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Band 25.*
- Jain, A.K., J.E. Lukens, J.-S. Tsai (1987): Test for Relativistic Gravitational Effects on Charged Particles. *Phys. Rev. Let., vol.58, Nr.12, pp.1165-1168.*
- Jekeli, C. (1981): Alternative Methods to Smooth the Earth's Gravity Field. *Report No. 327, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Jekeli, C. (1984): Data Processing Techniques for Airborne Gravity Gradiometry. *Manuscripta Geodaetica, Vol.9, No.4.*

- Jordan, P. (1966): Die Expansion der Erde. Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese. *Die Wissenschaft, Band 124, Vieweg & Sohn, Braunschweig, p 182.*
- Jordan, S.K. (1972): Self-Consistent Statistical Models for the Gravity Anomaly, Vertical Deflections, and Undulation of Geoid. *JGR, Vol.77, No. 20, 3660-3670.*
- Jordan, S.K., W.G. Heller (1978): Upward Continuation of Gravity Disturbance Covariance Functions. *JGR, Vol.83, No. B4, 1816-1824.*
- Kahle, H.-G., E.Klingelé, St. Müller, R. Egloff (1976a): The variation of crustal thickness across the Swiss Alps based on gravity and explosion seismic data. *Pageoph. Vol. 114, 479-494.*
- Kahle, H.-G., E.Klingelé, St. Müller, R. Egloff (1976b): Gravimetrie, Sprengseismik und Krustenmächtigkeit entlang der Schweizerischen Geotraverse. *Schweiz. mineral. petrogr. Mitt., 56, 679-684.*
- Kahle, H.-G., D. Werner (1980): A Geophysical Study of the Rhinegraben. Part II: Gravity Anomalies and Geothermal Implications. *Geophys. J. Roy. astr. Soc., 62, 631-648.*
- Kahle, H.-G., P. J.Cagienard, St. Müller, I. Marson, F. Chaperon (1981): Absolute Schweremessungen in der Schweiz als Basis für geodynamische Untersuchungen zur aktuellen Alpentektonik. *VPK, 7, pp. 221-228.*
- Kahle, H.-G. (1988) : Einführung in die höhere Geodäsie. *Verlag der Fachvereine an den Schweizerischen Hochschulen und Techniken, Zürich. 270 p.*
- Karner, G.D., A.B. Watts (1982): On Isostasy at Atlantic-Type Continental Margins. *JGR, Vol.87, No. B4, 2923-2948.*
- Kearsley, A.H.W. (1984): Precision Limitations and Data Requirements for the Determination of Relative Geoid Heights from Gravimetry. *Report No. 26, Dept. of Geodesy, University of Upsala, Upsala, Sweden.*
- Kearsley, A.H.W. (1986): The Determination of Precise Geoid Height Differences Using Ring Integration. *Boll. Geod. Sci. Aff. 45, No. 2, pp.151-174.*
- Kissling, E. (1980) : Krustenaufbau und Isostasie in der Schweiz. *Dissertation Nr. 6655, ETH Zürich, 165 p.*
- Kissling, E. (1982) : Aufbau der Kruste und des oberen Mantels in der Schweiz. *Schweizerische Geodätische Kommission. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Band 35, 37-126.*
- Kling, Th., M. Becker, H.-J. Euler, E. Groten (1987): Studien zur detaillierten Geoidberechnung. *DGK, Reihe B, Nr.285.*
- Klingbeil, E. (1966): Tensorrechnung für Ingenieure. *B.I. Hochschultaschenbücher.*
- Klingelé, E. (1972): Contribution à l'étude gravimétrique de la Suisse Romande et des régions avoisinantes. *Matériaux pour la Géologie de la Suisse, Géophysique No. 15, Commission Suisse de Géophysique.*
- Klingelé, E. (1978) : Un nouveau Logiciel pour les Corrections Topographiques en Gravimetrie. *Bericht an die Schweizerische Geophysikalische Kommission (unveröffentlicht).*

- Klingelé, E., R. Olivier (1980): La Nouvelle Carte Gravimétrique de la Suisse (Anomalie de Bouguer). *Matériaux pour la Géologie de la Suisse, Géophysique No. 20, Commission Suisse de Géophysique.*
- Klingelé, E. (1980) : A new Method for Near- Topographic Correction in Gravity Surveys. *Pageoph, Vol. 119 (1980/81).*
- Klingelé, E., E. Kissling (1981): Zum Konzept der isostatischen Modelle in Gebirgen am Beispiel der Schweizer Alpen. In: *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Band 35, pp. 3-36.*
- Klingelé, E., H.-G.Kahle (1982): Relations entre anomalies de Bouguer et altitudes moyennes en suisse: Implications géophysiques possibles. *Geophysik, Beiträge der Schweizerischen Gesellschaft für Geophysik, Beiheft zum Jahrbuch der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, 1977-1981, pp. 55-68.*
- Klingelé, E., Schwendener H. (1984) : Geophysikalisches Untersuchungsprogramm Nordschweiz. Gravimetrische Messungen 81/82. *Technischer Bericht Nr. 84-22, Schweizerische Geophysikalische Kommission.*
- Kobold, F. (1951): Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. *Annexe au procès-verbal de la 95<sup>e</sup> séance de la commission géodésique suisse, Neuchâtel.*
- Kraiger, G.(1982): Prädiktion von Freiluftanomalien in Oesterreich. *Diplomarbeit (bei H. Sünkel), TU Graz.*
- Kuhn, W. (1981): Zur gravimetrischen Geoidbestimmung in der Schweiz. *Diplomarbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Zürich.*
- Kunt, M. (1980): Traitement numérique des signaux. *Traité d'électricité, Vol XX, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Edition Georgi, ISBN 2-604-00022-9.*
- Lachapelle, G. (1975): Determination of Geoid Undulations and Deflections of the Vertical Using a Combined Integral Formulae and Collocation Approach. *Surveying and Mapping Branch, Dept. of Energy, Mines and Resources, Ottawa.*
- Lahmeyer, B. (1985): Die Anwendung der Kollokation bei der Approximation gravimetrischer Feldgrößen. *Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Technische Universität, Clausthal.*
- Lambert, W.D (1930): The Reduction of Observed Values of Gravity to Sea Level. *Bull. géod., 26, pp 107-181.*
- Lambert, W.D, F.W. Darling (1938): Formulas and Tables for the Deflection of the Vertical. *Bull. géod., 57, pp 29-71.*
- Landau, H., K. Hehl, B. Eissfeller, G. W. Hein, W. I. Reilly (1988): Operational Geodesy Software Packages. *Schriftenreihe, Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr, München, Heft 34.*
- Lerch, F.J., S.M. Klosko, R.E. Laubscher, C.A. Wagner (1977): Gravity Model Improvement Using GEOS-3 (GEM9 + GEM10). *Goddard Space Flight Center Report No.X-921-77-246, Greenbelt, Maryland.*
- Lerch, F.J., C.A. Wagner S.M. Klosko, R.P. Belott (1978): Goddard Earth Model Development for Oceanographic Applications. *Paper presented at the Marine Geodesy Symposium, Miami.*

- Lindlohr, M. (1987): Analyse und Synthese des räumlich und zeitlich variablen Schwerefeldes mittels vektorieller Kugelflächenfunktionen. *DGK, Reihe C, Heft Nr.325*.
- MacMillan, W.D. (1958): The Theory of the Potential. *Dover Publication, Inc., New York*.
- Mader, K. (1951) : Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. *Sonderheft 11 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen*.
- Marson, I., H.-G. Kahle, St. Müller, F. Chaperon, F. Alasia (1981): Absolute Gravity Measurements in Switzerland: Definition of a Base Network for Geodynamic Investigations and for the Swiss Fundamental Gravity Net. *Bull. Géodésique, 55, 203-217*.
- Marti,U. (1985): Astrogeodätische Cogeoidbestimmung im Gebiet der Ivrea-Zone. *Diplomarbeit, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie*.
- Marti,U. (1988): Astrogeodätische Geoidbestimmung in der Ivrea-Zone. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 153, p. 51*.
- Marussi, A. (1982): Alpine Geoid Doppler Project ALGEDOP. *CSTG Bulletin, 4: 43-48*.
- Marussi, A. (1985): Intrinsic Geodesy. *Springer-Verlag, ISBN 3-540-15133-8*.
- McCarthy, D.D., A.K. Babcock (1986): The length of Day Since 1656. *Physics of the Earth and Planetary Interiors, 44, 281-292*.
- Meissl, P. (1971): Preparation for the Numerical Evaluation of Second-Order Molodensky-Type Formulas. *Report No. 163, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.
- Meissl, P. (1981): The Use of Finite Elements in Physical Geodesy. *Report No. 313, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.
- Melchior, P. (1978): The Tides of the Planet Earth. *Pergamon Press, Oxford*.
- Melchior, P. (1986): The Physics of the Earth's Core. *Pergamon Press, Oxford, p. 256*.
- Messerschmitt, J.B. (1897): Relative Schwerebestimmungen, I. Teil. *Das Schweizerische Dreiecksnetz, Band 7, Schweizerische Geodätische Kommission*.
- Messerschmitt, J.B. (1901): Polhöhen und Azimutmessungen. Das Geoid der Schweiz. *Das Schweizerische Dreiecksnetz, Band 9, Schweizerische Geodätische Kommission*.
- Messiah, A. (1976): Quantenmechanik, Bd.1. *W. de Gruyter, ISBN 3-11-003686-X*.
- Milne, W.E. (1949): Numerical Calculus. *Princeton University Press, Princeton, N.J.*
- Misner, Ch.W., K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973): Gravitation. *Freeman and Company, ISBN 0-7167-0344-0*.
- Moon, P., D.E. Spencer (1971): Field Theory Handbook. *Springer-Verlag, ISBN 3-540-02732-7*.
- Moritz, H. (1974): Precise Gravimetric Geodesy. *Report No. 219, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.
- Moritz, H. (1978): The Operational Approach to Physical Geodesy. *Report No. 277, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.

- Moritz, H. (1980a): Advanced Physical Geodesy. *Sammlung Wichmann Neue Folge, Band 13, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, ISBN 3-87907-106-3, p.500.*
- Moritz, H. (1980b) : Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Géodésique 1980, Vol. 54, Nr. 3. p. 395.*
- Moritz, H., H. Sünkel (ed) (1982): Geodesy and Global Geodynamics. Lectures Delivered at the Third Int. Summer School, Admont, Austria, Aug. 30 to Sept. 10. *Mitteilung der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 41.*
- Müller, M. (1985): Integrierte Geodäsie . Methode und ihre Anwendung im Präzisionsversuchsnetz Turtmann. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 111., p.53.*
- Mueller, I.I.(1969): Spherical and Practical Astronomy. *Frederick Ungar Publishing Co., New York.*
- Mueller, St., J. Ansorge, R. Egloff, E. Kissling (1980) : A crustal cross section along the Swiss Geotraverse from the Rhinegraben to the Po plain. *Eclogae Geol. Helv. Vol. 73, Nr. 2, 463-485.*
- Mueller, St. (1986): Die Geologische Tiefenstruktur der Schweiz: Kompilation der gegenwärtig verfügbaren Daten über die Tiefenstruktur der Schweiz. *NFP20, Bulletin 1, p.27.*
- Nagy, D. (1988): Fast Fourier Transform in Gravity Interpretation. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung., Vol. 23, 97-115.*
- Nettleton, L. L. (1939) : Determination of Density for Reduction of gravity observations. *Geophys. 4 (1939), 176-183.*
- NFP20 (1987) : Nationales Forschungsprogramm 20: Geologische Tiefenstruktur der Schweiz. Bulletin Nr. 5, herausgegeben von der Projektleitung.
- Niethammer, Th. (1910): Die Schwere in der Lotlinie von Simplonhospiz. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 12 Schweizerische Geodätische Kommission.*
- Niethammer, Th., A. Lalive (1925): Déviations de la Verticale et Isostasie. *Travaux astronomiques et géodésiques exécutés en Suisse, Commission Géodésique Suisse, Vol XVII.*
- Niethammer, Th. (1939): Das astronomische Nivellement im Meridian des St.Gotthard. II. Die berechneten Geoiderhebungen und der Verlauf des Geoidschnittes. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 20, Schweizerische Geodätische Kommission.*
- Obenson, G. (1983): Direct Integration of Stokes' Undulation and Vening Meinesz's Deflection Equations for Geographically defined Gravity Anomaly Blocks. *JGR, 88, No.B1, pp.665-668.*
- Pâquet, P., L. Louis (1988): Recovering Earth Rotation Parameters with GPS. In: eds: E.Groten, R.Strauss: *GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying, Lecture Notes in Earth Sciences, Springer Verlag, pp. 442-448.*
- Parker, R.L. (1973): The Rapid Calculation of Potential Anomalies. *Geophysical Journal of the Royal Astron. Society 31, 447-455.*

- Paulus, J., M. Stix (1986): Electromagnetic core-mantle Coupling. In: *Earth Rotation: Solved and Unsolved Problems*. A.Cazenave, ed., D.Reidel Publishing Co, Dordrecht, pp 259-267.
- Plantamour (1866): Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion. *Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève*.
- Poldini, E. (1963): Les anomalies gravifiques du canton de Genève. *Mat. Géol. suisse, Sér. géophys.*, no 4, p.63.
- Piefke, G. (1973): Feldtheorie II. *B.I.-Hochschultaschenbücher, Band 773*.
- Piefke, G. (1977): Feldtheorie I. *B.I.-Hochschultaschenbücher, Band 771*.
- Rapp, R.H., R. Rummel. (1975): Methods for the Computation of Detailed Geoids and their Accuracy. *Report No. 233, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.
- Rao, D.B. (1986): Modelling of Sedimentary Basins from Gravity Anomalies with Variable Density Contrast. *Geophysical Journal of the Roy. Astron. Soc.* 84, 207-212.
- REA (1986): Handbook of Mathematical, Scientific, and Engineering Formulas, Tables, Functions, Graphs, Transforms. *Research and Education Association, 505 Eighth Avenue, New York, N.Y. 10018*.
- Reasenberg, R.D. (1983): *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, 310, 227.
- Reilly, W.I. (1979): Mapping the Local Geometry of the Earth's Gravity Field. *Dept. of Scientific and Industrial Research, Geophysical Division, Rep. No. 143, New Zealand*.
- Rosen, R.D., D.A. Salstein, T. Nehrkorn, J.O. Dickey, T.M. Eubanks, J.A. Steppe, M.R.P. McCalla, A.J. Miller (1988): Forecasting Atmospheric Angular Momentum and Length-of-Day Using Operational Meteorological Models. *JPL Geodesy and Geophysics Preprint, No 165. March 1988*.
- Rummel, R., R.H. Rapp (1976): The Influence of the Atmosphere on Geoid and Potential Coefficients Determinations from Gravity Data. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 81, No. 32, pp 5639-5642, Nov. 1976.
- Rummel, R. (1984): From the Observational Model to Gravity Parameter Estimation. In: Schwarz, K.P. (ed.) *Proceedings, Beijing Int. Summer School, Aug.21.-Sept.4., Beijing*.
- Sansò, F. (1979): The Gravity Space Approach to the Geodetic Boundary Value Problem Including Rotational Effects. *Manuscripta Geodetica*, 4, 207-244.
- Sansò, F. (1981): The Geodetic Boundary Problem and the Coordinate Choice Problem. *Bull. Geod.* 55, 17-30.
- Schmid, H.H. (1977): Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. *Mitteilung Nr. 22, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Zürich*.
- Schneider, M. (1988): Satellitengeodäsie. *B.I. Wissenschaftsverlag, ISBN 3-411-03180-8, p.597*
- Schwarz, K.P. (ed.) (1984a): Local Gravity Field Approximation. *Proceedings, Beijing Int. Summer School, Aug.21.-Sept.4., Beijing*.

- Schwarz, K.P. (1984b): Data Types and Their Spectral Properties. In: Schwarz (ed.) *Proceedings, Beijing Int. Summer School, Aug.21.-Sept.4., Beijing.*
- Schwarzschild, B. (1988): From Mine Shafts to Cliffs - The 'Fifth Force' Remains Elusive. *Physics Today, July 1988, pp 21-24.*
- Schwendener, H. (1984): Ein gravimetrisches Krusten-Mantel-Modell für ein Profil vom nördlichen Alpenvorland bis an die Ligurische Küste. *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Band 36.*
- Seeber, G., W. Torge (1985): Zum Einsatz transportabler Zenitkameras für die Lotabweichungsbestimmung. *Zeitschrift für Vermessungswesen Nr. 10.*
- Sexl, R.U., H.K. Urbantke (1975): Gravitation und Kosmologie. *B.I.-Wissenschaftsverlag, ISBN 3-411-01487-3.*
- Shapiro, I.I., C.C. Counselman III, R.W. King (1976): *Phys. Rev. Lett. 36, 555.*
- Sideris, M. (1984): Computation of Gravimetric Terrain Corrections Using Fast Fourier Transform Techniques. *UCSE Report No. 20007.*
- Sideris, M. (1987): Spectral Methods for the Numerical Solution of Molodensky's Problem. *UCSE Report No. 20024.*
- Smirnow, W.I. (1973): Lehrgang der Höheren Mathematik. Band I-V. *Deutscher Verlag der Wissenschaften, 6.Aufl.*
- Sommerfeld, A. (1978): Partielle Differentialgleichungen der Physik. Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI. *Verlag Harri Deutsch, Thun, ISBN 3-87144-379-4.*
- Spiegel (1987): Ozonschicht: Leck im Raumschiff Erde. In: *Der Spiegel, Spiegel.Titel, Nr 49/1987, pp 262-272.*
- Spiegel (1988): Viel Spass. In: *Der Spiegel, Spiegel.Titel, Nr . 33/1988, pp 167.*
- Stacey, F.D., G.J. Tuck, G.I. Moore, S.C. Holding, B.D. Goodwin, R. Zhou (1987): Geophysics and the Law of Gravity. *Rev. Mod. Phys, 59, 157.*
- Stacey, F.D., G.J. Tuck, G.I. Moore (1988): Geophysical Considerations in the Fifth Force Controversy. *JGR, Vol. 93, No 89, 10575-10587.*
- Steiner, F. (1985a): Der in der gravimetrischen Erkundung wesentliche Rolle spielende Raumfrequenzbereich. *Publications of the Technical University for Heavy Industry, Serie A, Mining, Vol 39, Fasc. 1-4. pp. 51-60.*
- Steiner, F. (1985b): Zusammenhang zwischen der Entfernung der Messstation und der Tiefe des gravimetrischen Störkörpers. *Publications of the Technical University for Heavy Industry, Serie A, Mining, Vol 39, Fasc. 1-4. pp.41-50.*
- Stiefel, E. (1973): Methoden der mathematischen Physik I. *Verlag der Fachvereine, ETH-Zürich.*
- Stiefel, E. (1974): Methoden der mathematischen Physik II. *Verlag der Fachvereine, ETH-Zürich.*
- Stiefel, E. (1974): Methoden der mathematischen Physik IIa. Darstellungstheorie und Ergänzungen. *Verlag der Fachvereine, ETH-Zürich.*

- Strang van Hees, G. (1986): Precision of the Geoid, Computed from Terrestrial Gravity Measurements. *Manuscripta Geodaetica, Vol.11, No.1, 1-14.*
- Sünkel, H. (1977): Die Darstellung geodätischer Integralformeln durch bikubische Spline-Funktionen. *Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 28.*
- Sünkel, H. (1981): Point Mass Models and The Anomalous Gravitational Field. *Report No. 328, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Sünkel, H. (1983): Geoidbestimmung, Berechnung an der TU Graz, 2. Teil. In: *Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, III, 125-143.*
- Sünkel, H., G. Kraiger (1983): Zur Prädiktion von Freiluftanomalien. 3. *Alpengravimetrie-Kolloquium, Leoben.*
- Sünkel, H. (1984): On the Reduction of Gravity Data for the Prediction of the Gravity Disturbance Vector at Altitudes. *Report No. 359, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Sünkel, H. (1985): Fourier Analysis of Geodetic Networks. In: (eds.: Grafarend, Sansò) *Optimization and Design of Geodetic Networks. Springer Verlag, 257-300.*
- Sünkel, H. (ed) (1986): Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy. *Lecture Notes in Earth Sciences, Vol 7, Springer Verlag, ISBN 3-540-16809-5.*
- Talwani, M., J.L. Worzel, M. Landisman (1959): Rapid Gravity Computation for Two-Dimensional Bodies with Application to the Mendocino Submarine Fracture Zone. *JGR, 64, 1:49-59.*
- Thieberger, P. (1987): Search for a Substance-Dependent Force with a New Differential Accelerometer. *Phys. Rev. Let., vol.58, Nr.11, pp.1066-1069.*
- Tugluoglu, A. (1971) : Über die Empfindlichkeit astronomisch-geodätischer Lotabweichungen gegenüber Dichte- Anomalien des Untergrundes, nebst einer Anwendung auf die Bestimmung der Tiefenstrukturen im Nördlinger Ries. *Institut für Theoretische Geodäsie der Rheinischen Friedrich- Wilhelms- Universität Bonn.*
- Torge, W., G. Weber, H.-G. Wenzel (1984): 6'x10' Free Air Gravity Anomalies of Europe Including Marine Areas. *Marine Geoph.Res.,7, pp 93-111.*
- Tscherning, C.C., R.H. Rapp (1974): Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree Variances. *Report No. 208, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.*
- Tscherning, C.C., K. Poder (1982): Some Geodetic Application of Clenshaw Summation. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini.*
- Tscherning, C.C. (1986): Functional Methods for Gravity Field Approximation. In: Sünkel, H. (ed) *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy. Lecture Notes in Earth Sciences, Vol 7, Springer Verlag, ISBN 3-540-16809-5.*
- Tscherning, C.C. (1989): Density-Gravity Covariance Functions Produced by Overlapping Rectangular Blocks of Constant Density. *2<sup>th</sup> Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Pisa, June.*
- Van Willigen, G.W. (1985): De berekening van de gravimetrische geoïde van Nederland. *Afstudeerscriptie, Afdeling der Geodesie, TH Delft..*

- Vassiliou, A.A. (1985): The Use of Spectral Methodes for Spatial Modelling of Gravity Data. *Manuscripta Geodaetica*, vol 10, Nr 4, pp. 235-244.
- Vening Meinesz, F. A. (1928) : A Formula expressing the deflection of the plumb- line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity field and the gravity potential outside the geoid. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, v. 31 (3), 315-331.
- Vonarburg, B. (1988): Gibt es eine bisher unbekannte Kraft in der Natur. *Natur und Forschung, Tages-Anzeiger*, 11.8., pp51.
- Wahr, J. (1982): Computing Tides, Nutations, and Tidally-Induced Variations in the Earth's Rotation Rate for a Rotating, Elliptical Earth. In: *Geodesy and Global Geodynamics*, H. Moritz, H. Sünkel ed. *Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41*, pp 327-380.
- Wahr, J. (1988): Geodetic Constraints on Core-Mantle Coupling. *Paper presented at NASA's Crustal Dynamics Project Meeting, Okt, München*
- Walter, W. (1971): Einführung in die Potentialtheorie. *B.I.-Hochschultaschenbücher, Band 765/765a*.
- Ward, M.A. (1963): On Detecting Changes in the Earth's Radius. *Geoph. J.*, 8 (2), pp. 217.
- Wells, N. (1986): The Atmosphere and Ocean. A Physical Introduction. *Taylor & Francis, London*.
- Wenzel, H.-G. (1981): Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwereanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Vol. 106, No. 3, 102-111.
- Wenzel, H.-G. (1984): Hoçhauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, Nr. 137.
- Werner, T. (1979): Untersuchungen zur Erfassung straininduzierter Störeinflüsse auf Neigungsmessungen. *DGK, Reihe C, Nr. 253*, pp 102.
- Wichiencharoen, C. (1982a): Fortran Programs for Computing Geoid Undulations From Potential Coefficients and Gravity Anomalies. *Internal Report of the Dept. of Geod. Sci. and Surveying, The Ohio State University*.
- Wichiencharoen, C. (1982b): The Indirect Effects on the Computation of Geoid Undulations. *Report No. 336, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus*.
- Wiget, A., H.-G. Kahle, A. Geiger (1986): ALGEDOP: Ein Beitrag zur satellitengestützten Geoidbestimmung in der Schweiz. *Vermessung Photogrammetrie Kulturtechnik*, 5/86.
- Will, C.M. (1987): Experimental Gravitation from Newton's 'Principia' to Einstein's General Relativity. In: *300 Years of Gravitation*, eds. S.W. Hawking, W. Israel, *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Wirth, B. (1985): Störkörperbestimmung im Gebiet der Ivrea-Zone aus gravimetrischen und astrogeodätischen Messungen. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Ber. 93*.
- Wirth, B., U. Marti (1986): Lotrichtungs- und Schweremessungen in der Ivrea-Zone -Messkampagnen 1985/86-, Stationsprotokolle, 3-D Koordinaten und Schwerewerte. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 114*.

- Wirth, B., U. Marti, B. Bürki (1987): Lotrichtungs- und Schweremessungen in der Ivrea-Zone. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 125, p. 50.*
- Wirth, B., U. Marti (1988) : Beitrag der Geodäsie zur Dichtebestimmung der geologischen Tiefenstruktur. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 148.*
- Wirth, B. (1990a) : Schwerefeldbestimmung im Netz 'Turtmann'. *In: SGK Publikation über das Testnetz 'Turtmann', in Vorb.*
- Wirth, B. (1990b) : Höhensysteme, Schwerepotential und Niveauflächen: Systematische Untersuchungen zur zukünftigen terrestrischen und GPS-gestützten Höhenbestimmung in der Schweiz. *Schweizerische Geodätische Kommission. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Band 42.*
- Wunderlin, N. (1969) : Längen- Azimut- und Breitenbestimmungen 1961- 1964. *Schweizerische Geodätische Kommission. Astronomisch - geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 28.*
- Wunderlin, N. (1966): Lotabweichung und Geoidbestimmung aus Höhenwinkeln in den Schweizer Alpen. *Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Nr. 12, pp. 425-445.*
- Wunderlin, N. (1967): Lotabweichung, Geoid und Meereshöhen in den Schweizer Alpen. *Astronomisch- Geodätische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Band 26.*
- Wunderlin, N. (1981) : Die Neuausgleichung des Basisvergrößerungsnetzes Giubiasco. *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 49.*

