

Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz

(Fortsetzung der Publikationsreihe
«Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz»)

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission

(Organ der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften)

Zweiundvierzigster Band

HÖHENSYSTEME, SCHWEREPOTENTIALE UND NIVEAUFLÄCHEN:

**Systematische Untersuchungen zur
zukünftigen terrestrischen und GPS-
gestützten Höhenbestimmung
in der Schweiz**

Bruno Wirth

1990

Adresse der Schweizerischen Geodätischen Kommission:

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
Eidg. Technische Hochschule Zürich
ETH Hönggerberg
CH-8093 Zürich, Switzerland

Internet: <http://www.sgc.ethz.ch>

Redaktion des 42. Bandes:
Dr. B. Wirth
Prof. Dr. Hans-Gert Kahle
Dr. B. Bürki

Druck: OWADRUCK, 3173 Oberwangen, 1990
Nachdruck: Reprozentrale ETH Hönggerberg, 2004

VORWORT

HÖHENSYSTEME, SCHWEREPOTENTIALE UND NIVEAUFLÄCHEN: Systematische Untersuchungen zur zukünftigen terrestrischen und GPS-gestützten Höhenbestimmung in der Schweiz

Im Alpenraum haben schon die ersten Schweremessungen anfangs dieses Jahrhunderts markante laterale Änderungen des Geoids aufgezeigt und damit physikalisch/theoretische Untersuchungen von Gauss und Helmert bestätigt. Die Hochauflösung der Feinstruktur des Schwerefeldes ist in den letzten Jahren zu einem wichtigen Forschungsthema geworden, das in vielen Bereichen der Geowissenschaften intensiv bearbeitet wird. Satellitengestützte Vermessungsmethoden, wie GPS, haben in jüngster Zeit zur zentralen Frage geführt, wie ellipsoidische Höhen mit nivellierten Höhen verknüpft werden können. In der Schweiz liegen die Unterschiede zwischen dem globalen Referenzellipsoid, auf das sich die GPS-Messungen beziehen, und dem Geoid, auf das sich nivellierte Höhen beziehen, in der Grössenordnung von 50m. Im Alpenraum variiert der Abstand beider Bezugsflächen relativ um bis zu 10 m. Die Berechnung genauer Geoide ist daher nicht nur für die Erforschung des Erdinnern, sondern auch für die Landesvermessung von praktischer Bedeutung. Resolutionen der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) belegen dies eindrücklich. Gefordert sind als langfristiges Ziel die sogenannten "Cm-Geoide": Eine Aufgabe, die besonders in Gebirgsländern wie der Schweiz und Österreich nicht als unproblematisch bezeichnet werden kann.

In der vorliegenden Abhandlung von Herrn Dr.sc.techn. B. WIRTH wird ein gewichtiger Beitrag aus der Physikalischen Geodäsie zum Problemkreis der Höhenbestimmungen geleistet und im Anschluss an die theoretischen Analysen in praktische Lösungen umgesetzt. In einem kurzen historischen Rückblick zeigt Herr Wirth zunächst auf, mit welcher Akribie verschiedene Höhensysteme in der Schweiz von Niethammer bereits vor 50 Jahren und später auch von Bäschlin bearbeitet wurden. Anstelle der umständlichen Mittelwertbildungen für die Schwerewirkungen in der Lotlinie leitet Herr Wirth eine elegante geschlossene Formel her, indem er die Störpotentiale auf dem Geoid und auf der Topographie einführt. Darüber hinaus entwickelt er ein Rechenprogramm (LOST), mit dem man mittlere Schwerewirkungen aus der Topographie und Massenmodellen der Erdkruste in der Lotlinie berechnen kann. Dazu führt er Testrechnungen aus, untersucht den Einfluss der Nahtopographie, der Krusten-Mantelgrenze und der Zone von Ivrea. Ein aktuelles Beispiel zur Berechnung von orthometrischen Höhen mit Hilfe von LOST auf 69 Stationen in der Ostschweiz unterstreicht die Leistungsfähigkeit der neuen Subroutinen. Von praktischer Bedeutung sind dabei Genauigkeitsabschätzungen für die Nivellementshöhen, die geopotentiellen Koten, die dynamischen Höhen, Normalhöhen und die orthometrischen Höhen.

Im Abschluss des ersten Teils zeigt Herr Wirth auf analytischem Weg, dass die Berechnung der orthometrischen Höhenkorrekturen aus Nivellements- und Schweremessungen analog ist zur Berücksichtigung der Lotkrümmung. Damit ist die Identität beider Aspekte nachgewiesen. Aus physikalischen Messungen der Schwerebeschleunigung sind geometrische Grössen der Erdfigur ableitbar: Eine

Erkenntnis, die man bereits prinzipiell aus dem Gauss'schen Satz und den daraus folgenden Greenschen Sätzen erlangen kann und die hier nun in die Praxis umgesetzt wird.

Ein nicht unwesentlicher Beitrag ist die Anwendung der Kollokation und Prädiktion in der kombinierten Geoidbestimmung des Teils II. Dazu gibt Herr Wirth zunächst eine Zusammenstellung der Grundlagen dieser statistischen Interpolationsmethode und erläutert die funktionale Wirkungsweise der dazugehörenden Kovarianzfunktionen. Zudem entwickelt er ein einfaches zweidimensionales selbstkonsistentes Auto- und Kreuzkorrelationsmodell für Schwereanomalien, Lotabweichungen und Geoidundulationen. Als Vergleich dazu zeigt er die Anwendung des Markov-Modells dritter Ordnung. Beide Modelle hat er auch in einem leistungsfähigen und inzwischen von Studenten gern benutzten TurboPascal - Programm implementiert. Eine der ersten Anwendungen war die lokale Geoidbestimmung im schweizerischen GPS-Testnetz Turtmann. Hier erreichte Herr Wirth mit seiner Methode relative Genauigkeiten unter 5 mm für die Geoidhöhen: Eine bis anhin nicht erzielte Präzision. Damit wurde zum ersten Mal ein Sub-Zentimeter-Geoid bestimmt!

Im dritten Teil seiner Arbeit stellte sich Herrn Wirth die Aufgabe, die mathematisch/theoretische Analyse der ersten beiden Teile in einer operationellen Synthese mit realen Daten aus der Schweiz zu testen. Hier kam in erster Linie der GPS-gestützte Präzisionspolygonzug Visp-Zermatt in Frage. Er bildet ein zentrales Thema im Rahmen des Nationalen Forschungsprogrammes NFP20 "Geologische Tiefenstruktur der Schweiz". Dort sind für die Geodäsie drei Hauptziele definiert:

- 1) Beitrag zur Dichtebestimmung aus astro-geodätischen Messungen.
- 2a) Ermittlung von vertikalen Kurstenbewegungen aus den Wiederholungs-Nivellements Bellinzona - Brissago und Visp - Zermatt.
- 2b) Terrestrischer Polygonzug und GPS-Messungen längs der Linie Visp - Zermatt für die Geoidbestimmung sowie als Grundlage für die spätere Detektion von rezenten Krustenbewegungen.
- 3) Aufbau eines regionalen GPS-Netzes als Grundlage für das Studium der Alpendynamik.

Herr Wirth hat sich im dritten Teil besonders intensiv dem Teilziel 2b), der Integration von terrestrischen mit GPS-Messungen, gewidmet. Als Ergebnis weist er u.a. einen markanten Geoidanstieg zwischen Visp und dem Dom-Gebiet von bis zu 1.50m! nach.

In der Praxis wird es nicht überall möglich sein, aufwendige Geoidbestimmungen durchzuführen. Auch sind nicht in allen Ländern die Transformationsbeziehungen

zwischen dem WGS 84- und dem dortigen Landessystem genügend genau bekannt. Für diesen Fall hat Herr Wirth ein benutzerfreundliches Programm zur direkten Überführung von WGS 84- in Benutzerkoordinaten geschrieben und auf ein Gebiet des linken Zürichseeufers angewandt. In seinem Ansatz können die Lagerungsprobleme, Geoidundulationen, Systemtransformationen und Restklaffeninterpolationen gleichzeitig gelöst werden. Die Fa. Wild Leitz AG, Heerbrugg, hat die entsprechenden Subroutinen als Zusatz für ihr GPS-Software-Paket übernommen.

Zusammen mit diesen Ergebnissen und dem Aufzeigen der Möglichkeiten und Grenzen der orthometrischen Höhenbestimmung im Rahmen der gegenwärtig verfügbaren Messtechniken hat Herr Wirth eine wichtige wissenschaftliche Grundlage geschaffen. Die Arbeit ist disziplinübergreifend und integrierender Bestandteil der Internationalen Geoidkommission der IAG. Die Schweizerische Geodätische Kommission dankt Herrn Dr. Wirth für seinen wertvollen Beitrag zur Geodäsie in der Schweiz. Herr Prof. F. Chaperon, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, hat diese Arbeit mit vielen wertvollen Anregungen bereichert. Von der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften (SANW) wurden die Druckkosten übernommen, wofür die SGK in aller Form ihren Dank ausspricht.

Im Namen der Schweizerischen Geodätischen Kommission

Der Vizepräsident
F. Jeanrichard

Der Präsident
H.-G. Kahle

Préface

SYSTÈME D'ALTITUDES, CHAMP DE LA PESANTEUR ET SURFACES DE NIVEAU:

Recherches systématiques sur les déterminations futures des altitudes par des méthodes terrestres et par GPS en Suisse

Au début de ce siècle, les premières mesures de la pesanteur effectuées dans les régions alpines ont montré des variations latérales marquantes du géoïde, confirmant ainsi les études théoriques de Gauss et Helmert. Durant ces dernières années, la connaissance de la structure détaillée du champ de la pesanteur est devenue un thème important de recherche dans de nombreux domaines des géosciences. Les méthodes géodésiques assistées par satellites, telles que celles faisant appel au GPS, ont conduit à la question fondamentale de la liaison entre les altitudes ellipsoïdiques et celles obtenues par nivellement. En Suisse, les différences entre l'ellipsoïde global de référence, base des mesures GPS, et le géoïde, base des mesures nivellitiques, sont de l'ordre de grandeur de 50 m. Dans les régions alpines, la variation de la distance relative entre les deux surfaces de référence peut atteindre 10 m. La détermination de géoïdes exacts n'est donc pas seulement importante pour l'étude de l'intérieur de la terre mais a aussi une importance pratique pour la mensuration nationale. Les résolutions de l'Association internationale de géodésie le prouvent indubitablement. Le but à atteindre à long terme sont les "géoïdes centimétriques": tâche difficile à résoudre, particulièrement dans les pays montagneux tels que la Suisse et l'Autriche.

La présente publication de M. B. WIRTH, dr ès sc. tech., représente une importante contribution de la géodésie physique au problème de la détermination des altitudes en montrant, après les analyses théoriques, des solutions pratiques. Dans une brève rétrospective historique, M. Wirth montre avec quelle minutie, Niethammer il y a 50 ans déjà, et plus tard Baeschlin, ont, en Suisse, élaboré des systèmes d'altitudes. Au lieu de la détermination plus ou moins rigoureuse de valeurs moyennes de la pesanteur le long de la verticale, M. Wirth développe une formule élégante en introduisant les potentiels perturbateurs sur le géoïde et la topographie. En outre, il développe un logiciel (LOST) avec lequel on peut calculer la pesanteur moyenne le long de la verticale à partir de la topographie et des modèles de masse de la croûte terrestre. En plus, il effectue des tests, étudie l'influence de la topographie proche et celle de la limite du manteau et de la croûte ainsi que celle de la zone d'Ivrée. Un exemple actuel de calcul d'altitudes orthométriques à l'aide de LOST touchant 69 stations de la Suisse orientale met en évidence la performance des nouvelles sous-routines. Les estimations de la précision des altitudes obtenues par nivellement, des cotes géopotentielle, des altitudes dynamiques, normales et orthométriques sont d'une importance pratique toute particulière.

En conclusion de la première partie, M. Wirth montre analytiquement que le calcul des corrections orthométriques à partir des mesures de nivellement et de la pesanteur est analogue à la prise en considération de la courbure de la verticale. Il prouve ainsi la similitude des deux aspects. Les valeurs géométriques de la figure de la terre sont déductibles des mesures de l'accélération de la pesanteur: une constatation qui peut se

déduire déjà du théorème de Gauss et de ceux de Green qui en découlent et qui est ici transposée à la pratique.

Dans la deuxième partie, l'application de la collocation et de la prédiction à la détermination combinée du géoïde représente une contribution non négligeable. Après une récapitulation des bases de ces méthodes statistiques d'interpolation, M. Wirth explique l'effet fonctionnel des fonctions covariantes relatives à ces méthodes. En plus, il développe un modèle simple, en deux dimensions, d'autocorrélation consistante pour les anomalies de la pesanteur, les déviations de la verticale et les ondulations du géoïde. En comparaison, il montre l'application du modèle de troisième ordre de Markov. Il a programmé ces deux modèles de façon très performante en langage TurboPascal et ce logiciel est, depuis, très apprécié des étudiants. La détermination du géoïde local du réseau-test suisse de Tourtemagne en fut une première application. M. Wirth a déterminé ici, avec sa méthode, les altitudes du géoïde avec une précision relative de moins de 5 mm: une précision jamais atteinte jusqu'ici. Ainsi, pour la première fois, un géoïde a été déterminé dans le domaine subcentimétrique.

Dans la troisième partie de son travail, M. Wirth s'est fixé pour tâche de tester l'analyse théorique et mathématique développée dans les deux premières parties dans une opération de synthèse à l'aide de données réelles d'origine suisse. La polygonale de précision Viège - Zermatt, renforcée par des mesures GPS, s'y prêtait bien. Elle forme un thème central du projet de recherche PNR 20 "Exploration du soubassement géologique de la Suisse". Dans ce projet, la géodésie a trois buts:

- 1) Contribuer à la détermination de la densité à l'aide de mesures astro-géodésiques.
- 2a) Déterminer des mouvements verticaux de la croûte terrestre à partir de la répétition de nivellements sur le tronçon Bellinzone - Brissago et Viège - Zermatt.
- 2b) Effectuer des mesures terrestres et par GPS d'une polygonale le long de la ligne Viège - Zermatt en vue de la détermination du géoïde et de la détection future de mouvements récents de la croûte terrestre.
- 3) Etablir un réseau régional GPS en vue de l'étude de la dynamique des Alpes.

Dans la troisième partie, M. Wirth s'est intéressé plus particulièrement à l'intégration des mesures terrestres et des mesures GPS. Le résultat obtenu est une élévation marquante de 1,50 m du géoïde entre Viège et la région du Dôme.

Dans la pratique, il ne sera pas possible d'effectuer partout des déterminations du géoïde dispendieuses. D'ailleurs, les relations permettant la transformation entre le WGS 84 et le système de projection national ne sont pas connues de façon suffisamment exacte dans tous les pays. Pour ce cas, M. Wirth a écrit un logiciel confortable permettant la transformation directe entre le WGS 84 et le système de projection de l'utilisateur et l'a appliqué à une région située sur la rive gauche du lac de Zurich. Ce logiciel permet de résoudre simultanément les problèmes de positionnement, des ondulations du géoïde, des transformations entre différents systèmes ainsi que celui des interpolations des résidus. La maison Wild Leitz SA, Heerbrugg, a repris les sous-routines correspondantes en complément de son paquet de logiciels GPS.

Par ces résultats et la démonstration des possibilités et des limites de la détermination des altitudes orthométriques avec les techniques de mesures actuelles, M. Wirth a créé une base scientifique importante. Ce travail couvre plusieurs disciplines et forme une partie intégrante des travaux de la Commission internationale du géoïde de l'AIG. La Commission géodésique suisse remercie M. Wirth de sa précieuse contribution en faveur de la géodésie helvétique ainsi que le professeur F. Chaperon, de l'Institut de géodésie et de photogrammétrie, qui a enrichi ce travail de nombreuses et précieuses suggestions. Enfin, la Commission géodésique suisse remercie chaleureusement l'Académie suisse des sciences naturelles (ASSN) de la prise en charge des frais d'impression.

Au nom de la Commission géodésique suisse

Le vice-président

F. Jeanrichard

Le président

H.-G. Kahle

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Abstract

Teil I

1	Einleitung	1
1.1	Koordinaten- und Höhensysteme	1
1.2	Geodätisches Datum	3
1.3	Geoid, Ellipsoid und Telluroid	5
2	Höhensysteme	8
2.1	Die Nivellementshöhe oder geometrische Höhe	8
2.2	Die geopotentielle Kote C	8
2.3	Die dynamische Höhe H^D	9
2.4	Die Normalhöhe H^N	10
2.5	Die orthometrische Höhe H	12
2.6	Die Helmert'sche orthometrische Höhe	14
2.7	Die ellipsoidische Höhe	15
3	Messverfahren	16
3.1	Nivellement	16
3.2	Trigonometrische Höhenbestimmung	17
3.3	Satellitenmessverfahren	18
3.4	Hydrostatisches Nivellement	21
3.5	Hydrodynamisches Nivellement	21
3.6	Photogrammetrische Höhenbestimmung	21
3.7	Barometrische Höhenbestimmung	21
4	Konzepte zur Geoidbestimmung	22
4.1	Astrogeodätisches Geoid	22
4.2	Geoid- und Schwerefeldmodelle	24
4.3	Gravimetrisches Geoid	25
4.4	Satellitenaltimetrie	25
4.5	Satellitengestützte Geoidbestimmung	26
4.6	Kombinierte Methoden	26
5	Das Referenzsystem bei GPS	27
5.1	Das IERS Referenz System	27
5.2	IERS Standards	28
5.3	Die IERS Referenz-Koordinatensysteme	28
5.4	Terrestrisches System	28
5.5	Himmels-Koordinatensystem	28
5.6	Die Erdorientierungs-Parameter	29
5.7	Praktische Realisierung des GPS CTRS	29

6 Transformationen.....	31
6.1 Die Affinität (12 Parameter).....	31
6.2 9- oder 8-Parameter Transformation	33
6.3 Die konforme Abbildung (7 Parameter)	34
6.4 Die orthogonale massstabsfreie Abbildung	35
6.5 Die Translation.....	35
6.6 Transformation von GPS- Koordinaten in ein lokales kartesisches System.....	36
7 Nivellement und orthometrische Höhe	41
7.1 Der Schleifenschlussfehler beim Nivellement.....	41
7.2 Mittlere Schwere in der Lotlinie eines Punktes.....	44
7.2.1 Methode nach Niethammer	44
7.2.2 Berücksichtigung der Isostasie.....	49
7.2.3 Heutiger Stand	50
7.2.4 Neue Herleitung	54
7.2.5 Programm LOST	59
7.2.5.1 Elemente von LOST	59
7.2.5.2 Testberechnungen.....	59
7.2.5.3 Beispiel.....	64
7.3 Orthometrische Korrektur.....	66
8 Genauigkeitsabschätzungen	69
8.1 Die Nivellements Höhe	69
8.2 Die geopotentielle Kote.....	70
8.3 Die dynamische Höhe.....	73
8.4 Die Normalhöhe	73
8.5 Die orthometrische Höhe	73
8.6 Zusammenfassung	78
9 Quervergleich Lotkrümmung - Potential.....	79
 Teil II	
10 Kollokation und Prädiktion.....	84
10.1 Herleitung der Grundgleichungen.....	84
10.2 Die Kovarianzmatrix C_{ll} der Beobachtungen l	89
10.3 Signale s in beliebigen Zwischenpunkten	90
10.4 Genauigkeiten der berechneten Grössen	90
10.4.1 Varianzen, Kovarianzen der unbekannt Parameter und der Signale.....	90
10.4.2 Kovarianz des vollständigen Signals	93
10.4.3 Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.....	95
10.5 Allgemeines zur Kovarianzfunktion Φ	96
10.6 Anwendung auf das Störpotential: Selbstkonsistentes Modell für Δg , ξ , η , und N	98
10.7 Das vollständige Markov-Modell 3. Ordnung	101
10.8 Bisherige Arbeiten mit Kollokation in der Schweiz.....	103
10.9 Wo liegt der Erfolg der multivariaten Kollokation?	104
10.10 Vorschlag für einen neuen Ansatz der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen.....	105
10.11 Das Programm HITCOL	120

Teil III

11 Anwendungen.....	121
11.1 Lokale Geoidbestimmung in Turtmann.....	121
11.2 GPS-gestützter Präzisionspolygonzug Visp-Zermatt.....	128
11.2.1 Instrumentarium	128
11.2.2 Punktverzeichnis und Situation	129
11.2.3 Höhenbestimmungen.....	131
11.2.3.1 Ohne Korrekturen.....	134
11.2.3.2 Orthometrische Höhen aus Nivellement und Schweredaten	136
11.2.3.3 Mit Korrektur der Lotkrümmungen.....	138
11.2.3.4 Vergleich der GPS- mit den terrestrischen Höhen	139
11.2.3.5 Störpotentialbestimmung.....	142
11.2.3.6 Mit Korrektur der Lotabweichungen	148
11.2.4 Lageausgleichung.....	151
11.2.5 Dreidimensionale Ausgleichung	158
11.3 Direkter Übergang von WGS84- in Benutzerkoordinaten.....	179
11.3.1 Einleitung.....	179
11.3.2 Ansatz für die Koordinatentransformation.....	180
11.3.3 Die Kovarianzfunktion Φ	181
11.3.4 Genauigkeitsuntersuchungen.....	181
11.3.5 Anwendungsbeispiel	186
12 Schlussbemerkungen, Ausblick und Dank	189
Literaturverzeichnis	193
Anhang: Formeln zur Berechnung der Schwerewirkungen	199

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat die Bestimmung von Stationshöhen zum Thema. Diese auf Anhieb sehr einfach und vertraut wirkende Aufgabe umfasst bei näherer Betrachtung für gebirgige Gegenden wie Österreich oder der Schweiz doch einen weitgespannten Themenkreis, der sich insbesondere mit der Einführung von Satellitenmessungen noch wesentlich erweitert hat. Fachfremden Personen erscheint das Problem trivial, sind doch meistens Höhendifferenzen gemeint: z.B. die Höhe eines Neubaus über dem Höhenreferenzpunkt etc. Die Festlegung einer absoluten Höhe über Meer bietet aber doch Probleme. So sind bei den terrestrischen Höhenmessungen zuerst die Einflüsse des Schwerefeldes zu berücksichtigen, damit wohldefinierte weiterverwendbare Höhen erhalten werden. Dies umfasst in erster Linie die orthometrische Korrektur, welche beim Nivellement Schweredaten und ein Topographiemodell voraussetzt. Mit diesem Problem befasste ich mich erstmals in einer Seminararbeit im Wintersemester 1981/82 mit dem Titel "Orthometrische Höhen" unter der Leitung von Prof. Dr. H.-G. Kahle. Dieser Themenkreis wurde nun detailliert vertieft und um die Aspekte der Satellitenvermessung erweitert. Er bildet den **ersten Teil** der Dissertationsarbeit.

Die Resultate der Satellitenvermessung sind - abgesehen von Bahnstörungen - losgelöst vom Erdschwerefeld. Sie liefern geozentrische kartesische Koordinaten. Für deren Nutzung in der Landesvermessung müssen Transformationsbeziehungen zwischen dem Satelliten- und Landessystem bekannt sein. Dies erfolgt am einfachsten über die geozentrischen kartesischen Koordinaten gemeinsam für die Lage und Höhe. Um die Transformationsparameter berechnen zu können, müssen die Landeskoordinaten der Stützpunkte mit *ellipsoidischen* Höhen vorliegen, die man auf terrestrischem Wege nur mit Hilfe von *Geoidundulationen* erhalten kann. Man braucht also ein sehr genaues lokales Geoid. Damit wird folgender Zielkonflikt sichtbar: Einerseits müssen in den Transformationspunkten Geoidhöhen bekannt sein, um Transformationsparameter berechnen zu können. Andererseits ergeben die GPS-Resultate über die Transformationsbeziehungen Geoidundulationswerte, die für eine verbesserte Geoidberechnung benutzt werden. *Die Transformationsparameter sind also nicht unabhängig vom Geoid.* Man muss daher iterativ vorgehen. Die präzise lokale Geoidbestimmung aus Lotabweichungen, Schwereanomalien und direkt beobachteten Geoidundulationen mit der multivariaten Prädiktion nimmt in dieser Arbeit das **zweite Hauptkapitel** ein.

Damit die Arbeit nicht in der Theorie stecken bleibt, wurden die Untersuchungen auf ein Testbeispiel angewendet. 1987 haben wir im Diplomvermessungskurs Naters mit der

Gruppe der Vermessungsingenieure einen terrestrischen Präzisionspolygonzug von Visp nach Zermatt gemessen. Über dieselbe Strecke hat das Bundesamt für Landestopographie (L+T) ein Präzisionsnivellement gelegt. 12 Stationen des Nivellements, die auch auf den Polygonzug eingemessen wurden, haben wir zudem mit GPS vermessen. Die GPS-Auswertungen erfolgten in der Diplomarbeit von S. Nebiker unter der Leitung von dipl. Ing. M. Cocard. Sie sind in [Nebiker, 1988] dokumentiert. Die Aufbereitung der terrestrischen Daten sowie einzelne Auswertungen erfolgten in weiteren Diplomarbeiten. Die überarbeitete Datenaufbereitung und eine erste dreidimensionale Ausgleichung sind in [Wirth, 1989] dokumentiert. Die detaillierte Auswertung, Darstellung und Diskussion bilden den **dritten Teil** der vorliegenden Arbeit.

Abstract

The main topic of the presented work is the determination of station heights. At first sight, this problem seems to be simple, but on closer view it covers a broad range of topics, that has been essentially widened with the introduction of satellite surveying. The problem seems to be trivial to unfamiliar persons, as normally height differences are meant: e.g. the height of a building over the height reference marker. Thus, to get well defined and useful heights, the influence of the gravity field on terrestrial height measurements has to be taken into account. For levelling, this is first of all the orthometric correction, for which gravity measurements and a digital terrain model are needed. I was engaged the first time in this problem in a tutorial exercise during Winter semester 1981/82 with the title "Orthometric Heights" under the guidance of Prof. Dr. H.-G. Kahle. This topic has been deepened in detail and widened by the aspects of satellite surveying. It constitutes the **first part** of the thesis.

The results of satellite surveying are - besides of disturbances of the orbits - independent of the Earth's gravity field. They produce geocentric cartesian coordinates, for the use of which in land surveying the transformation relations between the satellite system and the terrestrial system of the country have to be known. The easiest way to realize the transformation is to do it in geocentric cartesian coordinates for the horizontal position and the height together. To compute the transformation parameters, the national coordinates of the base points have to be known in terms of ellipsoidal heights. They are available by terrestrial means only with the knowledge of the geoid undulations. Thus, a very accurate local geoid has to be known. With this, a somewhat unfortunate constellation becomes visible: On the one hand, geoid undulations have to be given at the base points to be able to

compute the transformation parameters. On the other hand, GPS measurements produce via the known transformation relations geoid undulations, that can be used for an improved geoid determination. This means, the transformation relations are not independent of the geoid. One has to advance iteratively. The precise local geoid determination by deflections of the vertical, gravity anomalies and direct observed geoid undulations by least squares collocation forms the **second main chapter** of this work.

For practical applications, the investigation has been tested with an actual example. In 1987, a precise three-dimensional traverse from Visp to Zermatt has been measured by a group of geodesy students during the diploma course in Naters. The Federal Office of Topography (L+T) has precisely leveled the traverse in the same year. We have measured 12 of the points of the precise leveling with GPS, points, that we have also determined with respect to the three-dimensional traverse. The GPS computations have been performed by S. Nebiker in his diploma theses under the guidance of dipl. Ing. M. Cocard and are published in [Nebiker, 1988]. The preparation of the terrestrial data as well as further calculations have been done in other diploma theses. The revised preparation of the data and a first three-dimensional least squares adjustment are published in [Wirth, 1989]. The detailed evaluation, presentation and interpretation are given in the **third part** of this doctoral thesis.

Teil I

1 Einleitung

1.1 Koordinaten- und Höhensysteme

a) **Astronomische (natürliche) Koordinaten** Φ, Λ, H ; bezogen auf das Schwerfeld der Erde.

Das System von Äquipotentialflächen und Schwerfeldlinien kann als dreidimensionales Koordinatensystem betrachtet werden. Die Richtungen der Erdachsen sind astronomisch definiert. Eine ausgezeichnete Rolle in diesem System spielt die Tangente an die Schwerfeldlinie durch P, die Richtung des Schwerevektors in P bzw. Zenitrichtung von P. Auch

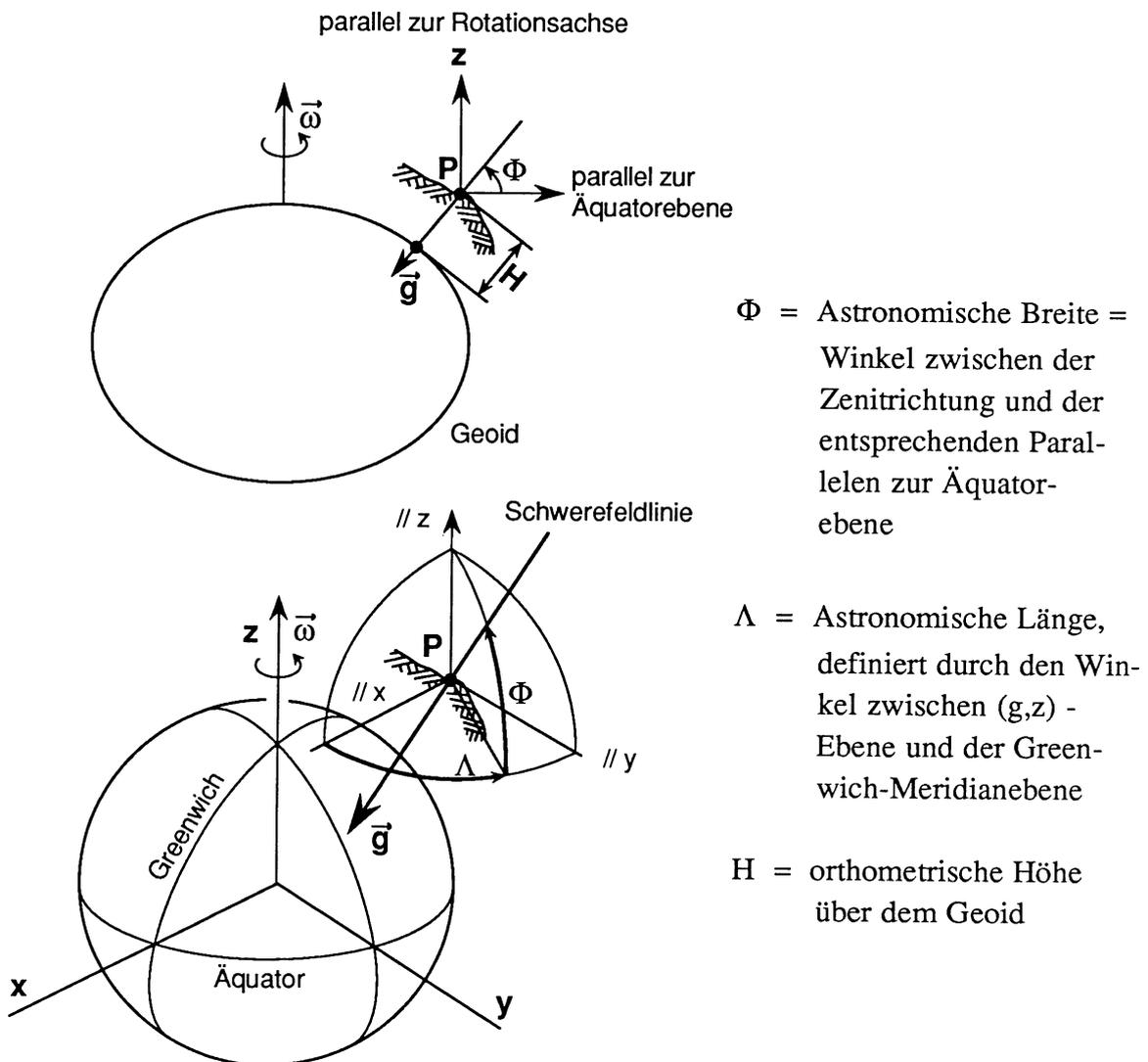


Abb. 1.1-1: Astronomisches Koordinatensystem

terrestrisch ausgeführte Messungen beziehen sich auf die Zenitrichtung. Auf diese Zusammenhänge wird ab Kap.11 detailliert eingegangen.

b) **Geodätische (geographische) Koordinaten** φ, λ, h ; bezogen auf das Erdellipsoid.

Ausgezeichnete Richtung ist hier die physikalisch nicht realisierte Ellipsoidnormale. In diesem System werden Lageberechnungen durchgeführt. Die Schwierigkeit liegt in der Festlegung des Ellipsoides (vgl. auch Kap. 1.2). Es gibt deshalb mehrere lokale und globale geodätische Systeme (jedes Land hat ein eigenes), und deshalb kann es für einen bestimmten Oberflächenpunkt P mehrere Koordinatensätze φ_i, λ_i und h_i geben!

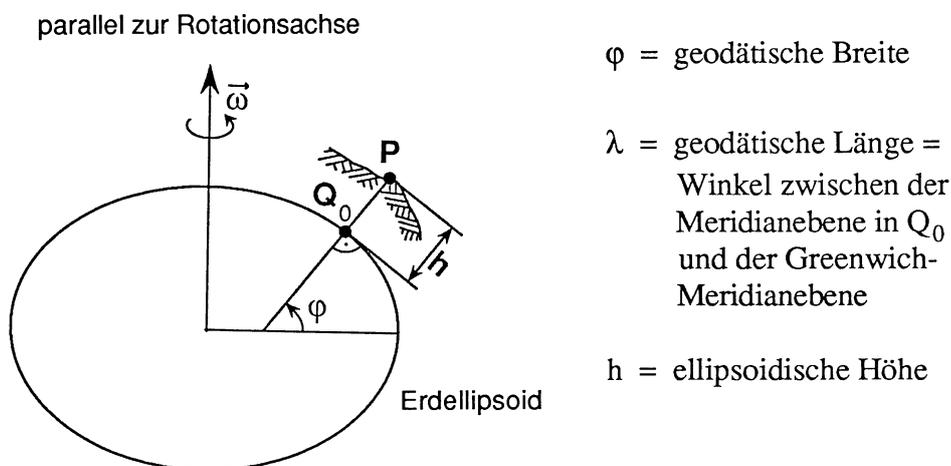


Abb. 1.1-2: Geodätisches Koordinatensystem

Die Differenzen zwischen den astronomischen und geodätischen Koordinaten definieren die Komponenten der Lotabweichung an der Erdoberfläche sowie die Geoidundulation N:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \varphi && = \text{Nord-Süd Komponente der Lotabweichung } \varepsilon \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi && = \text{Ost-West Komponente der Lotabweichung } \varepsilon \\ \xi', \eta' &&& = \text{Lotabweichungen auf Höhe des Geoides} \\ N &= h - H && = \text{Geoidundulation} \\ \varepsilon(\alpha) &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha && = \text{Lotabweichung in Richtung des Azimutes } \alpha \\ \kappa_N &= \xi' - \xi && = \text{Nord - Süd Komponente der Lotkrümmung } \kappa \\ \kappa_E &= \eta' - \eta && = \text{Ost - West Komponente der Lotkrümmung } \kappa \\ \kappa(\alpha) &= \kappa_N \cos \alpha + \kappa_E \sin \alpha && = \text{Lotkrümmung in Richtung des Azimutes } \alpha \end{aligned}$$

Die hier definierte geodätische Lotkrümmung ist im mathematischen Sinne keine Krümmung, sondern eine Differenz von zwei Richtungen, also ein Winkel.

1.2 Geodätisches Datum

Die klassische Vermessung ist an die Erdoberfläche gebunden, da die meisten Messgeräte nach dem Schwerfeld ausgerichtet werden. Die Lage-Berechnung solcher Messungen wird einfachheitshalber auf eine mathematische Fläche bezogen. Gewählt wird meistens ein Ellipsoid mit aus weltweit durchgeführten Beobachtungen abgeleiteten Erddimensionen (Form und Grösse z.B. aus internationalen Gradmessungen bestimmt, heute aus Satellitenmessungen abgeleitet), das so gelagert wird, dass es das regionale Geoid optimal annähert. Das geodätisches Datum ist also definiert durch die *Grösse, Form und Lage* eines Referenzellipsoides, also z.B.:

- Halbachse a
- Abplattung f
- Geodätische Koordinaten ϕ und λ eines Fundamentalpunktes
- Dazu kann auch noch die Geoidundulation N im Fundamentalpunkt definiert werden.

Aus dieser Definition geht hervor, dass *keine vordefinierte Beziehung zum physikalischen Geozentrum* besteht! Hinzu kommt die stillschweigende Annahme, dass das Ellipsoid räumlich astronomisch orientiert ist. Die Rotationsachse (z) des Ellipsoides ist parallel zur Erdachse, die x -Achse parallel zur astronomischen x -Achse. Dies wird mit Beobachtungsgenauigkeit durch die astronomischen Positionen und Azimute, welche zur Bestimmung des geodätischen Datums herangezogen werden, realisiert.

Bestimmung der Anzahl Parameter, die für eine moderne Festlegung des geodätischen Datums gegenüber einem Weltdatum erforderlich wären:

Geometrische Festlegung eines Koordinatensystems im Raum (3 Lage-, 3 Orientierungsparameter und ein Massstab)	: 7
Grösse und Form des gewählten Ellipsoides	: 2
Höhenfestlegung des lokalen Geoides	: 1
Total	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 10 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>

Als Massstab im geodätischen Datum wird der *Meter* verwendet. Die stillschweigende Festlegung der Orientierungen im Raum liefert die drei Orientierungsparameter der geometrischen Festlegung. Es verbleiben 6 Parameter, die den 5 definierten

gegenüberstehen. Mit obiger Auftrennung der geometrischen Festlegung erkennt man, dass ein *räumlicher* Lageparameter fehlt: die Höhe. Es muss also von einem Fixpunkt entweder die ellipsoidische oder die orthometrische Höhe festgelegt werden! Eine reine Lagefestlegung ist heute nicht mehr ausreichend. Für eine korrekte Höhenkorrektur der Distanzen für die Lageberechnungen müssen ellipsoidische Höhen vorhanden sein, und für moderne dreidimensionale Ausgleichungen wird die Höhe sowieso nicht mehr von der Lage getrennt.

In der Schweiz werden von [Schürer, 1990] folgende Grössen vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397.15500 \text{ m} \\ e^2 &= 0.006\,674\,372\,231 \\ \varphi &= 46^\circ 57' 08.''66 \\ \lambda &= 07^\circ 26' 22.''50 \\ N_0 &= 0.50 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Höhenfestlegung ist speziell gewählt, indem die orthometrische Höhe des Pierre du Niton in Genève festgelegt wurde. Die Geoidundulation N_0 hingegen wurde ursprünglich in Schwerzenbach ZH zu Null definiert, im Schnittpunkt der astronomisch bestimmten Geoidschnitte 'Meridian vom Gotthard' und 'Parallel von Zürich'. Für eine geplante Neuberechnung des Geoides der Schweiz wäre die Höhenfestlegung mit N_0 und H_0 ev. nochmals zu überdenken.

Neben dem geodätischen Datum eines jeden Landes gibt es z.B. in Europa seit langem Bestrebungen, ein gemeinsames Europäisches Datum für Lage und Höhe festzulegen.

- RETrig (Réseau Européen Trigonométrique) legt das Europäische Datum in der Lage fest (z.B. ED 1987).
- UELN (United European Levelling Net bzw. (REUN Réseau Européen Unifié de Nivellement)) legt das Europäische Höhendatum fest und stellt Vergleiche über verschiedene mittlere Meeresspiegel an.

Beide Ziele sind gegenwärtig "erfüllt", bzw. sehen durch die Möglichkeiten der Satellitenvermessung neuen Aufgaben entgegen. In [Remmer, 1987] wird beschrieben, dass UELN anstelle eines statischen Netzes ein kinematisches Höhennetz festlegen sollte, das pro Punkt eine geopotentielle Kote sowie eine Hebungsgeschwindigkeit festlegt, da festgestellt wurde, dass sich praktisch alle Nivellementsunkte heben bzw. senken. In der Schweiz kennt man heute auf allen Linien Hebungsdaten aus wiederholtem Nivellement [Gubler et al., 1981] relativ zum Fixpunkt Aarburg.

1.3 Geoid, Ellipsoid und Telluroid

Die mittlere Meeresoberfläche stellt sich so ein, dass die horizontalen Beschleunigungskräfte verschwinden. Die Meeresoberfläche ist daher eine Fläche konstanten Schwerepotentials oder Äquipotentialfläche. Sie wird als Geoid bezeichnet.

Da sich auf dem Geoid nur sehr mühsam Geometrie betreiben lässt, bezieht man dieses auf eine regelmässiger Fläche, auf ein Rotationsellipsoid. Dieses Ellipsoid wird Niveauellipsoid oder Erdellipsoid genannt. Den Abstand des Geoids vom Erdellipsoid bezeichnet man als Geoidundulation N . Der Winkel zwischen dem Schwerevektor $\vec{g}(P_0)$ (auf dem Geoid) und dem Normalschwerevektor $\vec{g}_{\text{Norm}}(Q_0)$ (auf dem Ellipsoid) heisst Lotabweichung ϵ' .

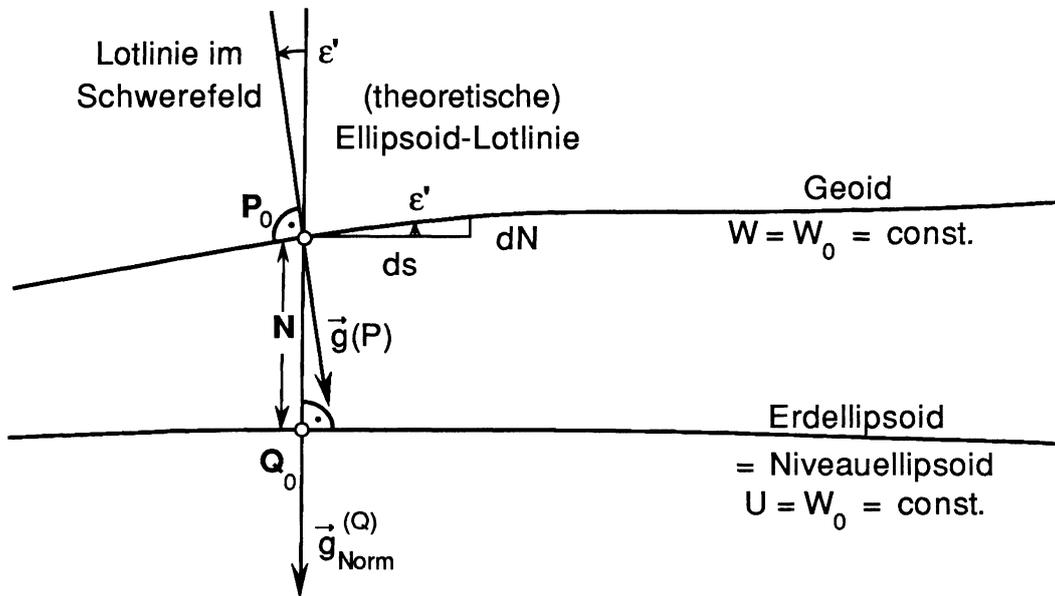


Abb. 1.3-1: Geoid und Referenzellipsoid

Das Erdellipsoid ist physikalisch folgendermassen definiert:

gleiche Winkelgeschwindigkeit	ω	} wie die vom Geoid begrenzte gesamte Erdmasse
gleiche Gesamtmasse	M_E	
gleiches Potential	$U = W_0$	
gleicher Schwerpunkt		

Das augenblicklich weltweit benutzte Ellipsoid (Canberra 1980) entspricht dem sogenannten "Geodetic Reference System 1980".

Werden die Schwerefelddaten auf der Erdoberfläche erhoben (ohne Reduktion auf das Geoid), so müssen zwei weitere Flächen zur Darstellung dieser Situation definiert werden: das Telluroid und das Quasigeoid.

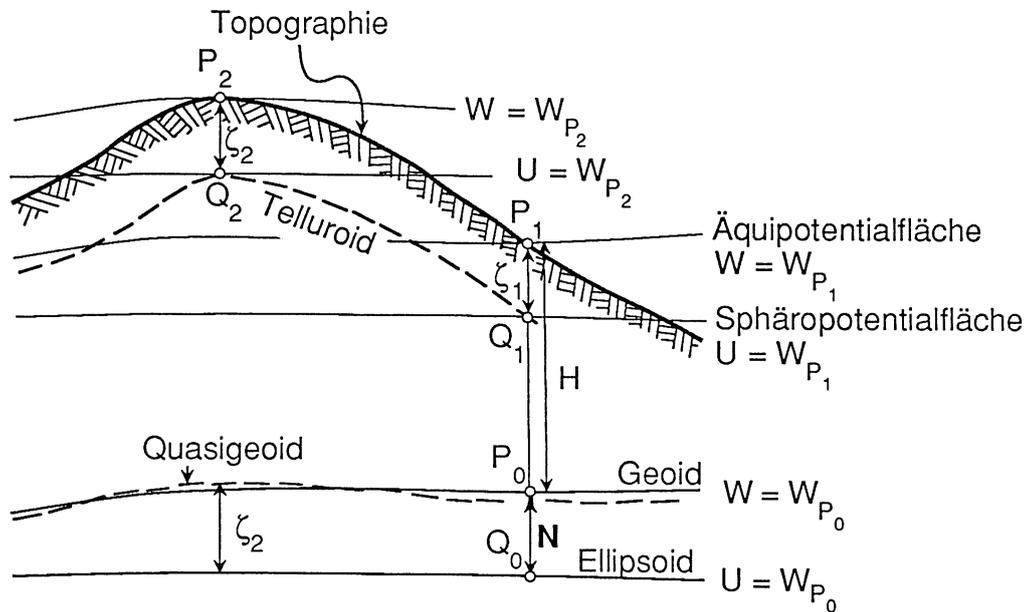


Abb. 1.3-2: Geoid, Ellipsoid, Telluroid und Quasigeoid

- W = Schwerepotential der Erde, physikalisch realisiert
 U = Schwerepotential des Erdellipsoides, Modellvorstellung
 P_1, P_2 = Punkte auf der Erdoberfläche
 P_0 = Punkt auf dem Geoid
 Q_0 = Punkt auf dem Ellipsoid
 Q_1, Q_2 = Punkte, in denen das modellmässige Potential des Erdellipsoids jeweils gleich dem tatsächlichen der Erde in den Oberflächenpunkten P_1, P_2 ist
 N = Geoidundulation
 H = Höhe der Erdoberfläche über dem Geoid (= orthometrische Höhe)
 ζ = Höhenanomalie = jeweiliger Abstand der Geopotentialfläche von der Fläche gleichen Potentials des Erdellipsoids.
 Telluroid = Fläche, die alle Q_1, Q_2 usw. enthält. Das Telluroid ist keine Äquipotentialfläche [Hirvonen, 1962].
 Quasigeoid = Fläche, die entsteht, wenn alle Höhenanomalien ζ vom Ellipsoid aus abgetragen werden. Das Quasigeoid unterscheidet sich vom Geoid i.a. um weniger als 1m.

Das Telluroid kann im Gegensatz zum Geoid direkt aus Schwereanomalien bestimmt werden (Theorie von Molodensky).

Die praktische Schwierigkeit liegt in der Sichtbarmachung einiger Punkte der Äquipotentialfläche, die das Geoid darstellt. Sie ist physikalisch nirgends realisiert. Die mittlere Meeresoberfläche, also die Oberfläche ohne Wellen und Gezeiten, weicht von der Äquipotentialfläche infolge von Inhomogenitäten der Meerwasserdichte durch Salzgehalt und Temperatur sowie durch Meeresströmungen um $\pm 1 - 3$ m ab. Sicherheitshalber wird man deshalb das Höhendatum nicht nur von einer Station zur Bestimmung des mittleren Nullpegels her ableiten, sondern von mehreren solcher Stationen her das Mittel bestimmen, das aber immer noch eine beträchtliche Unsicherheit aufweist.

Aus der Höhendefinition (Kap 1.1) ist ersichtlich, dass für die Umrechnung von ellipsoidischen zu orthometrischen Höhen die Geoidundulationen bekannt sein müssen. Auf diesen Umstand sowie weitere Aspekte der Höhen wird in den drei folgenden Kapiteln eingegangen.

2 Höhensysteme

Dieses Kapitel lehnt sich in erster Linie an [Bäschlin, 1948], woraus auch viele Ideen für das Kapitel 7 entnommen sind.

2.1 Die Nivellementshöhe oder geometrische Höhe

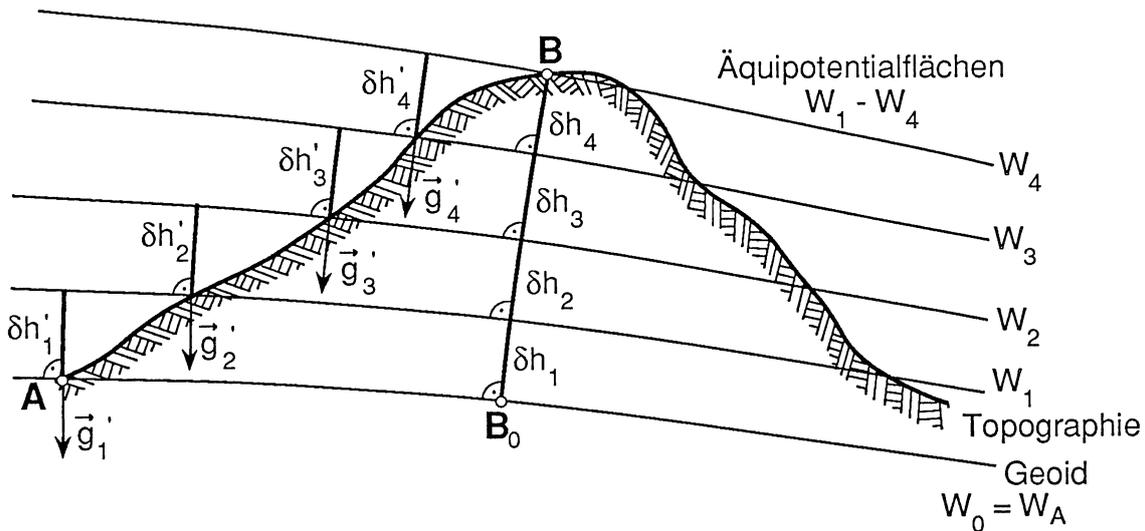


Abb. 2.1-1: Situation beim Nivellement

Das "geometrische" Nivellement zwischen den Punkten A und B liefert eine "reine" Nivellementshöhendifferenz $\sum \delta h'_i$, welche vom Weg des Nivellements abhängt. Nivelliert man eine geschlossene Schleife, so wird man infolge der Schwereanomalien als Abschlusshöhendifferenz nicht Null erhalten, sondern einen berechenbaren theoretischen Schleifenschlussfehler. Der Begriff "geometrisch" in diesem Abschnitt ist historisch bedingt und würde heute wohl nicht mehr verwendet.

2.2 Die geopotentielle Kote C

Die Potentialdifferenz ΔW zwischen zwei benachbarten Niveaulflächen ist gleich der Arbeit, welche an der Einheitsmasse zu leisten ist, um sie von einer Niveaulfläche zur anderen zu bringen.

$$\Delta W = W_A - W_B = W_{B_0} - W_B = \sum g'_i \delta h'_i = \int_{B_0}^B g dH. \quad (2.2-1)$$

Dies wird nach [Bretterbauer, 1986] "geopotentielles Nivellement" genannt. Wenn Punkt A auf dem Geoid liegt, so stellt $C = \Delta W$ die geopotentielle Kote von B dar. ΔW hat die Einheit $[\text{m}^2\text{s}^{-2}]$, ist also kein Längenmass. Als Einheit wählt man

$$1 \text{ Geopotentielle Einheit (GPU)} = 10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}.$$

Der Vorteil der geopotentiellen Koten liegt darin, dass sie unabhängig vom Weg (physikalisches Grundgesetz über die Energie) und hypothesenfrei sind. Hier gibt es keine theoretischen Schleifenschlussfehler.

Aus diesem Grund wird das einheitliche Europäische Nivellementsnetz Réseau Européen Unifié de Nivellement (REUN) seit 1954 mit geopotentiellen Koten ausgeglichen. Sie beziehen sich auf den Normal Amsterdam Peil (NAP) für 1950. In der Schweiz werden laufend neue Polygonabschnitte durch das Bundesamt für Landestopographie (L+T) neu vermessen. Das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie (IGP) der ETH Zürich liefert dazu Schweremessungen, aus denen geopotentielle Koten berechnet werden können.

Die neuen Nordamerikanischen Höhen werden ebenfalls in geopotentiellen Koten berechnet. Zilkoski [1987] berichtet über die immense Arbeit, die für die kontinentale Neuausgleichung 1988 (North American Vertical Datum of 1988 (NAVD88)) geleistet werden muss.

2.3 Die dynamische Höhe H^D

$$H^D = \sum_i \frac{g_i}{g_{\text{Norm}}^{(45^\circ)}} \delta h_i = \frac{C}{g_{\text{Norm}}^{(45^\circ)}} \quad (2.3-1)$$

Äquipotentialflächen haben dieselbe dynamische Höhe. Um die ungünstige Einheit $[\text{m}^2\text{s}^{-2}]$ der geopotentiellen Koten als "Höhenmass" wieder in [m] zu verwandeln, können diese durch die mittlere Normalschwere in 45° Breite dividiert werden ($g_{\text{Norm}}^{(45^\circ)} = 9.806199 \text{ ms}^{-2}$).

Diese Höhen sind widerspruchs- und hypothesenfrei. Trotz der Dimension [m] haben sie aber keine geometrische Bedeutung und weisen in Gebieten in grosser Höhe (Alpen) oder die sich wesentlich von 45° Breite unterscheiden, eine beträchtliche Massstabsverzerrung auf. Dieser Nachteil bewog die österreichischen Fachleute, die dynamischen Höhen nicht zu den offiziellen Höhen des staatlichen Systems zu erklären, sie aber wegen ihrer Bedeutung für hydrologische Projekte trotzdem in die Höhendatenbank aufzunehmen [Bretterbauer, 1986].

2.4 Die Normalhöhe H^N

Um die Massstabsverzerrungen der dynamischen Höhen bei Breiten ungleich 45° oder Höhen ungleich 0 müM zu umgehen, kann man die geopotentiellen Koten durch die mittlere Normalschwere in der Lotlinie dividieren und daraus die von Molodenski eingeführten Normalhöhen H^N erhalten:

$$H^N = \frac{C}{\bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)}}, \quad \bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} g_{\text{Norm}}^{(\varphi, h)} dh \quad (2.4-1)$$

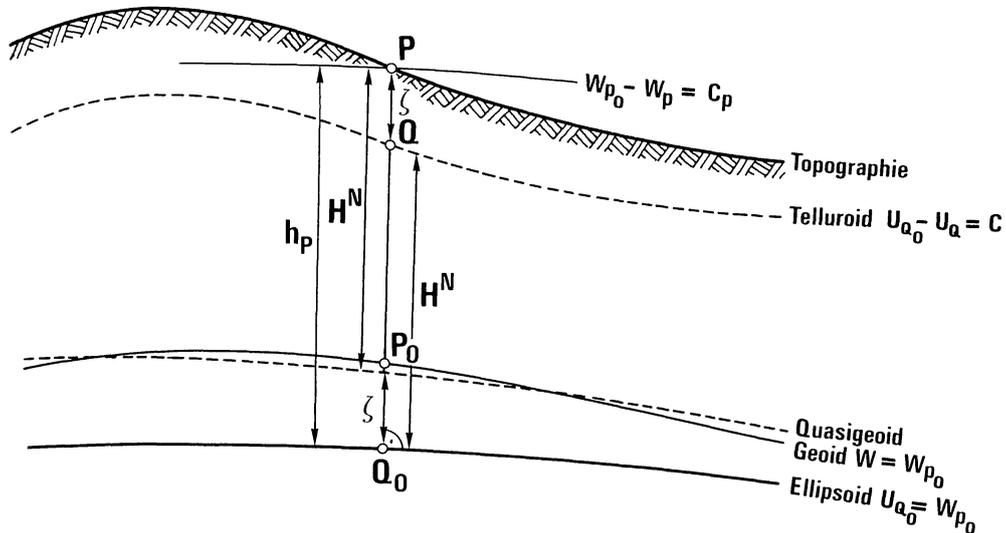


Abb. 2.4-1: Normalhöhe H^N und Höhenanomalie ζ

W : Potential im aktuellen Schwerefeld

U : Potential des Erdellipsoides

$$C_P = W_{P_0} - W_P = (W_{P_0} - U_P) - (W_P - U_P) = (U_{Q_0} - U_P) - (W_P - U_P).$$

Mit dem Störpotential $T_P = W_P - U_P$ folgt:

$$C_P = \bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)} \cdot h_P - T_P.$$

Dies dividieren wir durch $\bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)}$ und erhalten damit gemäss 2.4-1 die Normalhöhe H^N .

Für H^N gilt zudem $H^N = h_p - \zeta_p$,

$$\text{mit } \boxed{\zeta_p = \frac{T_P}{\underset{(P)}{g}_{\text{Norm}}}} = \text{Höhenanomalie oder Quasigeoidhöhe} \quad (2.4-2)$$

Die Höhe H^N des Punktes P entspricht der Höhe des entsprechenden Telluroidpunktes Q über dem Ellipsoid. Trägt man H^N vom Oberflächenpunkt P aus nach unten ab, so erhält man einen Punkt des Quasigeoides.

Die Normalschwere wird mit folgender Formel berechnet (Geodätisches Referenzsystem 1980 (GRS 80)) [Moritz, 1980b]:

$$\boxed{g_{\text{Norm}}^{(\varphi)} = g_{\text{Äqu}} \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}} \quad (2.4-3)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{geodätische Breite} \\ g_{\text{Äqu}} &= 9.780\,326\,7715 \text{ ms}^{-2} = \text{Äquatorschwere} \\ k &= 0.001\,931\,851\,353 \\ e^2 &= 0.006\,694\,380\,023 \end{aligned}$$

Die Formel 2.4-3 beschreibt die Normalschwere eines Punktes in der Breite φ auf der Höhe des Referenzellipsoides. Diese Normalschwere nimmt mit zunehmender Höhe über dem Referenzellipsoid mit dem sogenannten Freiluftgradienten ab [Heiskanen u. Moritz, 1967]. Für kleine Höhen h über dem Ellipsoid genügt ein konstanter Gradient. Mit den Werten aus [Torge, 1975] ist:

$$\boxed{\frac{\partial g_{\text{Norm}}^{(\varphi)}}{\partial h} = -0.30877 (1 - 0.00139 \sin^2 \varphi) \text{ [mgal / m]}} \quad (2.4-4)$$

Damit kann die Normalschwere als Funktion der Breite φ und Höhe h geschrieben werden:

$$\boxed{g_{\text{Norm}}^{(\varphi, h)} = g_{\text{Äqu}} \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} - 0.30877 (1 - 0.00139 \sin^2 \varphi) \cdot h} \quad (2.4-5)$$

H^N ist damit iterativ streng berechenbar und auch hypothesenfrei. Die Punkte einer Äquipotentialfläche haben im allgemeinen verschiedene Normalhöhen H^N .

In der Schweiz mit den relativ grossen Schwereanomalien hat sich die Normalhöhe nicht durchgesetzt, sie weicht zu stark von der orthometrischen Höhe ab.

Von grosser Bedeutung ist sie für die gravimetrischen Methoden nach Molodensky und für die Landesvermessung Osteuropas (UdSSR, Polen, DDR usw).

2.5 Die Orthometrische Höhe H

Die orthometrische Höhe H_B eines Punktes B ist sein Abstand vom Geoid, gemessen längs der durch B verlaufenden gekrümmten Lotlinie.

$$H_B = \sum_i \delta h_i$$

Berechnung der orthometrischen Höhe des Punktes B bezüglich A (vgl. Abb. 2.1-1):

Aus der Potentialdifferenz

$$C = W_A - W_B = W_{B_0} - W_B = \sum_i g_i \delta h_i = \int_{B_0}^B g \, dh = \bar{g}_B \cdot H_B$$

$$\bar{g}_B = \text{mittlere Schwere in der Lotlinie} = \frac{1}{H} \cdot \int_{B_0}^B g \, dh,$$

die orthometrische H_B :

$$H_B = \frac{C}{\bar{g}_B}$$

(2.5-1)

Die orthometrischen Höhen werden als offizielle Höhen des neuen österreichischen Höhensystems verwendet [Bretterbauer, 1986].

Im allgemeinen ist die direkte Messung der Schwere im Erdinnern nicht möglich. Deshalb muss eine Hypothese über die Massenverteilung der Erde zumindest in einer gewissen Umgebung aufgestellt und daraus \bar{g} berechnet werden.

H lässt sich also nicht hypothesenfrei bestimmen. Infolge der Nichtparallelität der Niveauflächen liegen Punkte gleicher orthometrischer Höhe nicht auf derselben Niveaufläche.

Der Berechnung von \bar{g} ist in diesem Bericht ein eigenes Kapitel (Kap. 7.2) gewidmet, weshalb an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen wird (vgl. dazu auch [Sünkel, 1986]).

Stattdessen soll an einem extremen Beispiel untersucht werden, wie weit sich die Länge der gekrümmten Schwerefeldlinie von der zugehörigen Sehne unterscheidet:

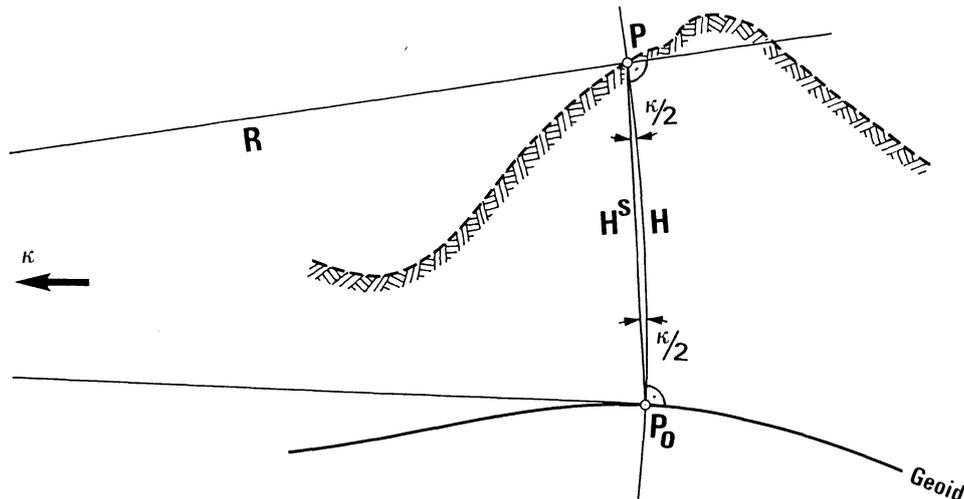


Abb. 2.5-1: Das Verhältnis von Bogenlänge H zur Sehnenlänge H^S bei der Schwerefeldlinie

Als Lotkrümmung κ bezeichnen wir die Differenz zwischen der Lotrichtung im Oberflächenpunkt P und der Lotrichtung im Geoidpunkt P_0 (vgl. Kap. 1.1). Als extreme Werte dafür können $60''$ im Oberflächenpunkt und $30''$ im Geoid angenommen werden (also $\kappa = 30''$).

Als Punkthöhe nehmen wir die orthometrische Höhe $H = 3000$ m. H^S ist der Abstand von P nach P_0 , gemessen längs der Sehne.

$$R \text{ (Krümmungsradius)} = \frac{H}{\text{arc}(\kappa)}, \quad H^S = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)$$

$$\text{Die Differenz } H - H^S = 3000 \text{ m} - 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)$$

$$= 3000 \text{ m} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)}{\text{arc}(\kappa)}\right) = \underline{\underline{0.0026 \text{ mm} !}}$$

D.h. diese Differenz kann auf alle Fälle vernachlässigt werden.

2.6 Die Helmert'sche orthometrische Höhe

Bei der Annahme, dass jede Station auf einer ebenen Platte liegt (also dass keine Berge und Täler existieren), und diese Platte eine konstante Gesteinsdichte von $\rho = 2.67 \text{ g / cm}^3$ aufweist, ist

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial g_{\text{Norm}}}{\partial h} + 4\pi G\rho = -0.0848 \text{ mgal / m} \quad (2.6-1)$$

Dies ist die Änderung der Schwere mit der Höhe, also von der Erde gegen aussen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Überlegung mit einer ebenen oder einer sphärischen Bouguerplatte durchgeführt wird. Die mittlere Schwere in der Lotlinie ergibt sich aus der gemessenen Oberflächenschwere in P und der Schwereänderung nach 2.6-1 (allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen, also vom Punkt P in die Tiefe) zu

$$\bar{g} = g_{\text{Beob}}^{(P)} - \frac{1}{H} \int_0^H \left(\frac{\partial g_{\text{Norm}}}{\partial h} + 4\pi G\rho \right) h \, dh = g_{\text{Beob}}^{(P)} - \left(\frac{\partial g_{\text{Norm}}}{\partial h} + 4\pi G\rho \right) \frac{H}{2}$$

$$\bar{g} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.0424 \cdot H \quad (2.6-2)$$

Damit ergibt sich die sogenannte Helmertsche orthometrische Höhe zu

$$H = \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.0424 \cdot H} \quad (2.6-3)$$

Vgl. dazu auch [Sünkel, 1986, Formeln 2-7 und 2-8]. Dies ist im Prinzip das Höhensystem der BRD. Es wird nur an Stelle der beobachteten Schwere g_{Beob} die Normalschwere g_{Norm} verwendet, da früher die Oberflächenschwerewerte nicht verfügbar waren [Niemeier, 1987].

2.7 Die ellipsoidische Höhe

Die ellipsoidische Höhe h_P ist der Abstand des Punktes P vom Referenzellipsoid. Dieses System ist geometrisch definiert und unterliegt keinen Einflüssen des lokalen Schwerfeldes bzw. zeitlichen Schwerfeldänderungen [Torge, 1987]. In [Niemeier, 1987] werden sie als fundamentales geometrisches Höhensystem bezeichnet. Die ellipsoidische Höhe kann als Differenz des Normalschwerepotentials U dargestellt werden (vgl. Abb. 2.4-1).

$$h_P = \frac{U_0 - U_P}{\bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)}} \quad ; \quad \bar{g}_{\text{Norm}}^{(P)} = \frac{1}{h_P} \int_{Q_0}^P g_{\text{Norm}} \, dh \quad (2.7-1)$$

Verwendet wird hier ein globales Referenzellipsoid, nicht zu verwechseln mit dem jeweiligen nationalen Referenzellipsoid, für das auch ein ellipsoidisches Höhensystem realisiert werden kann.

Zwischen den ellipsoidischen, orthometrischen und Normalhöhen bestehen die Zusammenhänge:

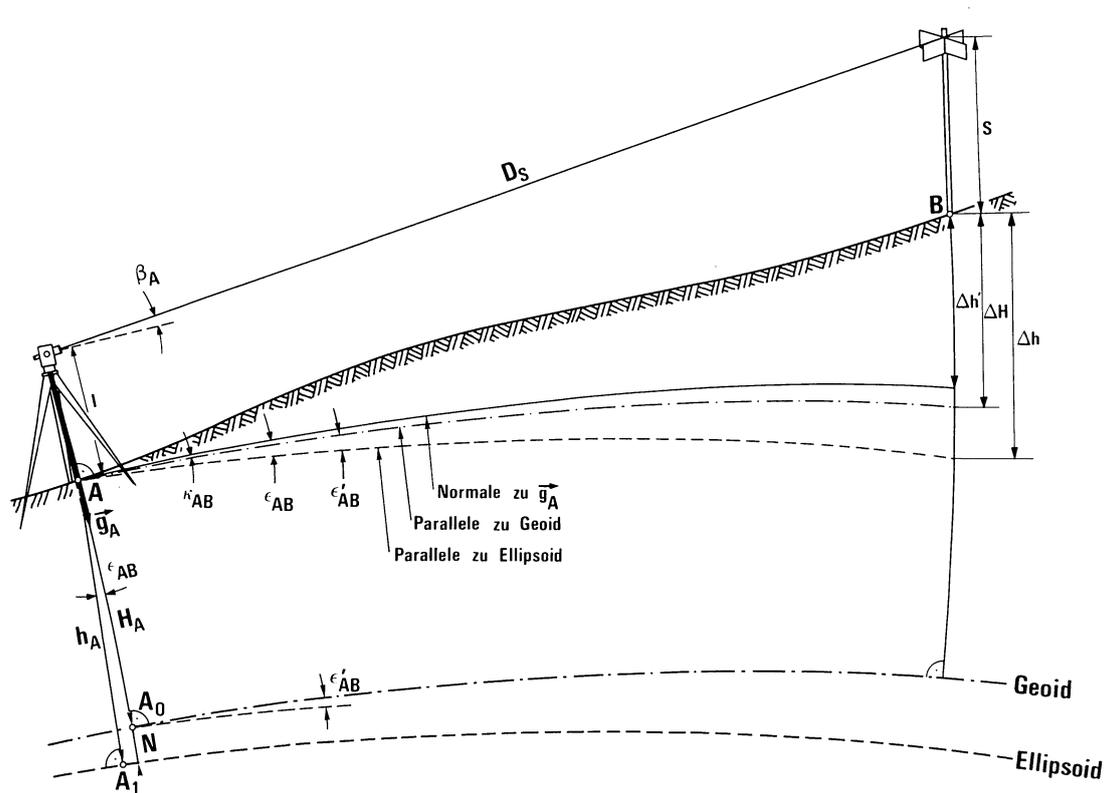
$$h_P = H + N = H^N + \zeta \quad (2.7-2)$$

ist. Die Differenz entspricht hier gerade der Oberflächenlotabweichung ϵ_{AB} in Richtung AB.

In [Becker, 1987] wird beschrieben, wie heute in vielen Ländern mit gutem Erfolg vom traditionellen Nivellement zu Fuss abgekommen wird und immer mehr computergestütztes motorisiertes Nivellement betrieben wird. Die Vorteile sind bedeutend:

- Die tägliche Produktion von 12 km für einen 5.5 Stundentag liegt deutlich höher als zu Fuss.
- Die Nachmessrate ist kleiner als 5%.
- Messungen sind auch im Hochsommer und über die Mittagszeit trotz Flimmern und Refraktionseinflüssen möglich, da die Visurlinie vom Auto aus höher liegt und damit diese Einflüssen weniger Auswirkungen auf die Messungen haben.
- Es wird gleiche oder bessere Genauigkeit als zu Fuss erreicht.
- Die Messungen sind weniger anstrengend.

3.2 Trigonometrische Höhenbestimmung



h : Ellipsoidische Höhe

H : Geoidische Höhe

Abb. 3.2-1: Die trigonometrische Höhenbestimmung und die resultierenden Höhen

$\Delta h'$ kann man aus dem Höhenwinkel β_A und der Schrägdistanz D_S bestimmen. Berücksichtigt werden dabei die Instrumentenhöhe I , die Signalhöhe S , die Erdkrümmung und die Refraktion.

$\Delta h'$ entspricht damit $\delta h'$ beim Nivellement, also einer gemessenen Höhendifferenz. Um eine orthometrische Höhendifferenz zu erhalten, muss wiederum die Lotkrümmung κ_{AB} in Richtung AB berücksichtigt werden.

Um eine ellipsoidische Höhendifferenz zu erhalten, muss man analog dazu die Oberflächenlotabweichung ϵ_{AB} in Richtung AB berücksichtigen.

Auch die trigonometrische Höhenbestimmung wird heutzutage motorisiert durchgeführt [Becker, 1987]. Mit elektronischen Theodoliten zusammen mit Distanzmesser (z.B. Kern E2 + DM503 oder WILD T2000 + DI 5) können bei Visurlinien $< 350\text{m}$ dieselben Genauigkeiten wie beim motorisierten Nivellement erreicht werden. Die tägliche Leistung entspricht etwa derjenigen des motorisierten Nivellements. Mit diesem Verfahren können gleichzeitig Lage- und Höhenbestimmung durchgeführt werden, ohne dass viel mehr Zeit beansprucht wird als für die reine Höhenbestimmung.

3.3 Satellitenmessverfahren

Dies ist ein verhältnismässig junges Verfahren zur genauen Punktbestimmung, das aber in Zukunft eine grosse Rolle spielen wird. Wie z.B. in [Geiger und Wiget, 1986] Seite 2 dargelegt ist, kann mit Messungen an Satellitensignalen (z.B. NNSS/TRANSIT oder NAVSTAR/GPS) oder mit Laser- Distanzmessungen zu Satelliten (z.B. LAGEOS) die Beobachterposition in einem erdfesten geozentrischen kartesischen Koordinatensystem festgelegt werden.

Diese Koordinaten (X, Y, Z) können in Lage (φ, λ) und Höhe h bezüglich eines beliebig dimensionierten Referenzellipsoides umgerechnet werden (vgl. Abb. 3.3-1). h ist die ellipsoidische Höhe, gemessen längs der Flächennormalen und vom lokalen Schwerefeld unbeeinflusst. Um die ellipsoidische Höhe h in die zugehörige orthometrische Höhe H umzurechnen, ist die detaillierte Kenntnis des zum entsprechenden Referenzellipsoid gehörenden Geoides erforderlich. Es ist dann $H = h - N$.

Das Schweizer Geoid bezüglich des Bessel - Ellipsoides (mit willkürlichem Nullpunkt in Schwerzenbach) ist gut bestimmt (vgl. [Elmiger, 1969], [Gurtner, 1978] und [Elmiger und Gurtner, 1983]). Die Lage dieses Bessel - Ellipsoides gegenüber dem globalen geozentrischen (X, Y, Z) - System muss für die genauen GPS - Messungen allerdings noch bestimmt werden.

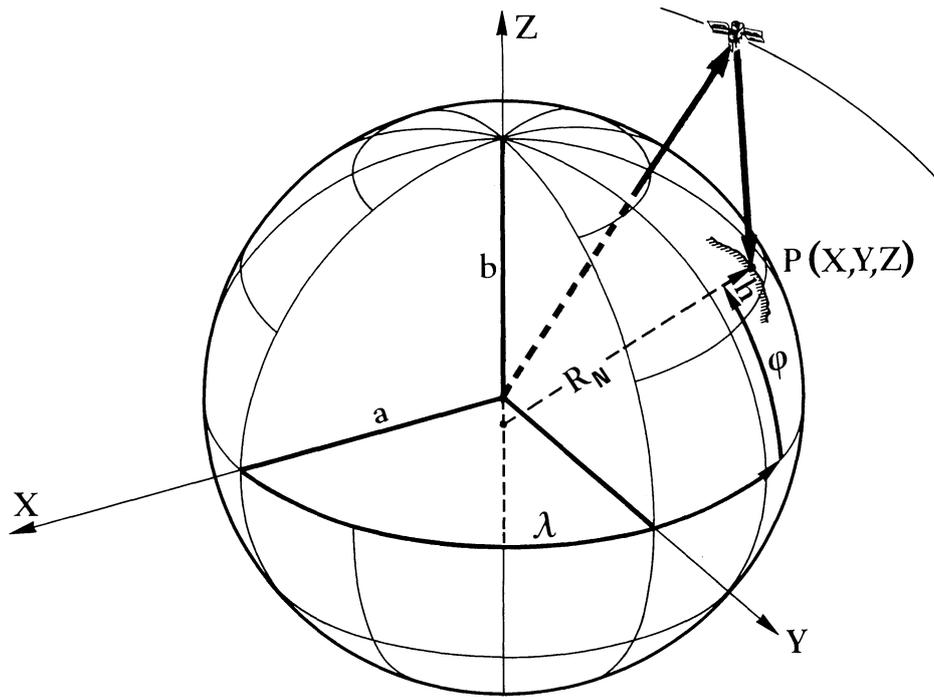


Abb. 3.3-1: Räumliche kartesische (X,Y,Z) und ellipsoidische (φ,λ,h) Koordinaten

Für die Praxis stellt sich ein weiteres Problem: In der Schweiz werden nicht orthometrische Höhen verwendet, sondern Gebrauchshöhen. Wenn man also neue Höhen bestimmen will, die gut zu den Nachbarpunkten passen sollen, muss man diesen Umstand berücksichtigen. Im Moment gibt es noch keine gesamtschweizerischen Werte für diese Differenzen. So wird es zur Zeit am besten sein, eine Referenzstation mit bekannter Gebrauchshöhe in der Nähe der Neupunkte zu wählen. Es wird eine Aufgabe der nächsten paar Jahre sein, zumindest auf den Hauptlinien des Schweizerischen Landesnivellementes strenge orthometrische Höhen zu rechnen, damit die Differenzen zu den Gebrauchshöhen verfügbar sind.

Ein Hauptanwendungsgebiet von GPS ist die relative Positionierung, bei der die hohe relative Genauigkeit des Verfahrens ausgenützt wird:

$$\begin{array}{lll}
 H_1 & = & h_1 - N_1 & H : \text{orthometrische Höhe} \\
 H_2 & = & h_2 - N_2 & h : \text{ellipsoidische Höhe} \\
 (H_2 - H_1) & = & (h_2 - h_1) - (N_2 - N_1) & N : \text{Geoidundulation} \\
 \Delta H & = & \Delta h - \Delta N
 \end{array}$$

$$\text{oder } H_2 = H_1 + \Delta h - \Delta N$$

In lokalen Netzen kann Δh mit GPS mit einer Genauigkeit von ca 1 cm [Cocard, 1987] und mit ca 2 - 3 cm über 100 bis 200 km bestimmt werden [Beutler et al., 1989]. Diese Genauigkeit möchte man natürlich mit ΔN nicht mehr stark verschlechtern. ΔN lässt sich glücklicherweise aber im regionalen Rahmen auch genauer bestimmen als die absolute Grösse N selbst. Damit kommen auch die astrogeodätische, die gravimetrische und die kombinierte Geoidbestimmung wieder in Betracht, die schlechte absolute, aber gute relative Methoden sind. Die Schwerefeldmodelle alleine sind hier weniger geeignet, da sie eine schlechte Relativgenauigkeit aufweisen (vgl. dazu Kap. 4).

Um die mit GPS sehr genau bestimmbaren ellipsoidischen Höhendifferenzen in orthometrische Höhen umzuwandeln, muss das Geoid mit vergleichbarer Genauigkeit bekannt sein. Nach [Denker, 1987] können zur Bestimmung eines genauen lokalen Geoides neben einem globalen Schwerefeldmodell in einem genügend grossen Gebiet Schweremessungen oder GPS-Stationen auf Nivellementsunkten und Schwerewerte nur noch in einer beschränkten Umgebung herangezogen werden. Denker bezeichnet diese hochgenaue (lokale) Geoidbestimmung als Herausforderung an die Geodäsie. Die allgemeine Strategie ist die folgende:

- Die langwelligen Anteile werden aus einem globalen Schwerefeldmodell entnommen.
- Die mittleren Anteile aus Schwereanomalien und Lotabweichungen.
- Die kurzwelligen Anteile aus einem hochauflösenden digitalen Terrainmodell mit einer Auflösung von 1 km oder besser (je nach Topographie).

In einem Testnetz mit 8 GPS-Stationen wurde von Denker mit der erwähnten Methode eine Quasigeoid-Bestimmung durchgeführt und die damit korrigierten ellipsoidischen GPS-Punkthöhen mit den Gebrauchshöhen verglichen. Die Übereinstimmung liegt im Mittel bei ± 2.2 cm bei einer Netzausdehnung von ca 10 km und Höhendifferenzen von max 50 m.

[Hein, 1987] propagiert die Verwendung von GPS-Basislinien in Kombination mit Schwerefelddaten und ev. bekannten Koordinaten, um mit einem integrierten Ansatz simultan orthometrische Höhen und Geoidundulationen zu bestimmen. Damit könne das Nivellement durch eine wirksamere, schnellere und ökonomischere Methode zukünftig ersetzt werden. Mit dieser Methode wurden im Testnetz "Summit Country" (USA) Genauigkeiten von ca 1.4 cm über 5 km erreicht. Zwischen den GPS-Basislinien und entsprechenden Grössen im nationalen System werden 3 Rotationen und ein Massstabsfaktor angesetzt, was auch mit dem Ansatz in [Wirth, 1989] übereinstimmt.

[Höggerl, 1987] weist im Netz Kärnten (Villach) die Genauigkeit mit GPS nach der Transformation in orthometrische Höhen mit 25 - 30 mm aus (bei Verwendung von guten Geoidhöhen) und schliesst daraus, dass GPS für die Höhenbestimmung von Triangulationspunkten ausreichend ist.

3.4 Hydrostatisches Nivellement

In küstennahen Regionen und zum höhenmässigen Verbinden von Inseln wird das hydrostatische Nivellement verwendet. Dies beruht auf dem Prinzip von kommunizierenden Gefässen.

3.5 Hydrodynamisches Nivellement

Beim hydrodynamischen Nivellement wird von der Meeresoberfläche ausgegangen, um die Höhenbeziehung zwischen Küstenlinien herzustellen. Dabei müssen die Mittelwerte der Gezeitenregistrierungs-Stationen korrigiert werden um die Einflüsse aller externen und internen Einflüsse wie Wasserdichte, Luft- und Wasserdruck auf die Meeresoberflächen-Topographie [Bloss, 1987].

3.6 Photogrammetrische Höhenbestimmung

Auf diese ebenfalls genaue Höhenbestimmungsmethode (z.B. mit Bündelblockausgleichung) möchte ich nicht eingehen. Wichtig ist, dass Höhenpasspunkte zur Verfügung gestellt werden müssen, wofür meistens Gebrauchshöhen verwendet werden. Die Resultate dürften also von derselben Art sein wie diejenige der zur Verfügung gestellten Höhen.

3.7 Barometrische Höhenbestimmung

Diese Art der Höhenbestimmung ist zu wenig genau, um zwischen verschiedenen Höhensystemen unterscheiden zu können.

Im Kapitel 3 wurde dargestellt, dass mit Hilfe der Satellitengeodäsie ellipsoidische Höhen erhalten werden. Sollen diese mit ans Erdschwerefeld gebundenen Höhen verglichen werden, so muss das Störpotential (vgl. Kapitel 2.4) bzw. die Höhenanomalie ζ mit vergleichbarer Genauigkeit bekannt sein [Torge, 1987]. Dies bedeutet, dass die Geoid- bzw. Quasigeoidbestimmung wesentlich verbessert werden muss. Im nächsten Kapitel gehen wir deshalb auf die verschiedenen Arten der Geoidbestimmung ein.

4 Konzepte zur Geoidbestimmung

Eine wichtige Aufgabe der Geodäsie ist die Geoidbestimmung, oder genauer der Höhen des Geoides über oder unter dem Referenzellipsoid. Global gesehen bewegen sich die Geoidundulationen im Bereich von ± 100 m. In geologisch gestörten Gegenden können aber schon Änderungen in den Geoidhöhen von 10 m über eine Distanz von etwa 100 km auftreten [vgl. z.B. Marti, 1988].

Geoidbestimmungen können in der Form von Einzelpunkthöhen, Profilen oder kontinuierlichen Flächen vorgenommen werden und unterscheiden sich durch sehr unterschiedlichen Detailreichtum. Die Geoidbestimmung kann global erfolgen, dann beziehen sich die Geoidhöhen auf ein globales Referenzellipsoid und sind bis heute, regional gesehen, nicht sehr detailliert, oder, lokal, mit Bezug auf ein lokales Ellipsoid und von hoher Auflösung.

Alle Techniken der Geoidbestimmung verwenden eine oder mehrere der folgenden Beobachtungsgrößen:

- Schweremessungen
- Astronomische Beobachtungen
- Messungen zu erdnahen Satelliten
- Messungen von Satelliten zur Erde (Altimetrie)
- Nivellement

4.1 Astrogeodätisches Geoid

Die *Oberflächen*lotabweichungen erhält man aus dem Vergleich von geodätischen und astronomischen Koordinaten identischer Punkte:

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi &&= \text{Nord-Süd Komponente der Lotabweichung } \varepsilon \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi &&= \text{Ost-West Komponente der Lotabweichung } \varepsilon\end{aligned}$$

Die geodätischen Koordinaten (φ, λ) erhält man aus terrestrischen Messungen im lokalen Referenzsystem oder mit TRANSIT oder NAVSTAR/GPS im entsprechenden globalen System. Die astronomischen Koordinaten werden durch Messungen zu den Fixsternen erhalten [vgl. z.B. Bürki, 1985].

Aus ξ und η kann die Lotabweichung ε für ein beliebiges Azimut α angegeben werden:

$$\varepsilon(\alpha) = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

Eine Änderung ΔN der Geoidhöhen über eine horizontale Distanz von Δs in Richtung α ergibt sich zu:

$$\Delta N = -\epsilon' \cdot \Delta s, \text{ wo } \epsilon' \text{ die Lotabweichung auf dem Geoid darstellt und } \Delta s \text{ ein Wegelement ist.}$$

ΔN kann nach [Tilk-Thies, 1987] auch geschrieben werden als $\Delta N = -\epsilon ds + (\epsilon - \epsilon') ds$,

$$\text{oder } N_B = N_A - \int_A^B \epsilon ds + \int_A^B (\epsilon - \epsilon') ds, \text{ und } (\epsilon - \epsilon') = -\kappa(\alpha) \text{ nach Abschnitt 1.1}$$

Diese Methode heisst astrogeodätisches Nivellement und wurde in der Schweiz mit Erfolg im Meridian des St. Gotthard und im Parallel von Zürich angewendet [Niethammer, 1939], [Engi, Hunziker, 1944]. Diese Methode ist nicht hypothesenfrei, da für den Übergang von ϵ auf ϵ' ein Modell der Dichteverteilung der Topographie und der geologischen Tiefenstruktur angenommen werden muss.

Aus flächenhaft verteilten Lotabweichungsstationen kann das Geoid direkt als Fläche bestimmt werden, z.B. durch Polynominterpolation oder durch Kollokation und Prädiktion [vgl. Elmiger, 1969; Gurtner, 1978; Elmiger, Gurtner, 1983 und Marti, 1988]. Der Weg, der in diesen Arbeiten eingeschlagen wurde, um in der gebirgigen Schweiz überhaupt zum Erfolg zu kommen, führt über reduzierte Lotabweichungen. Die Oberflächenlotabweichungen werden um die Effekte der Topographie und ev. weiterer Massenmodelle befreit, die so reduzierten Lotabweichungen in eine Co-Geoidfläche umgerechnet und zu den Wirkungen der verwendeten Modelle auf das Geoid (via Potential *auf der Höhe Null* berechnet) addiert. Diese Methode lieferte die bisher genaueste Geoidbestimmung in der Schweiz, mit mittleren Fehlern der Geoidhöhendifferenzen zum Referenzpunkt Schwerzenbach von <10 cm für beinahe das ganze Gebiet der Schweiz.

Die astrogeodätische Methode hat ihre Beschränkung auf überblickbare Regionen. In grösseren Ländern hat man nicht die Möglichkeit, eine Punktdichte von ca 0.1 bis 1 Punkt pro 100 km² zu beobachten. Bei wesentlich kleineren Punktdichten ist die Genauigkeit nicht mehr gewährleistet. Zu beachten ist ferner, dass mit dieser Methode nur relative Geoidundulationen bestimmt werden können: Es muss die Geoidhöhe in einem Fundamentalpunkt definiert werden.

Das österreichische Geoid wurde ebenfalls rein astrogeodätisch gerechnet [Erker, 1987]. Dazu wurden total ca 700 Lotabweichungspunkte verwendet. Das Vorgehen für das gebirgige Land Österreich entspricht dem oben erwähnten für die Schweiz. Der topographisch-isostatisch reduzierte Datensatz wurde einmal mit Flächennivellement und

einmal mit Kollokation in Cogeoidhöhen umgerechnet. Bei der Kollokation wurde ein räumlicher Ansatz der Kovarianzfunktionen gewählt, so dass sowohl Cogeoidhöhen auf Höhe Null als auch Co-Höhenanomalien in Punkthöhe berechnet werden können [Sünkel, 1983]. Die Differenz der beiden Werte nimmt über ganz Österreich Werte von maximal ± 13 cm an. Versuche in Graz haben gezeigt, dass die Hinzunahme von Schwereanomalien keine Änderungen in den Geoidhöhen bewirkt.

4.2 Geoid- und Schwerefeldmodelle

Die Erdform und ihre inhomogene Massenverteilung ist die Hauptursache für die Bahnstörungen von erdnahen Satelliten. Aus der Analyse dieser Störungen, aus Satellitenaltimetriedaten sowie aus mittleren Freiluft-Schwereanomalien können die Koeffizienten C_{nm} und S_{nm} einer Kugelfunktionsentwicklung berechnet und daraus das Störpotential und die Geoidundulationen N bestimmt werden s. z.B. [Jung, 1956] oder [Heiskanen, Moritz, 1967].

$$N = \frac{G \cdot M_E}{r \cdot g_{\text{Norm}}} \sum_{n=2}^{n'} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin\varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)$$

N	=	Geoidhöhe im Punkt (φ, λ)
$G \cdot M_E$	=	Produkt der Gravitationskonstanten mit der Erdmasse = Geozentrische Gravitationskonstante
r	=	Geozentrischer Radius des Punktes (φ, λ)
a_e	=	Mittlerer Erdradius
g_{Norm}	=	Normalschwere im Punkt (φ, λ)
P_{nm}	=	zugeordnete Legendresche Funktion von Grad n und Ordnung m
C_{nm}, S_{nm}	=	dimensionslose Kugelfunktionskoeffizienten

Auf diese Weise können aber nur die langwelligen Anteile des Geoids bestimmt werden, d.h. n' kann etwa bis zum Grad 180 gehen, was etwa 32760 Koeffizienten bedeutet. Die Genauigkeit solcher Modelle wird auf ca ± 1 m geschätzt.

Diese durch Kugelfunktionsentwicklungen dargestellten Schwerefeldmodelle haben einen wesentlichen Vorteil: sie sind global und passen deshalb gut auf das GPS-Datum.

4.3 Gravimetrisches Geoid

Von G. Stokes (1849) stammt die Methode der Berechnung von Geoidundulationen aus Oberflächenschweremessungen [Heiskanen, Moritz, 1967]:

$$N = \frac{a_E}{4 \pi g_{\text{Norm}}} \iint S(\psi) \Delta g \, d\sigma$$

N	=	Geoidhöhe im Punkt (φ, λ)
a_e	=	Mittlerer Erdradius
g_{norm}	=	Normalschwere im Punkt (φ, λ)
Δg	=	Schwereanomalie im Oberflächenelement $d\sigma$
$S(\psi)$	=	Wert der Stokes' schen Funktion im sphärischen Abstand ψ

Integriert wird über die ganze Erde, und dies ist auch schon die Hauptschwierigkeit der Methode: Es sind nicht über die ganze Erde Schweredaten verfügbar. Allerdings wird der Einfluss von Messungen mit $\psi > 30^\circ$ auf N sehr gering, weshalb für die praktische Berechnung häufig nur bis zu einem Grenzradius ψ_0 integriert wird, während der Einfluss der Gebiete ausserhalb ψ_0 aus einem Kugelfunktionsmodell des Schwerefeldes abgeleitet wird. Die Genauigkeit wird beeinflusst durch die Fehler der Schwereanomalien, durch die praktische Berechnungsart (Mittelung der Schwereanomalien auf Flächenelemente) und durch Fehler der Modelle für die Gebiete ausserhalb ψ_0 . Aufgrund grossräumiger geophysikalischer Schweremessungen auf den Weltozeanen und den dort einfacher auszuführenden Reduktionen wurden die ersten gravimetrischen Geoide im Atlantik [Talwani et al., 1972], Pazifik [Watts and Leeds, 1977] sowie im Indischen Ozean [Kahle and Talwani, 1973] bestimmt.

In der Schweiz wurde diese Methode von A. Geiger in seiner Dissertation angewandt [Geiger und Kahle, 1986] und [Geiger, 1989].

4.4 Satellitenaltimetrie

Die Höhenlage der Ozeane kann seit 1975 direkt durch Satellitenaltimetrie gemessen werden. Es wird ein Radarimpuls ausgesandt, der an der Meeresoberfläche reflektiert und wieder empfangen wird. Die Satellitenbahn wird durch Bodenstationen bestimmt. Infolge der Abstrahlbreite des Impulses erhält man mittlere Werte für eine Fläche von ca 15 x 15 km². Erste Altimeterdaten stammen vom GEOS-3 Satelliten (1975). Erste Vergleiche [z.B. Kahle et al., 1978] mit gravimetrischen Geoiden zeigten die Bedeutung der Verfahren auf;

wenn man die langwelligen Anteile der Stokes' schen Methode mit den kurzwelligen Daten der Altimetrie kombiniert.

4.5 Satellitengestützte Geoidbestimmung

Sind in einem Gebiet für einige Punkte sowohl ellipsoidische (z.B. aus GPS-Beobachtungen) als auch orthometrische Höhen (aus Präzisionsnivellements und Schweremessungen) bekannt, so kann daraus ein Geoid-Höhenlinienplan konstruiert werden, indem eine Fläche (im einfachsten Fall eine Ebene oder aber eine Fläche höherer Ordnung) bestmöglich durch die Punkte gelegt wird. Damit kann in jedem beliebigen Punkt dazwischen die Geoidhöhe interpoliert werden. Dieses Verfahren ist analog zur astrogeodätischen Geoidbestimmung und geht wie diese davon aus, dass das Geoid zwischen den Stützpunkten glatt verläuft und damit interpolierbar ist. Ein erstes erfolgreiches Pilotprojekt war das NF-Projekt ALGESTAR [Marti, 1990]. Im Rahmen von ALGESTAR wurden 40 gleichmässig über die Schweiz verteilte Stationen mit GPS bestimmt. Die erreichte Genauigkeit betrug dabei im Mittel ca. 5 cm. Der Vergleich der orthometrisch korrigierten Punkthöhen (alle Stationen sind nivellitisch ans Landesnivellement angeschlossen) mit den ellipsoidischen Höhen aus GPS ergab ein Geoid, das in seiner Form mit einer Genauigkeit von ca. 10 cm bestimmt ist.

4.6 Kombinierte Methoden

Im meistens lokalen Rahmen können Lotabweichungen, Schwereanomalien und mit GPS und Nivellement bestimmte Geoidundulationen kombiniert mit der Methode der Kollokation und Prädiktion zur Berechnung von hochgenauen Geoiden verwendet werden. Auf diese Methode wird in dieser Arbeit noch detailliert eingegangen.

Bei Nivellementsnetzen von kontinentaler Ausdehnung können GPS-Höhen in Kombination mit Geoidundulations-Differenzen direkt herangezogen werden, um obere Grenzen für die systematischen Fehler des Nivellementes festzulegen und um die Netze zu stabilisieren [Zilkoski, 1987, p58]. Wir wollen deshalb im folgenden Kapitel das GPS-Referenzsystem etwas genauer anschauen:

5 Das Referenzsystem bei GPS

GPS ist ein Messverfahren aus der Satellitengeodäsie, wozu zwei Referenz-Koordinatensysteme benötigt werden. Einmal wird ein erdfestes oder terrestrisches System (CTRS Conventional Terrestrial Reference System) benötigt, da wir Punkte auf der festen Erde bestimmen möchten. Auf der andern Seite benötigen wir ein raumfestes System (CCRS Conventional Celestial Reference System) als Annäherung an ein Inertialsystem, in dem die Satellitenbewegungen formuliert und gelöst werden können. Die Satellitenpositionen transformiert man schliesslich ins erdfeste System, wozu die Transformations - Beziehungen zwischen den beiden Systemen bekannt sein müssen. Diese Beziehungen sind durch die Lage der Erde im Raum gegeben. Sie ist zeitabhängig und wird durch folgende Grössen bestimmt:

- Präzession und Nutation der Erdachse, hauptsächlich infolge der Gravitationskräfte von Sonne und Mond auf die "Äquatorwülste", was ein Drehmoment auf die Rotationsachse des "Kreisels" Erde bewirkt.
- Eigenbewegung der Erde (Rotation), welche durch GAST (Greenwich Apparent Siderial Time) gegenüber einer streng periodisch ablaufenden Zeit wie Atomzeit oder GPS-Zeit gegeben ist.
- Polbewegung (langsame Bewegung des Erdkörpers gegenüber der Rotationsachse)

Dies sind Grössen, die durch den IERS (International Earth Rotation Service) dauernd überwacht und publiziert werden [Feissel et al., 1989].

Die IERS Bulletins A und B liefern dem Benutzer laufend Informationen über die Erdorientierung im IERS Referenz-System. Sie umfassen Universal Time (UT), die Koordinaten des terrestrischen Pols und Himmelpol-Offsets. Das Bulletin A liefert eine vorgezogene wöchentliche Lösung, die Standardlösung wird monatlich im Bulletin B herausgegeben. Der jährliche Bericht, der sechs Monate nach dem Jahresende herausgegeben wird, enthält Informationen über die benutzten Daten, die Modelle, die Algorithmen und die Referenzsysteme und verbesserte Lösungen für das vergangene Jahr. Alle Lösungen stimmen mit denjenigen des Bureau International de l'Heure (BIH) mit ihren jeweiligen Unsicherheiten überein. Die Bulletins A und B, die durch das Rapid Service Sub-Bureau des U.S. Naval Observatory in Washington bzw. durch das Central Bureau des Pariser Observatoriums herausgegeben werden, sind für den Rapid Service und den Normalgebrauch bestimmt. Der jährliche Bericht sollte für wissenschaftliche und Lang-Term Analysen der Erdrotation verwendet werden.

5.1 Das IERS Referenz System

Das IERS Referenz System setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Aus den IERS Standards und dem IERS Referenz-Koordinatensystem.

5.2 IERS Standards

Die IERS Standards umfassen einen Satz von Konstanten und Modellen (Die IAU 1976 Präzessions- und die IAU 1980 Nutationstheorie), die am IERS Rechenzentrum für Very Long Baseline Interferometrie (VLBI), Lunar- und Satellite Laser Ranging (LLR, SLR) und durch das Zentralbureau bei der Kombination der Resultate verwendet werden. VLBI- und LLR-Beobachtungen haben gezeigt, dass die Präzessions- und Nutationstheorie der IAU unvollständig sind. Diese Modelle werden jedoch trotzdem als Teil der IERS-Standards verwendet, die Differenzen werden aufgezeigt.

5.3 Die IERS Referenz-Koordinatensysteme

Die IERS Referenz-Koordinatensysteme bestehen aus dem IERS Terrestrischen Referenz-Koordinatensystem (ITRF, IERS Terrestrial Reference Frame) und dem IERS Himmels-Koordinatensystem (ICRF, IERS Celestial Reference Frame). Beide Systeme werden durch Koordinatenlisten von Fixpunkten, terrestrischen Kollokationspunkten oder kompakten extragalaktischen Radioquellen realisiert.

5.4 Terrestrisches System

Der Ursprung, die Referenzrichtungen und der Massstab des ITRF sind implizit durch die zugeordneten Koordinaten der Hauptpunkte definiert. Der Ursprung des ITRF befindet sich mit einer Unsicherheit von 10 cm im Massenmittelpunkt der Erde. Die Längeneinheit ist der Meter (SI). Der IERS Referenz-Pol (IRP) und -Meridian (IRM) stimmen mit den entsprechenden Richtungen des BIH Terrestrischen Systems (BTS) innerhalb von 0.005" überein. Der BIH Referenz-Pol wurde dem Konventionellen Internationalen Pol (CIO Conventional International Origin) 1967 angeglichen. Die Unsicherheit dieser Angleichung beträgt 0.03".

Die Stationskoordinaten, welche ursprünglich das ITRF festlegen, sind jene des BTS (1987), publiziert im jährlichen Bericht des BIH 1987, p. B-4. Die Positionen sind für 1984.0 gegeben. Ebenso sind jährliche Verschiebungen dieser Stationen angegeben.

5.5 Himmels-Koordinatensystem

Ähnlich dem Terrestrischen System werden die Achsrichtungen des ICRF durch die Koordinaten von 23 Radioquellen festgelegt, die im jährlichen Bericht des BIH 1987, p. D-116 veröffentlicht sind. Der Ursprung des ICRF liegt im Baryzentrum des Sonnensystems. Die Richtung der Polachse ist für die Epoche J2000 durch die IAU Präzessions- und Nutationstheorien festgelegt. Die Nullrichtung der Rektaszension stimmt mit derjenigen des FK5 innerhalb 0.04" überein.

5.6 Die Erdorientierungs-Parameter

Die IERS Erdorientierungs-Parameter (EOP) beschreiben die Rotation des ITRF gegenüber dem ICRF in Verbindung mit dem konventionellen Präzessions-Nutations Modell. Sie modellieren den nicht voraussagbaren Teil der Erdrotation.

1. x und y sind die Koordinaten des Himmels-Ephemeriden Pols (CEP) gegenüber dem IRP, dem IERS Referenz-Pol. Der CEP unterscheidet sich von der momentanen Rotationsachse durch quasi-tägliche Schwankungen mit Amplituden unter $0.01''$. Die x -Achse verläuft in Richtung des IRM, des IERS Referenz Meridians; die y -Achse zeigt gegen 90^0 westliche Länge.
2. UT1 ist mit der mittleren Sternzeit von Greenwich (GMST Greenwich Mean Siderial Time) durch konventionelle Beziehungen verknüpft. Sie legt die Richtung des IRM im ICRF fest, zählbar um die CEP Achse. Dargestellt wird sie als Differenz $UT1 - TAI$ oder $UT1 - UTC$.

TAI ist der Atomzeit-Massstab des Bureau International de Poids et Mesure (BIPM); ihr Einheitsmass ist genau eine SI-Sekunde auf Meereshöhe. Der Nullpunkt des TAI ist so gewählt, dass $UT1 - TAI = 0$ am 1. Januar 1958. Die Instabilität von TAI ist etwa 6 Größenordnungen kleiner als diejenige von UT1. UTC unterscheidet sich von TAI durch eine ganze Anzahl Sekunden so, dass $UT1 - UTC$ absolut kleiner als $0.9s$ bleibt. Die Entscheidung, bei UTC eine "Sprung-Sekunde" (leap second) einzuführen, um obige Bedingungen zu erfüllen, liegt in der Verantwortung von IERS.

3. $d\psi$ und $d\epsilon$ sind die Offsets in Länge und Schiefe des Himmelspols in Bezug auf seine durch die konventionelle IAU Präzession / Nutation definierte Lage.

5.7 Praktische Realisierung des GPS CTRS

Das Terrestrische System CTRS ist durch ein eigenes globales Netz von Tracking Stationen realisiert. Gegenwärtig sind für GPS 5 solche Messstationen (Insel Kwajalein im Pazifik, Diego Garcia im Indischen Ozean, Ascensión im Atlantik, Hawaii im Pazifik und Colorado Springs) in Betrieb, die die Funktionstüchtigkeit der Satelliten gewährleisten, die Satellitenzeiten synchronisieren, die Bahnvermessungen und -vorausberechnungen ausführen und diese täglich zu den Satelliten übertragen.

CIGNET (Cooperative International GPS Network) ist eine Arbeitsgruppe von CSTG (International Coordination of Space Techniques for Geodesy and Geodynamics), die auf gegenwärtig 11 Stationen ebenfalls kontinuierlich GPS-Daten sammelt und dem NGS (National Geodetic Survey, Rockville) schickt. Diese Daten sind auf Anfrage erhältlich.

Aus CIGNET soll ein permanentes GPS Tracking System entstehen, das aus ca 20 Stationen bestehen wird.

Durch die Wahl der Anzahl und Verteilung dieser Messstationen und die Genauigkeit ihrer Koordinaten im CTRS kommt eine gewisse Unsicherheit bezüglich Lage und Orientierung des Terrestrischen Systems gegenüber dem theoretischen Referenzsystem auf. Sobald sich die Anzahl oder die Koordinaten der Tracking-Stationen ändern, ändern sich zwangsläufig auch die berechneten Bahndaten und damit die Resultate der GPS-Messungen, und dies bei gleicher Definition des Datums.

Die Beziehung vom CTRS zum CCRS wird von IERS übernommen. Die GPS-Satelliten stellen eine schlechte Realisierung eines praktisch inertialen CCRS dar, da sie auch nichtgravitativen Kräften unterliegen. Dies sind z.B. Strahlungsdruck des Sonnenwindes, der im Erdschatten wegfällt, Bahnkorrektur-Manöver und Widerstände durch Partikel im Weltraum. Das CCRS wird also nur durch häufiges Erneuern der Satellitenbahnberechnungen unter Berücksichtigung des bestmöglichen Modells der wirkenden Kräfte aus den Messungen von den (bekannten) Tracking-Stationen aus realisiert.

Damit sind die Voraussetzungen und die möglichen Unsicherheiten der GPS-Messungen angedeutet.

Die Resultate von GPS-Beobachtungen liegen bei Einzelpunktbestimmungen als *Ortvektor* und bei Basislinienbestimmung im Differenzenmodus als *Differenzvektor* im geozentrischen kartesischen CTRS vor. Eine andere Ausgabeart von GPS-Beobachtungen sind ellipsoidische krummlinige Koordinaten φ , λ und die ellipsoidische Höhe h . Das ist mit der bisherigen Definition des CTRS noch nicht möglich, da dies nur als Koordinatensystem definiert ist und keine Angaben über ein Ellipsoid enthalten sind. Dies kann dadurch nachgeholt werden, dass in das Koordinatensystem des CTRS ein mittleres Erdellipsoid von vorgegebener Halbachse a und Abplattung f eingepasst wird (gleicher Ursprung, gleiche Achsen). Darauf beziehen sich dann die obenerwähnten Angaben. Für die Weiterverarbeitung der Beobachtungen in ein lokales Referenzsystem geht man aber besser von den Orts- bzw. Differenzvektoren aus.

Der Übergang vom geozentrischen kartesischen CTRS auf das lokale Referenzsystem erfolgt über *Transformationen*. Das lokale Koordinatensystem muss im geozentrischen kartesischen CTRS festgelegt werden. Dies geschieht über eine Reihe von Punkten, die in beiden Systemen bekannt sind. Im nächsten Kapitel gehen wir deshalb näher auf die Transformationen ein.

6 Transformationen

Die Transformationen interessieren uns hier besonders, da GPS-Beobachtungen mit terrestrischen Beobachtungen kombiniert, also ins geodätische System transformiert werden müssen. Dies geschieht über eine räumliche Koordinatentransformation. An eine solche Transformation werden wenigstens einige minimale Bedingungen, wie Geradentreue, Paralleltreue und Verhältnistreue gestellt. Die allgemeinste Abbildung, die diese Forderungen erfüllt, ist eine lineare Abbildung, die Affinität genannt wird.

6.1 Die Affinität (12 Parameter)

Die Affinität erfüllt obige drei Bedingungen, verändert jedoch die Grösse, die Form, die Position und die Orientierung eines Netzes. Der Massstabsfaktor ist von der Orientierung einer Linie, aber nicht von deren Lage innerhalb des Netzes abhängig. D.h., alle parallelen Linien erhalten denselben Massstabsfaktor. Dagegen werden Winkel und damit die Form eines Netzes bei der Transformation verändert, es handelt sich nicht um eine konforme Abbildung. Die mathematische Darstellung der Affinität erfolgt über 12 Parameter. Für deren eindeutige (minimale) Bestimmung müssen 4 gemeinsame Punkte mit je 3 Komponenten bekannt sein, die nicht koplanar sein dürfen (nicht in einer Ebene liegen).

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (6.1-1)$$

$\begin{matrix} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{matrix}$

ausgedrückt im System $\mathbf{0}$
enthalten implizit 3 Massstäbe

$\begin{matrix} \Downarrow \\ \mathbf{00}' \end{matrix}$

ausgedrückt im
System $\mathbf{0}$

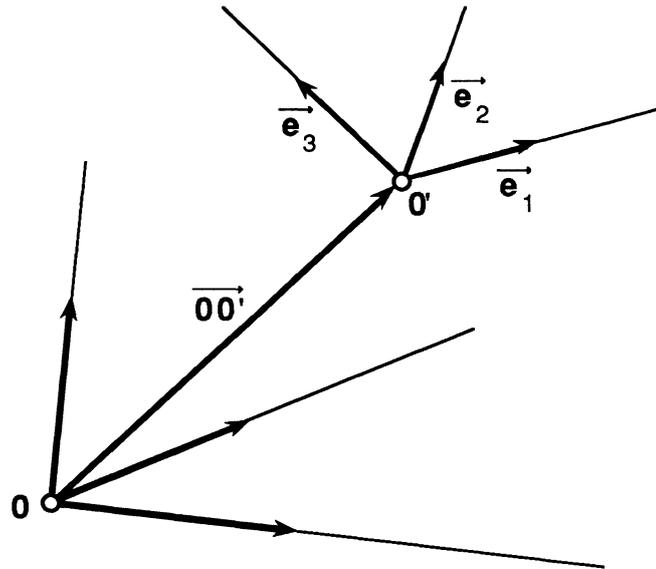


Abb. 6.1-1: Die Affinität (12 Parameter des Systems $0'$ sind frei)

Betrachtet man das System 0 als orthonormales System, so können durch $|e_i|$, $i = 1, 3$ die 3 Massstäbe angegeben und über die Skalarprodukte

$$\frac{e_i \cdot e_j}{|e_i| \cdot |e_j|}, \quad i \neq j$$

die Winkelverzerrungen der Koordinatenachsen bestimmt werden.

Falls mehr als 4 gemeinsame Punkte vorhanden sind, so lassen sich die 12 Parameter sehr leicht durch eine vermittelnde Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen. Da das System schon von Natur aus linear ist, wird keine Iteration nötig. Es müssen auch keine Näherungswerte für die Unbekannten gesucht werden. Selbst der Übergang von einem gleichsinnigen auf ein ungleichsinniges System bietet keine Probleme (z.B. Transformation von einem Rechts- in ein Linkssystem). Aus all diesen praktischen Gründen wird die affine Abbildung sehr häufig verwendet, und sei es auch nur wie in [Schmid, Heggli, 1978], um auf einfache Weise gute Näherungswerte für eine Transformation zu erhalten, die strengere Bedingungen an die Geometrie stellt.

6.2 9- oder 8-Parameter Transformation

Die Anforderungen an die Transformation können verschärft werden, wenn man voraussetzt, dass sowohl das Satelliten- wie auch das terrestrische System orthogonal (und gleichsinnig) seien, weshalb eine aus 3 Drehwinkeln abgeleitete orthogonale Drehmatrix gefordert wird. Wir können je nach Anforderungen 3 oder 2 verschiedene Massstabsfaktoren zulassen, die in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse definiert sind. Dies z.B. mit der Begründung, dass durch unvollständig korrigierte Meteo ein systematischer Fehler an der Höhe entsteht (also ein Massstab für die Lage und ein separater für die Höhe), oder dass selbst die Nord-Süd Richtung systematisch von der Ost-West Richtung verschieden sei (also 3 Massstäbe). Achtung: Diese Abbildungen sind **nicht konform**, es werden ebenfalls die Grösse, Form, Position und Orientierung des Netzes verändert. Einzig die Orthogonalität beider Koordinatensysteme wird vorausgesetzt. Man kommt also mit 9 bzw. 8 statt 12 Parametern aus.

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (6.2-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma)$$

(oder $m_2 = m_1$)

Die Abbildung ist ebenfalls linear. Nur sind für die praktische Bestimmung der Transformationsparameter Näherungswerte nötig, da die 9 Elemente der Drehmatrix \mathbf{D} nichtlineare Kombinationen der drei Drehwinkel α , β , und γ sind (d.h., die Abbildung lässt sich nicht linear in den 8 oder 9 Parametern ausdrücken). Dies macht die praktische Berechnung schon erheblich komplizierter als bei der affinen Abbildung.

6.3 Die konforme Abbildung (7 Parameter)

Lässt man nur einen Massstab zu, so ändert sich nur noch die Grösse, nicht mehr aber die Form des Netzes. Die Abbildung ist winkeltreu, beide Systeme sind orthogonal.

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \cdot \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (6.3-1)$$

Diese Abbildung hat meiner Meinung nach für dreidimensionale Netze die grösste Bedeutung. Es ist die räumliche **Helmerttransformation**. Sie entspricht dem Ansatz der Helmert-Transformation der Ebene und ermöglicht die Umrechnung von Koordinaten (oder den Vergleich) von einem orthogonalen Koordinatensystem in ein Zweites ohne Formveränderung.

In obiger Schreibweise entspricht der Ansatz dem **Bursa-Wolf** Modell [Bursa, 1962]. Im Falle der Transformation von geozentrischen Koordinaten eines lokalen Netzes sind die Rotationsparameter (α, β, γ) sehr stark mit den Translationen (X_0, Y_0, Z_0) korreliert, da über die grosse Distanz vom Geozentrum her eine Rotation praktisch identisch einer Translation ist. Das **Molodensky-Badekas** Modell [Wolf, 1963] bzw. [Badekas, 1969] umgeht die hohen Korrelationen der Modellparameter, indem die Koordinaten vorgängig auf einen Nullpunkt im Netz selbst (z.B. auf den Schwerpunkt des Netzes) bezogen werden (was einer Translation entspricht). Dass Wolf hier beim Molodensky-Badekas Modell zitiert wird, ist nicht ein Fehler. Er bezieht sich bei seinem Ansatz sogar explizit auf den Schwerpunkt des Systemes O' und gibt eine algebraische Lösung für diesen Ansatz, ähnlich, wie dies im Kapitel 6.6 gemacht wird. Wichtig im Zusammenhang mit diesen beiden Modellen sind die folgenden zwei Punkte:

a) Gemäss [Welsch et al., 1984] ist es bei beiden Modellen nicht möglich, Datumseinflüsse von Netzverzerrungen zu trennen. Dies gilt im übrigen für alle hier gezeigten Transformationen.

b) Gemäss [King et al., 1985] geben beide Modelle dieselbe Lösung für die Distanzen und Winkel im Netz: Der Massstab und die Rotationsparameter sind identisch. Einzig die Translationsparameter sind verschieden und weisen im Molodensky-Badekas Modell höhere a Posteriori Genauigkeiten auf. Zudem kann gesagt werden, dass, falls uns die Rechengenauigkeit keinen Streich spielt, die transformierten Koordinaten und damit die Restklaffen sowie die Genauigkeiten der transformierten Koordinaten für beide Modelle

identisch sind. Geometrisch gesehen gibt es genau **eine** räumliche Stellung, in der die Punkte des einen Punkthaufens (mit gleicher Anzahl und Art von Transformationsparametern verschoben) bezüglich des Zweiten die minimale Summe der Quadrate der Restklaffen aufweisen. Es könnte ja nicht als sinnvolle Transformation angesehen werden, wenn je nach Wahl des Koordinatenbezugssystems ein und desselben zu transformierenden geometrischen Punkthaufens die transformierten Koordinaten verschieden oder verschieden genau wären!

6.4 Die orthogonale massstabsfreie Abbildung

Wenn man davon ausgeht, dass beide Systeme denselben Massstab haben, wird man einen Ansatz ohne Massstab machen:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (6.4-1)$$

Dies ist eine Kongruenzabbildung im Raum, es werden nur drei Rotationen und drei Translationen zugelassen. Die Form und Grösse des Netzes bleiben erhalten (also die Distanzen und Winkel zwischen Punkten bleiben vollkommen unverändert).

6.5 Die Translation

Ohne Rotationen degeneriert der Ansatz zu

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (6.5-1)$$

Dies kann für Übersichtsrechnungen gewünscht werden.

6.6 Transformation von GPS-Koordinaten in ein lokales kartesisches System

Anhand der Helmerttransformation soll das praktische Vorgehen gezeigt und die Genauigkeiten untersucht werden. Wir wählen den Ansatz 6.3-1 der räumlichen Helmerttransformation, der auf die geozentrischen Koordinaten anzusetzen ist:

$$\mathbf{X} = m \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} + \Delta\mathbf{X} \quad (6.6-1)$$

\mathbf{X}	=	geozentrische Koordinaten im lokalen System
\mathbf{x}	=	geozentrische Koordinaten im WGS 84 System
m	=	Massstabsfaktor (Skalar)
\mathbf{D}	=	orthogonale Drehmatrix
$\Delta\mathbf{X}$	=	Translationsvektor im lokalen System

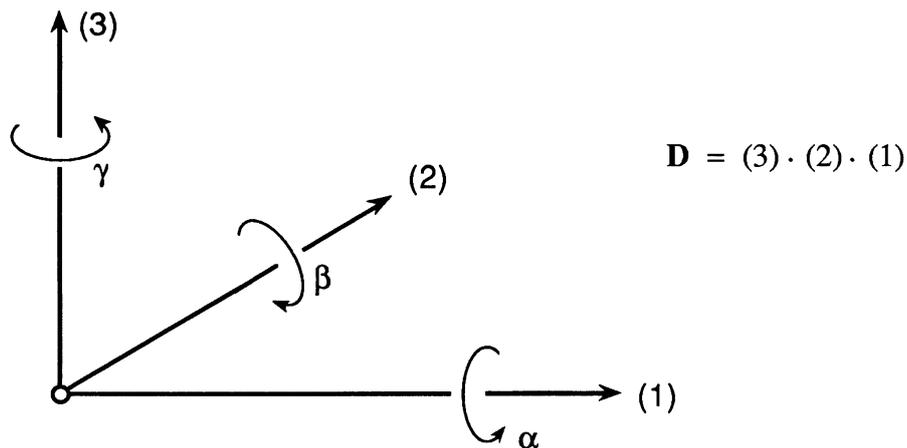


Abb. 6.6-1: Definition der drei Drehungen

$$\mathbf{X} = m \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \Delta\mathbf{X} \quad (6.6-2)$$

Für kleine Winkel (wie sie zwischen WGS 84 und lokalem System zu erwarten sind), kann jeweils der Cosinus eines Winkels durch 1 ersetzt werden, der Sinus durch den Winkel selbst.

$$\mathbf{X} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \Delta \mathbf{X} \quad (6.6-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} X = -\beta z m + \gamma y m + \Delta X + x m \\ Y = \alpha z m - \gamma x m + \Delta Y + y m \\ Z = -\alpha y m + \beta x m + \Delta Z + z m \end{array} \right\} \text{pro Punkt drei Gleichungen} \quad (6.6-4)$$

m wird auch sehr nahe bei 1 liegen, kann also als $1 + dm$ geschrieben werden. Beim Ausmultiplizieren ist zu beachten, dass Produkte von kleinen Winkeln mit dm vernachlässigt werden können.

$$\left. \begin{array}{l} X = -\beta z + \gamma y + \Delta X + dm x + x \\ Y = \alpha z - \gamma x + \Delta Y + dm y + y \\ Z = -\alpha y + \beta x + \Delta Z + dm z + z \end{array} \right\} \quad (6.6-5)$$

bei Überbestimmung ergeben sich daraus die Verbesserungsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} v_X = -\beta z + \gamma y + \Delta X + dm x - (X - x) \\ v_Y = \alpha z - \gamma x + \Delta Y + dm y - (Y - y) \\ v_Z = -\alpha y + \beta x + \Delta Z + dm z - (Z - z) \end{array} \right\} \quad (6.6-6)$$

Die Verbesserungen entsprechen den Restklaffen, die nach der Transformation zwischen den transformierten Punkten und den Passpunkten übrigbleiben

In Matrixschreibweise: $\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{f} \quad (6.6-7)$

Den Lösungsvektor \mathbf{x} erhält man als $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f}. \quad (6.6-8)$

Für die Genauigkeitsabschätzungen interessiert uns $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (6.6-9)$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & & & & & \\ -z & 0 & x & & & & & \\ y & -x & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ x & y & z & & & & & \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & 1 & 0 & 0 & x \\ z & 0 & -x & 0 & 1 & 0 & y \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 & z \\ & & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

(6.6-10)

$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z \quad dm$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccccccc} [yy+zz] & [-xy] & [-xz] & 0 & [z] & [-y] & 0 \\ [-xy] & [xx+zz] & [-yz] & [-z] & 0 & [x] & 0 \\ [-xz] & [-yz] & [xx+yy] & [y] & [-x] & 0 & 0 \\ 0 & [-z] & [y] & n & 0 & 0 & [x] \\ [z] & 0 & [-x] & 0 & n & 0 & [y] \\ [-y] & [x] & 0 & 0 & 0 & n & [z] \\ 0 & 0 & 0 & [x] & [y] & [z] & [xx+yy+zz] \end{array} \\ \hline \end{array}$$

(6.6-11)

$n = \text{Anzahl Punkte}$

[...] bedeutet die Summe über alle Punkte in der Transformation.

In dieser Darstellung sind die weiter oben beim Bursa-Wolf Ansatz erwähnten Korrelationen zwischen den Rotationen und je einzelnen Translationsparametern anschaulich sichtbar. So ist z.B. die Drehung um die x-Achse α mit den Translationen ΔX gar nicht, mit ΔY über $[z]$ und mit ΔZ über $[-y]$ korreliert. Nun wird auch klar, dass, wenn wir den Ursprung der x-Koordinaten in den Schwerpunkt des x-Punkthaufens verlegen (Molodensky- Badekas-Modell), $[x] = [y] = [z] = 0$ werden und damit diese Korrelationen verschwinden. Dies wollen wir für die weiteren Untersuchungen tun, da damit die Normalgleichungsmatrix algebraisch einfach invertierbar wird, was einfache Formeln für die a Priori Genauigkeitsabschätzungen der Transformationsparameter liefert. Die Normalgleichungen 6.6-11 vereinfachen sich damit zu 6.6-12:

Mit 6.6-14 können nun die Genauigkeitsfragen diskutiert werden:

$$s_x = \sqrt{q_{xx}} \cdot s_0 \quad (6.6-15)$$

- s_x = mittlerer Fehler der Unbekannten
 s_0 = Gewichtseinheitsfehler a Posteriori
 q_{xx} = entsprechendes Diagonalelement der $(A^T A)^{-1}$

Translationen:

$$s_{\Delta X} = s_{\Delta Y} = s_{\Delta Z} = s_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (6.6-16)$$

Diese mittleren Fehler sind nur von der Anzahl Punkte abhängig; je mehr, desto genauer. Die räumliche Verteilung der Stationen spielt keine Rolle.

Masstab:

$$s_m = s_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{[xx+yy+zz]}} \quad (6.6-17)$$

Die Genauigkeit des Masstabs ist einerseits umso genauer, je mehr Stationen verwendet werden, andererseits aber auch, je weiter die Stationen vom Schwerpunkt entfernt sind.

Rotationen:

$$s_\alpha = s_0 \cdot \sqrt{\frac{[xx+zz][xx+yy] - [yz]^2}{D}} \quad (6.6-18)$$

s_β und s_γ analog zyklisch vertauscht.

7 Nivellement und orthometrische Höhe

7.1 Der Schleifenschlussfehler beim Nivellement

Die Summe der gemessenen Höhendifferenzen ergibt in einer geschlossenen Schleife den sogenannten Schleifenschlussfehler, ist also nicht gleich Null.

$$\sum_A^{P=A} \delta h_i' = z_0 \quad \text{ist der Schleifenschlussfehler des Polygons} \quad (7.1-1)$$

$\delta h_i'$ = gemessene Höhendifferenz, vgl. Abb. 2.1-1 oder 3.1-1.

Die Summe der Energie- oder Potentialdifferenzen hingegen ist Null:

$$\sum_A^{P=A} g_i \delta h_i' = 0 \quad (7.1-2)$$

Zerlegt man g_i in eine beliebige Konstante g_0 und eine Differenz, $g_i = g_0 + (g_i - g_0)$, so lässt sich die Gleichung 7.1-2 schreiben als:

$$\begin{aligned} \sum_A^{P=A} \{g_0 + (g_i - g_0)\} \delta h_i' &= g_0 \sum_A^{P=A} \delta h_i' + \sum_A^{P=A} (g_i - g_0) \delta h_i' = \\ &= g_0 z_0 + \sum_A^{P=A} (g_i - g_0) \delta h_i' = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{z_0 = -\frac{1}{g_0} \sum_A^{P=A} (g_i - g_0) \delta h_i'} \quad (7.1-3)$$

In [Schürer, 1944] wurde das Schweizerische Nivellement unter Berücksichtigung des theoretischen Schleifenschlussfehlers ausgeglichen. Um das Vorgehen zu erläutern und die Größenordnung der Schleifenschlussfehler anzugeben, werden hier in Auszügen die Resultate dieser Ausgleichung wiedergegeben.

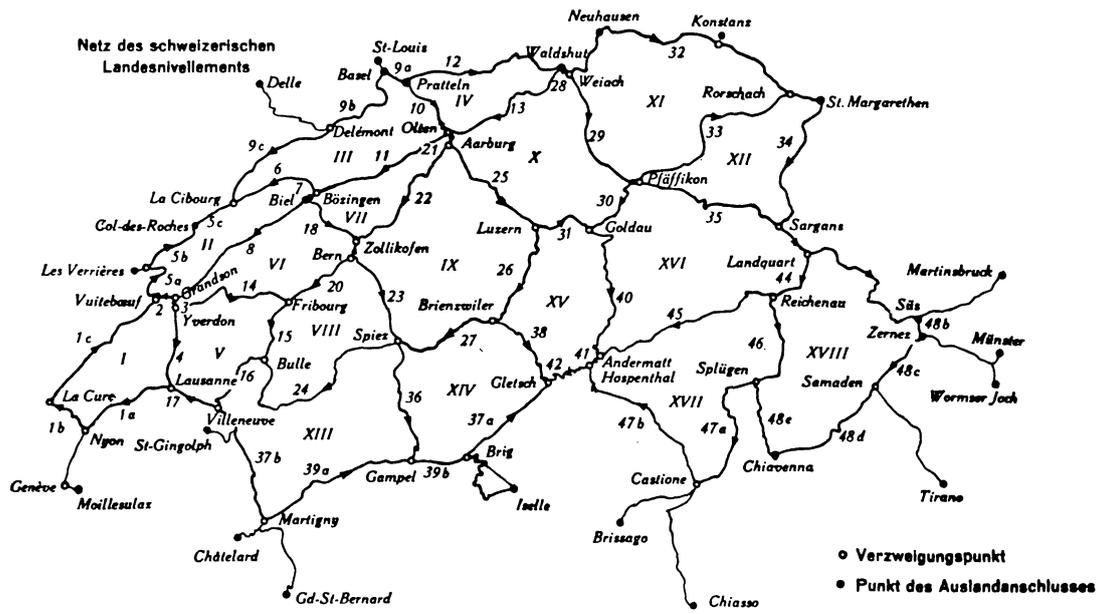


Fig. 3.

Abb. 7.1-1: Das Netz des Schweizerischen Landesnivellements (aus [Niethammer, 1945])

Polygone	Beobacht. Schleifenschluss mm	Wahrer Schleifenschluss mm	Sphäroid. Schleifenschluss mm	Beob. - Wahrer mm	Beob.-Sphär. mm	Bemerkungen
I	+37.63	+10.55	+15.41	+27.08	+22.22	Flachland
II	+16.72	+19.56	+17.55	-2.84	-0.83	
III	+21.20	+14.37	+7.12	+6.83	+14.12	
IV	+24.37	+1.16	-0.14	+23.18	+24.51	
V	-5.99	-7.64	-6.24	+1.65	+0.25	
VI	-23.28	-2.73	-2.56	-20.55	-20.72	
VII	-3.11	-0.05	-0.47	-3.06	-2.64	
VIII	+35.09	+5.39	-1.90	+29.70	+36.99	
IX	+21.14	+4.37	-0.30	+16.77	+21.39	
X	-41.64	-5.95	-4.62	-35.69	-37.02	
XI	+23.98	-5.32	-4.16	+29.30	+28.14	
XII	-12.96	+5.24	+3.92	-18.20	-16.88	Gebirge Gebirge Gebirge
XIII	-58.03	-61.49	-10.06	+3.46	-47.92	
XIV	+25.81	+10.97	-8.63	+14.84	+34.44	
XV	-12.41	+21.12	-1.83	-33.53	-10.58	
XVI	+32.48	+1.93	-2.47	+30.55	+34.95	
XVII	+24.18	-2.56	-0.86	+26.74	+25.04	
XVIII	-45.69	-29.57	-31.88	-16.12	-13.81	

Tab. 7.1-1 Schleifenschlussfehler im Schweizerischen Landesnivellement

Für die Ausgleichung wird das Netz der Polygone in die zwischen den Verzweigungspunkten liegenden Strecken zerlegt.

Die beobachtete Nivellementshöhdendifferenz der einzelnen Strecke sei $\delta h_i'$. An diesen Werten sind die Verbesserungen v_i anzubringen, so dass in jeder geschlossenen Schlaufe die Summe der beobachteten Höhdendifferenzen plus Verbesserung gleich dem theoretischen Schleifenschlussfehler wird.

$$\sum_A^{P=A} (\delta h_i' + v_i) = z_0 \quad (7.1-4)$$

Dies ergibt für die 18 Schlaufen folgende 18 Verbesserungs-Bedingungsgleichungen:

I:	+v1 - v2 - v3 + v4	+27.08 = 0
II:	+v5 - v6 - v7 + v8 + v2	-2.84 = 0
III:	-v9 + v10 + v11 + v6	+6.83 = 0
IV:	+v12 + v13 - v10	+23.18 = 0
V:	-v4 + v14 + v15 - v16 + v17	+1.65 = 0
VI:	+v3 - v8 + v18 - v19 + v20 - v14	-20.55 = 0
VII:	-v18 + v7 - v11 + v21 + v22	-3.06 = 0
VIII:	-v15 - v20 + v23 + v24	+29.70 = 0
IX:	+v19 - v22 + v25 + v26 + v27 - v23	+16.77 = 0
X:	-v21 - v13 + v28 + v29 + v30 - v31 - v25	-35.69 = 0
XI:	+v32 - v33 - v29	+29.30 = 0
XII:	+v33 + v34 - v35	-18.20 = 0
XIII:	+v16 - v24 + v36 - v37	+3.46 = 0
XIV:	-v27 + v38 - v39 - v36	+14.84 = 0
XV:	-v26 + v31 + v40 + v41 + v42 - v38	-33.53 = 0
XVI:	-v40 - v30 + v35 + v43 + v44 + v45	+30.55 = 0
XVII:	-v45 + v46 + v47 - v41	+26.74 = 0
XVIII:	-v44 + v48 - v46	-16.12 = 0

Tab 7.1-2: Verbesserungs-Bedingungsgleichungen der 18 Schlaufen

Als Gewichte für die einzelnen Streckenabschnitte wurden die reziproken Streckenlängen gewählt.

Aus den Verbesserungen lässt sich der mittlere km-Fehler des ganzen Nivellements berechnen, er beträgt ± 1.40 mm.

Eine frühere Ausgleichung ohne Berücksichtigung des theoretischen Schlussfehlers hatte ± 1.75 mm ergeben.

Für dieselben Beobachtungen wurden ebenfalls die sphäroidischen Schleifenschlüsse berechnet (vgl. Tabelle 7.1-1). Diese erhält man, indem man in der Formel für z_0 die gemessenen Werte g_i durch die Normalschwerewerte $g_{\text{Norm}}(\varphi, h)$ ersetzt. Dabei hat sich ergeben, dass sich der sphäroidische Schlussfehler vom wahren Schlussfehler vor allem im Gebirge beträchtlich unterscheidet und deshalb nicht verwendet werden sollte.

7.2 Mittlere Schwere in der Lotlinie eines Punktes

7.2.1 Methode nach Niethammer

Wie wir bei den orthometrischen Höhen (Kap. 2.5) gesehen haben, ist

$$H_P = \frac{C}{\bar{g}_P}, \quad \bar{g}_P \text{ ist definiert durch } H_P \cdot \bar{g}_P = \int_0^{H_P} g_Q dh \quad (7.2-1)$$

wo \bar{g}_P die mittlere Schwere in der Lotlinie des Punktes P und Q ein Punkt auf der Lotlinie ist. Dieser Abschnitt ist ganz der Berechnung von \bar{g}_P gewidmet.

Schauen wir einmal zurück, was und wie das früher gemacht wurde. Th. Niethammer [1932] entwickelte eine Methode, die die Topographie berücksichtigt und damit für ein gebirgiges Land wie die Schweiz geeignet ist.

Hier seine Herleitung:

g_Q ist die Schwerebeschleunigung im Punkt Q, der sich in der Lotlinie von P befindet. g_Q lässt sich auf den Oberflächenschwerewert $g_{\text{Beob}}^{(P)}$ zurückführen:

$$g_Q = g_{\text{Beob}}^{(P)} + g_{\text{Frei}}^{(P-Q)} - \Delta g_P + \Delta g_Q \quad (7.2-2)$$

Δg_P ist die Vertikalanziehung der über dem Meeresniveau liegenden topographischen Massen auf den Stationspunkt P. Das negative Vorzeichen ergibt sich daher, dass man sich diese Massen entfernt denkt. $g_{\text{Frei}}^{(P-Q)}$ ist die Änderung der Schwerebeschleunigung in freier Luft, wenn man vom Punkt P zum Punkt Q hinunter geht (also die Änderung von g_{Norm} mit der Höhe). Δg_Q ist entsprechend Δg_P die Vertikalanziehung der über dem Meeresniveau liegenden Massen im Punkt Q aufsummiert über die δg_Q der einzelnen Topographieblöcke (vgl. Abb. 7.2-1 und 7.2-2).

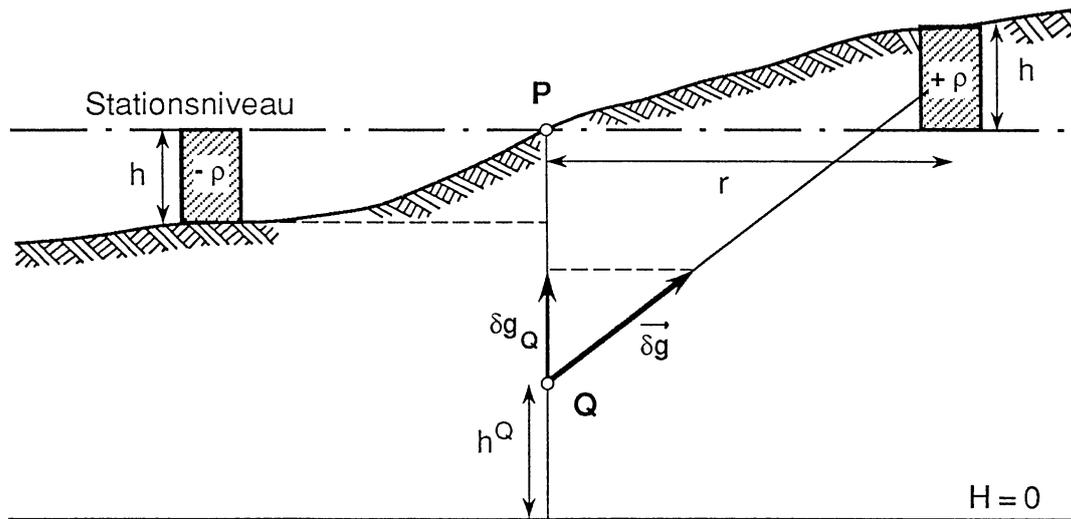


Abb. 7.2-1: Einfluss der topographischen Massen auf die Schwere in Q

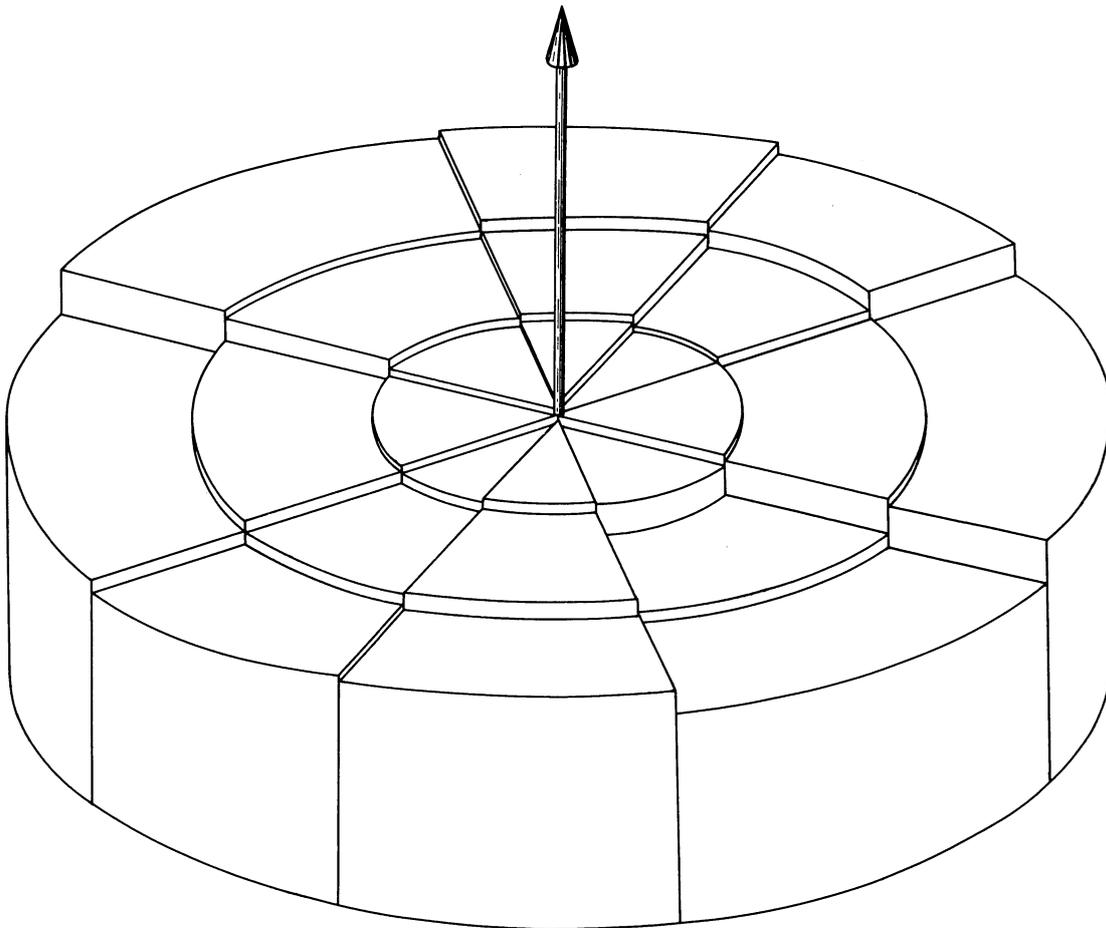


Abb. 7.2-2: Einteilung des Terrains in Zonensektoren

Das Terrain wird in Zonen und Sektoren um den Beobachtungspunkt herum eingeteilt. Für jeden Zonensektor muss eine mittlere Meereshöhe bestimmt werden. Die gesamte Wirkung der topographischen Massen erhält man, indem man die Summe der Wirkungen aller Zonensektoren bildet.

Bis 42 km Entfernung vom Beobachtungspunkt wird keine Erdkrümmung berücksichtigt, weiter aussen dann schon. Dabei wird für die topographischen Massen ein einziger durchschnittlicher Dichtewert ρ verwendet (Das macht nach Abschätzungen von Th. Niethammer auf den Mittelwert der Schwere in der Lotlinie maximal 1 mgal aus).

Die Massen zwischen Meeresniveau und Oberfläche kann man sich dabei nochmals aufgeteilt denken in eine Platte zwischen Meeresniveau und Oberflächenpunkt (Bouguerplatte) sowie den über bzw. unter dem Stationsniveau liegenden Massen, welche die klassischen topographischen Wirkungen verursachen.

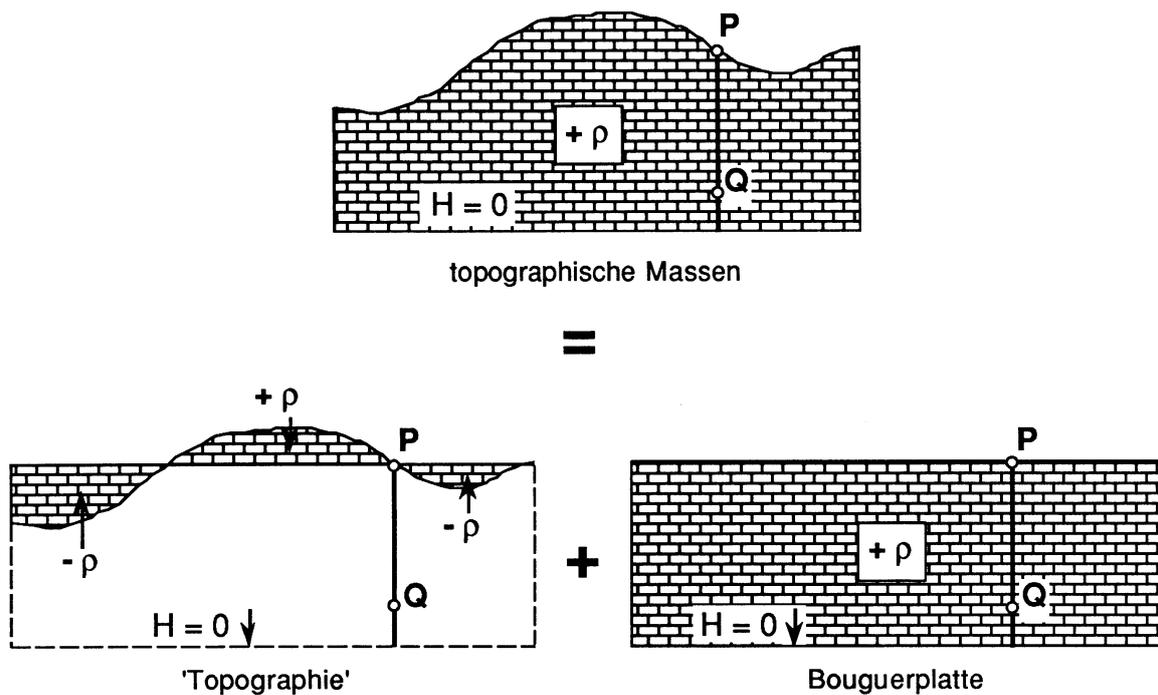


Abb. 7.2-3: Trennung der topographischen Massen in Topographie und Bouguerplatte

Dies lässt sich mit einigem Aufwand für den Oberflächenpunkt P und jeden beliebigen Punkt Q in der Lotlinie von P berechnen:

$$\begin{aligned} H_P \cdot \bar{g}_P &= \int_0^{H_P} g_Q \, dh = \int_0^{H_P} (g_{\text{Beob}}^{(P)} + g_{\text{Frei}}^{(P-Q)} - \Delta g_P + \Delta g_Q) \, dh \\ &= (g_{\text{Beob}}^{(P)} - \Delta g_P) \cdot H_P + \int_0^{H_P} (g_{\text{Frei}}^{(P-Q)} + \Delta g_Q) \, dh \end{aligned}$$

Es gilt $\int_0^{H_P} g_{\text{Frei}}^{(P-Q)} \, dh = \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} \cdot H_P$, solange die Freiluftänderung linear in der Höhe ist.

(vgl. Herleitung (7.2-12) Seite 56)

$$\text{Daraus folgt: } H_P \cdot \bar{g}_P = (g_{\text{Beob}}^{(P)} - \Delta g_P + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)}) \cdot H_P + \int_0^{H_P} \Delta g_Q \, dh \quad (7.2-3)$$

Mit $\Delta g = g_{\text{Bpl}} + g_{\text{Top}}$ wird

$$H_P \cdot \bar{g}_P = (g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)}) \cdot H_P + \int_0^{H_P} g_{\text{Bpl}}^{(Q)} \, dh + \int_0^{H_P} g_{\text{Top}}^{(Q)} \, dh \quad (7.2-4)$$

Aus Symmetriegründen verschwindet die mittlere Wirkung der ebenen Bouguerplatte in der Lotlinie. Daher:

$$H_P \cdot \bar{g}_P = (g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)}) \cdot H_P + \int_0^{H_P} g_{\text{Top}}^{(Q)} \, dh$$

$$\boxed{\bar{g}_P = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)} + \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} g_{\text{Top}}^{(Q)} \, dh} \quad (7.2-5)$$

Th. Niethammer hat mit Graphiken die Funktionswerte der Wirkungen aller Kreisringsektoren dargestellt. Aus diesen Graphiken lässt sich die Wirkung der Topographie für einen Kreisring und die gegebene Terrainhöhe über bzw. unter der Stationshöhe herauslesen und zu $g_{\text{Top}}^{(P)}$ aufsummieren, wie auch für

$$\frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} g_{\text{Top}}^{(Q)} \, dh, \quad \text{das zu } \bar{g}_{\text{Top}}^{(P)} \text{ aufsummiert wird.}$$

Die Mittelwerte \bar{g} über die Lotlinie wurden durch numerische Integration gewonnen (Berechnung an 5 Stellen in der Lotlinie und Mittelbildung).

Die Massen wurden bis in eine Entfernung von 188 km berücksichtigt. Man kann sich leicht vorstellen, was für ein Aufwand dahintersteckte, für jeden Punkt alle mittleren Höhen aus den Kartenwerken herauszulesen und dafür dann in Graphiken die Wirkungen herauszugreifen und aufzusummieren.

Als Beispiel für die Berechnung der mittleren Schwere in der Lotlinie führe ich hier die Zahlenwerte von M. Schürer für den Pierre du Niton an.

Gerechnet wurde mit einer mittleren Gesteinsdichte von 2.47 g/cm^3 . Der Fixpunkt des Schweizerischen Höhensystems hat bekanntlich die Höhe 373.60 m.

$$\begin{array}{rcl}
 g_{\text{Beob}}^{(P)} & = & 980'598.9 \text{ mgal} \\
 \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} & = & + \quad 57.6 \text{ mgal} \\
 - g_{\text{Bpl}}^{(P)} & = & - \quad 38.4 \text{ mgal} \\
 - g_{\text{Top}}^{(P)} & = & + \quad 1.0 \text{ mgal} \\
 & & H_p \\
 \frac{1}{H_p} \int_0^{H_p} g_{\text{Top}}^{(Q)} dh & = & - \quad 2.4 \text{ mgal} \\
 \hline
 \bar{g}_p & = & 980'617 \text{ mgal} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

M. Schürer hat für alle Anschlusspunkte ans Ausland orthometrische Höhen nach dieser Methode berechnet.

Um die Grössenordnung der Differenzen zwischen orthometrischen und Nivellements-höhen zu illustrieren, gebe ich hier aus [Niethammer, 1945] einige Beispiele:

Nivellement Pierre du Niton - Basel der Schweizergrenze entlang : Diff. = -12.5 cm

Nivellement Pierre du Niton - Basel über Lausanne - Bulle - Olten : Diff. = - 8.1 cm

Nivellement Pierre du Niton - Gd. St. Bernhard (kürzester Weg) : Diff. = +34.8 cm

In [Zeger, 1985] werden für Knoten- und Grenzpunkte Österreichs aus der REUN-Ausgleichung genäherte Differenzen zwischen Gebrauchshöhen und orthometrischen Höhen ausgewiesen. Diese bewegen sich zwischen -1.0 und +41.6 cm und passen gut ins Bild der allgemeinen Grössenordnung, die auch für die Schweiz zutrifft.

7.2.2 Berücksichtigung der Isostasie

In [Bäschlin, 1955] werden die Begründung und der Weg für die Berechnung der mittleren Schwere in der Lotlinie *unter Berücksichtigung der Isostasie* gegeben.

C.F. Bäschlin weist darauf hin, dass die Geodäsie ohne Hypothesen über die Zusammensetzung der Erdkrinde nicht auskommen könne und dass es empfehlenswert sei, für die verschiedenen Anwendungsbeispiele *dieselben* Hypothesen zu verwenden. Als Anwendungsgebiete führt er auf:

1. Reduktion der Schweremessungen auf das Geoid.
2. Berechnung der mittleren Schwere in einer Lotlinie zur Bestimmung orthometrischer Meereshöhen.
3. Berechnung der Lotabweichungskomponenten aus sichtbaren Massen.
4. Berechnung der Krümmung einer Lotlinie.
5. Berechnung des Potentials der Erdkrinde für einen Stationspunkt.

Bei der Behandlung des Problems 3 wurden Pratt und Airy zur Aufstellung ihrer Hypothese der Isostasie der Erdkruste geführt. (Die beobachteten Oberflächenlotabweichungen sind wesentlich kleiner, als sie aus Modellrechnungen für die Massen zwischen Geoid und Oberfläche sein müssten).

Wir haben gesehen, dass Th. Niethammer die mittlere Schwere in der Lotlinie nur mit Hilfe der Massen, die das Geoid überragen (Kontinente) bzw. daran fehlen (Ozeane), berechnet hat, während 1955 für die Anwendungsgebiete 1, 3, 4 und 5 die Isostasie bereits allgemein berücksichtigt wurde.

C.F. Bäschlin verwendet die Pratt'sche Hypothese mit einer Gesteinsdichte von 2.67 g/cm^3 und einem Wert von 80 km für die Ausgleichstiefe und rechnet sphärisch.

Annahme von vollständiger isostat. Kompensation der Topographie. D.h. der Druck einer Massensäule im Gebirge in der Ausgleichstiefe ist derselbe wie der Druck einer ozeanischen Säule.

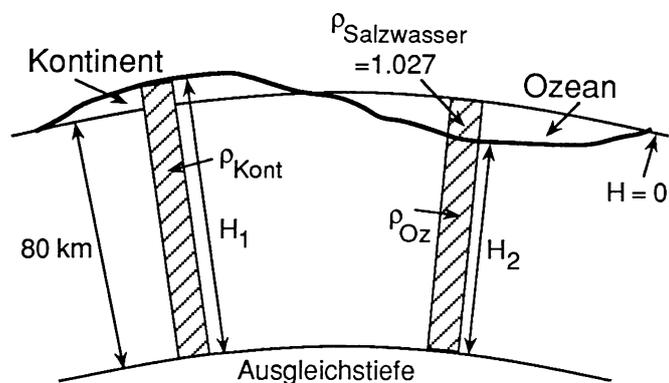


Abb. 7.2-4: Isostasiemodell nach Pratt

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= 2.67 \text{ g/cm}^3 && \text{für die Berechnung von } \vartheta_{\text{Kont}} \text{ und } \vartheta_{\text{Oz}} \\
 \rho_{\text{Kont}} &= \rho_0 + \vartheta_{\text{Kont}} && \text{vgl. [Bäschlin, 1955].} \\
 \rho_{\text{Oz}} &= \rho_0 + \vartheta_{\text{Oz}}
 \end{aligned}$$

Für die numerischen Berechnungen verwendet Bäschlin die fundamentalen Tafeln zur Berechnung der Schwerereduktionen von C. Cassinis - P. Dore - S. Ballarin. Um den Durchschnittswert der Schwere in der Lotlinie zu berechnen, schlägt er vor, ähnliche Graphiken wie Th. Niethammer zu erstellen.

Vorgehen: Für eine bestimmte Zone und eine bestimmte Topographiehöhe kann mit den Tafeln von Cassinis die Wirkung für die Topographie und für die isostatische Kompensation für äquidistante Punkte in der Lotlinie herausgelesen und in einer Tabelle zusammengestellt werden (bei seinem Bsp. alle 200m). Aus diesen Zahlen kann man nun durch numerische Integration die Durchschnittswerte für alle möglichen Stationshöhen berechnen.

Dies müsste für alle möglichen Topographiehöhen und alle Zonen gemacht werden und in Tabellen mit den Eingängen für die Topographiehöhe und die Stationshöhe zusammengestellt werden. Daraus könnten dann die graphischen Tafeln erstellt werden.

Bäschlin meint, die zwar einfachen, aber sehr umfangreichen Berechnungen müssten durch ein geodätisches Landesinstitut ausgeführt werden, nachdem man sich weltweit über die Referenzdichte und die Ausgleichstiefe einig geworden wäre.

Diese Arbeiten wurden meines Wissens nicht gemacht. Es gibt damit auch kein konkretes Beispiel für die mittlere Schwere in der Lotlinie eines Punktes unter Berücksichtigung der Isostasie.

7.2.3 Heutiger Stand

Punkt 1 aus Kapitel 7.2.2 wurde vom Institut für Geophysik gelöst (vgl. [Klingelé und Kissling, 1982], [Kissling, 1980] und [Kissling, 1982]). Punkt 2 wurde bisher nicht weiter vorangetrieben. Punkte 3, 4, und 5 sind mit dem Programm LAG von Dr. A. Elmiger und Dr. W. Gurtner gelöst. (vgl. [Elmiger, 1969], [Gurtner, 1978] und [Elmiger, Gurtner, 1983]).

Zur Lösung des Punktes 2 gehen wir am besten vom Programm LAG aus, von dem ich nur diejenigen Teile beschreibe, die zur Lösung wichtig sind und dafür verwendet werden können.

Mit diesem Programm können in jedem beliebigen Punkt der Schweiz Lotabweichungen und Geoidhöhen (via Potential) aus den Massen oberhalb des Meeresniveaus (Topographie), dem Dichtekontrast an der MOHO und unter Berücksichtigung eines

IVREA-Modells berechnet werden.

Die Einteilung der Topographie in Zylinderkoordinaten ist ungünstig, da die Höhen der Kreisringsektoren für jeden Stationspunkt immer wieder neu aus den topographischen Karten herausgelesen werden müssen. Der Vorteil der einfachen Rechenformeln geht dadurch wieder weitgehend verloren.

Benutzt man dagegen kartesische Koordinaten, so genügt es, ein einziges topographisches Modell für die Schweiz zu haben. Daraus kann man für jeden beliebigen Stationspunkt die Wirkung der Topographie berechnen (vgl. Abb. 7.2-5).

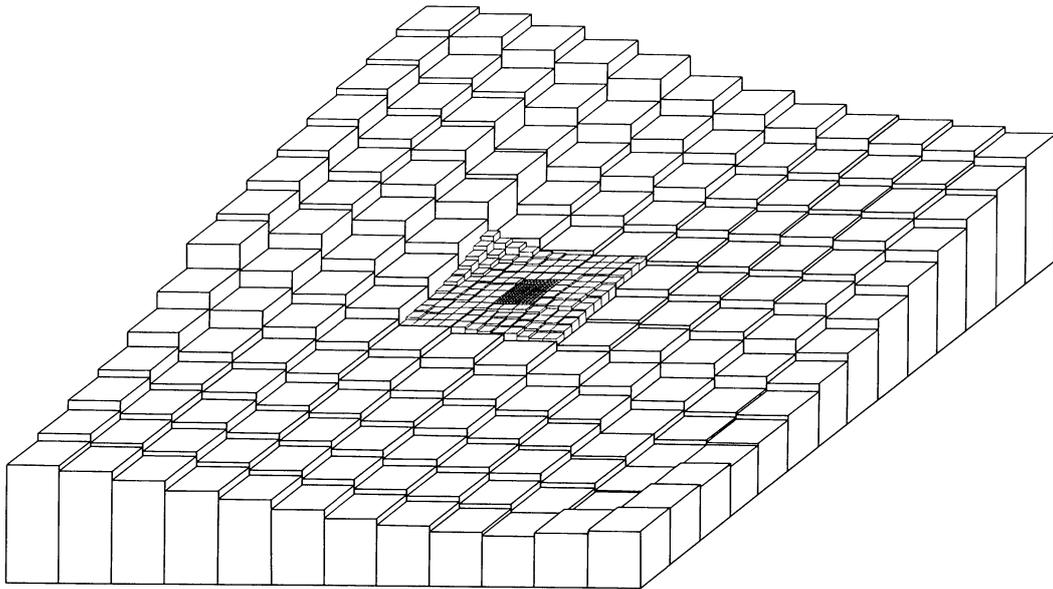


Abb. 7.2-5: Einteilung des Terrains in quadratische Raster verschiedener Maschenweite

Das wurde im LAG so gelöst. Folgende Files stehen zur Verfügung:

MH500 Datensatz mit einer Höhe pro $500 \times 500 \text{ m}^2$, zusammengefasst in Blöcke von $10 \times 10 \text{ km}^2$, die jeweils auch eine mittlere Höhe haben. Damit ist die ganze Schweiz mit ca 70 km Überlappung bedeckt.

MH10 Ausserhalb des MH500 folgen Blöcke mit einer Höhe pro $10 \times 10 \text{ km}^2$ vgl. Beilage 1 Seite 18 in [Elmiger, Gurtner, 1983].

Dazu kann fakultativ die Nahtopographie erfasst werden als

MH100 Datensatz mit 1 Höhe pro $100 \times 100 \text{ m}^2$, für $1.5 \times 1.5 \text{ km}^2$.

oder

MH50 Datensatz mit 1 Höhe pro $50 \times 50 \text{ m}^2$, für $2.0 \times 2.0 \text{ km}^2$.

Die Nahtopographie muss immer noch für jeden Punkt speziell aus den topographischen Karten herausgelesen werden. Gegenwärtig ist das Bundesamt für Landestopographie an der Arbeit, die Landeskarten im Massstab 1 : 25'000 zu digitalisieren und daraus ein Höhenraster von 25 m zu erzeugen. Solche Raster wurden uns für einzelne Blätter auch schon zur Verfügung gestellt, um die Wirkungen der Nahtopographie berechnen zu können.

MOHOFL In neuerer Zeit konnte die Grenzfläche zwischen Erdkruste und oberem Mantel aus refraktions- und vibroseismischen Messungen bestimmt werden (NFP 20). Es handelt sich um die Moho-Diskontinuität (MOHO), deren mittlere Tiefe für die Schweiz zu 34 km angenommen wurde bei einem Dichtekontrast von $+0.4 \text{ g/cm}^3$.

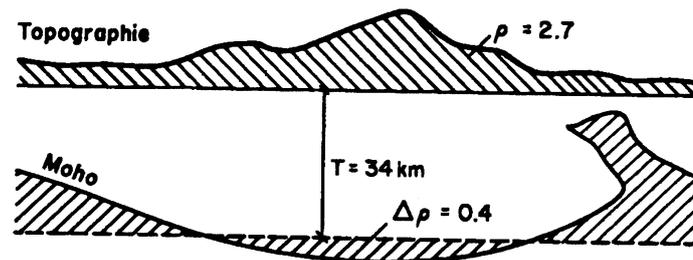


Abb. 7.2-6: Die Moho als Isostasiemodell

Die MOHO liegt als Fläche mit einer Tiefenangabe pro $5 \times 5 \text{ km}^2$ vor. Damit kann auf die Einführung eines der bekannten Isostasimodelle verzichtet werden.

IVRFL Eine Aufwölbung mit Unterkrusten- und Mantelmaterial, zum Teil bis an die Erdoberfläche in der Südschweiz / Norditalien reichend, die sich auch in positiven Schwereanomalien bemerkbar macht, wird im Moho-Ivrea-Massenmodell von Gurtner berücksichtigt. Auch dieses Modell ist mit einer Auflösung von 5 km erfasst.

Andere Modelle, wie z.B. der Molassetrog des Schweizerischen Mittellandes oder die Sedimente der Po-Ebene, werden noch nicht berücksichtigt.

Im LAG werden 3 verschiedene Formeln für die Berechnung der Wirkungen der Prismen verwendet:

- Die genaue Quaderformel
- Die Näherung der Quader durch Massenlinien
- Die Näherung der Quader durch Massenpunkte

Dies wird vor allem getan, um Rechenzeit einzusparen. Wann welche Formel verwendet wird, kann folgendem Schema entnommen werden:

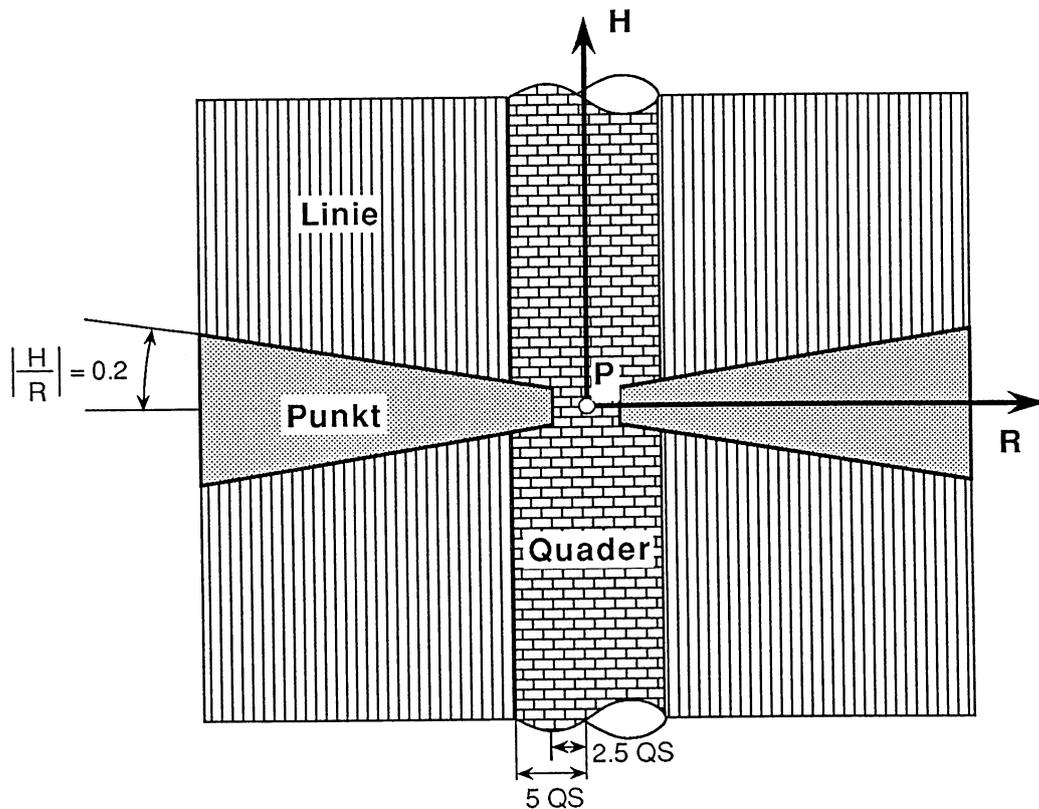


Abb. 7.2-7: Schema zur Benutzung der verschiedenen Rechenformeln.

- QS = Quadergrundseitenlänge des Massenelementes
 P = Aufpunkt der Berechnung
 R = Horizontalabstand von P zum Massenelement
 H = Höhendifferenz von P zum Massenelement

7.2.4 Neue Herleitung

Wir wollen nun die mittlere Schwere in der Lotlinie des Punktes P durch Verwendung der in P gemessenen Schwere und unter Berücksichtigung aller vorhandenen Massenmodelle bestimmen.

Als Änderung zu Kapitel 7.2.1 betrachten wir für die Herleitung neu:

Δg_P , Δg_Q enthalten die Vertikalanziehung *sämtlicher erfasster Abweichungen* der wirklichen Erde zum Normalsphäroid im Punkt P bzw. Q. Darunter fallen: Die Topographie, also alle Massen oberhalb der Meereshöhe mit ihren tatsächlichen Dichten. Weiter werden die Abweichungen von einer radialen Dichteverteilung der Massen unter Meeresniveau (wie MOHO, IVREA, weitere Störungen) mit ihren Dichtekontrasten zur Referenzdichte berücksichtigt.

Bis jetzt sind im LAG die Topographie mit der *einheitlichen* Dichte von 2.65 g/cm^3 , und je ein MOHO- und IVREA-Modell mit dem *einheitlichen* Dichtekontrast von 0.4 g/cm^3 realisiert. In [Bürki, 1988] wurde unterdessen ein neu zusammengestelltes MOHO-Modell und ein detailliertes IVREA-Modell mit verschiedenen Dichtekontrasten vorgestellt, die ebenfalls zu den Berechnungen herangezogen werden können.

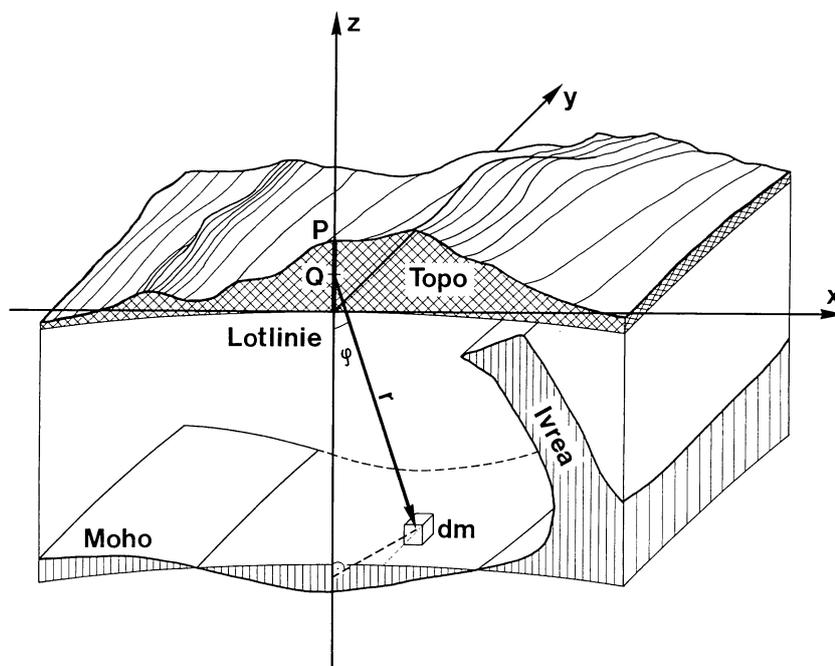


Abb. 7.2-8: Für die Erklärung des Schwerewertes in P bzw. Q gehen wir von der Normalschwere g_{Norm} aus, berücksichtigen die Freiluftänderung g_{Frei} infolge Höhenlage und sämtliche erfassten Massenmodelle.

$$g_{\text{Beob}}^{(P)} = \underset{\substack{\uparrow \\ H=0}}{g_{\text{Norm}}^{(P)}(\varphi)} - g_{\text{Frei}}^{(P)} + \underbrace{g_{\text{Top}}^{(P)} + g_{\text{Bpl}}^{(P)}}_{\downarrow \text{Topographie}} + g_{\text{Moho}}^{(P)} + g_{\text{Ivrea}}^{(P)} + \underbrace{\dots}_{\downarrow \text{weitere Modelle}} + \underbrace{dg^{(P)}}_{\downarrow \text{unerklärt}} \quad (7.2-6)$$

Daraus erhält man

$$g_{\text{Norm}}^{(P)}(\varphi) = g_{\text{Beob}}^{(P)} + g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Moho}}^{(P)} - g_{\text{Ivrea}}^{(P)} - dg^{(P)} \quad (7.2-7)$$

sowie analog

$$g^{(Q)} = g_{\text{Norm}}^{(P)}(\varphi) - g_{\text{Frei}}^{(Q)} + g_{\text{Top}}^{(Q)} + g_{\text{Bpl}}^{(Q)} + g_{\text{Moho}}^{(Q)} + g_{\text{Ivrea}}^{(Q)} + dg^{(P)}. \quad (7.2-8)$$

Wir ersetzen nun in 7.2-8 die Normalschwere g_{Norm} durch den Ausdruck 7.2-7:

$$g^{(Q)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Frei}}^{(Q)} - g_{\text{Top}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Moho}}^{(P)} - g_{\text{Ivrea}}^{(P)} + g_{\text{Top}}^{(Q)} + g_{\text{Bpl}}^{(Q)} + g_{\text{Moho}}^{(Q)} + g_{\text{Ivrea}}^{(Q)} \quad (7.2-9)$$

Die Annahme dabei ist, dass der unerklärte Teil $dg^{(P)}$ der Schwere eine Konstante ist.

An dieser Stelle geht Sünkel [1986] einen Schritt weiter: Das topographisch-isostatisch reduzierte Reststörpotential, welches ausserhalb des Geoides (nahezu) harmonisch und in den nicht erklärten Schwereanteilen $dg^{(P)}$ sichtbar ist, wird mit einer Kollokation mit räumlichen Kovarianzfunktionen zusammen mit Restlotabweichungen etc. erfasst. Damit kann für jeden Punkt Q in der Lotlinie von P der zusätzliche Schwereanteil $dg^{(Q)}$ prädiert und der Mittelwert von $dg^{(Q)}$ in der Lotlinie berechnet werden. Zusätzlich wird ein Schätzfehler für diesen Mittelwert berechnet. Diese Methode wird Schwerefeldfortsetzung mittels Kollokation genannt. Sie bietet die Möglichkeit, alle vorhandenen (räumlich verteilten) Schwerefelddaten zu verarbeiten (nicht nur die Oberflächenschwere des gesuchten Punktes). Auf erste Ergebnisse über die Grössenordnung der Wirkungen darf man gespannt sein.

$$\int_0^{H_p} g^{(Q)} dh = H_p \cdot \bar{g}^{(P)} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}^{(P)} = \frac{1}{H_p} \int_0^{H_p} g^{(Q)} dh \quad (7.2-10)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(P)} = & \quad g_{\text{Beob}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Moho}}^{(P)} - g_{\text{Ivrea}}^{(P)} + \\ & + \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} (g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Frei}}^{(Q)} + g_{\text{Top}}^{(Q)} + g_{\text{Bpl}}^{(Q)} + g_{\text{Moho}}^{(Q)} + g_{\text{Ivrea}}^{(Q)}) dh \end{aligned} \quad (7.2-11)$$

Wenn wir die Freiluftkorrektur als lineare Funktion der Höhe ansetzen, kann der Freiluftanteil einfach integriert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} (g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Frei}}^{(Q)}) dh &= g_{\text{Frei}}^{(P)} - \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} \frac{\partial g}{\partial h} \cdot H_Q dh \\ &= g_{\text{Frei}}^{(P)} - \frac{1}{H_P} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \int_0^{H_P} H_Q dh \\ &= g_{\text{Frei}}^{(P)} - \frac{1}{H_P} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{1}{2} H_P^2 \\ &= g_{\text{Frei}}^{(P)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \cdot H_P = \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} \\ &\quad \Downarrow \\ &\quad g_{\text{Frei}}^{(P)} \end{aligned} \quad (7.2-12)$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \bar{g}^{(P)} = & \quad g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Top}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - g_{\text{Moho}}^{(P)} - g_{\text{Ivrea}}^{(P)} + \\ & + \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} (g_{\text{Top}}^{(Q)} + g_{\text{Bpl}}^{(Q)} + g_{\text{Moho}}^{(Q)} + g_{\text{Ivrea}}^{(Q)}) dh \end{aligned} \quad (7.2-13)$$

Wenn wir vereinfachend die berechenbaren Modellwirkungen der Topographie, der Bouguerplatte, der Moho, der Ivreastörung und allfälliger weiterer Dichtekontraste als g_{Modelle} zusammenfassen, erhalten wir:

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Modelle}}^{(P)} + \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} g_{\text{Modelle}}^{(Q)} dh \quad (7.2-14)$$

Anders als bisher bestimmen wir das Integral nicht mehr durch numerische Integration, sondern leiten einen geschlossenen Ausdruck her.

Nach [Kahle, 1989] ist das

$$\begin{aligned}
 & \text{- Gravitationspotential} & V &= G \iiint_{M_E} \frac{dm}{r} \\
 & \text{- Zentrifugalpotential} & U_Z &= \frac{1}{2} \omega^2 r_b^2 \quad , \quad r_b = \text{Abstand von der Erdachse} \\
 & \text{- Schwerepotential } W = V + U_Z & &= G \iiint_{M_E} \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 r_b^2 \quad (7.2-15)
 \end{aligned}$$

$$\text{- Potential der Normalschwere } g_{\text{Norm}} = U$$

$$\text{- Störpotential} \quad T = W - U \quad (7.2-16)$$

Wir spalten hier das Störpotential T weiter in einen modellmässig erfassbaren Anteil T_M und den nicht modellierbaren Rest T_R auf, der nicht weiter verfolgt wird.

$$T_M^{(Q)} = G \iiint_{\text{Modelle}} \frac{dm}{r} \quad (7.2-17)$$

Dieses Modellpotential gilt für einen beliebigen Punkt Q in der Lotlinie des Beobachtungspunktes P und stellt das Potential der Modellschweren (g_{Modelle}) dar, wie aus der folgenden Herleitung ersichtlich ist:

$$\begin{aligned}
 g_{\text{Modelle}}^{(Q)} &= G \iiint_{\text{Modelle}} \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi = -G \iiint_{\text{Modelle}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dm}{r} \right) = \\
 &= -G \frac{\partial}{\partial z} \iiint_{\text{Modelle}} \frac{dm}{r} = - \frac{\partial T_M^{(Q)}}{\partial z} \quad (7.2-18)
 \end{aligned}$$

φ = Winkel zwischen dem Ortsvektor r zum Massenelement und der z-Achse (vgl. Abb. 7.2-8).

$$\text{Damit wird} \quad \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} g_{\text{Modelle}}^{(Q)} dh = - \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} \frac{\partial T_M^{(Q)}}{\partial z} dh \quad (7.2-19)$$

Da die z-Achse mit der h-Achse identisch ist, kann man auch einfacher schreiben:

$$-\frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} \frac{\partial T_M^{(Q)}}{\partial z} dh = -\frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} \frac{\partial T_M^{(Q)}}{\partial h} dh = -\frac{1}{H_P} \left[T_M^{(Q)} \right]_0^{H_P} = -\frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_P} \quad (7.2-20)$$

Damit haben wir einen geschlossenen Ausdruck für die mittlere Schwere in der Lotlinie des Punktes P:

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Modelle}}^{(P)} - \frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_P} \quad (7.2-21)$$

Mit Formel 7.2-21 können die *Modelleinflüsse* auf die mittlere Schwere in der Lotlinie *exakt* berechnet werden. Es werden dadurch Fehler im Bereich von einigen mm pro km Meereshöhe vermieden, da man die Schwerewirkungen nicht mehr in 2 bis 5 Punkten in der Lotlinie berechnet und mittelt.

$T_M^{(P)}$ und $T_M^{(0)}$ könnten mit dem Programm LAG berechnet werden (für die Topographie, das MOHO- und IVREA-Modell). Sie werden allerdings mit dem Satz von Bruns in Geoid-Höhendifferenzen umgerechnet und um den Wert des Modellgeoidhöhenanteils in der Referenzstation Schwerzenbach korrigiert (damit dort die Geoidhöhe Null (definitionsgemäss) herauskommt).

Ohne Herleitung (vgl. dazu z.B. [Mader, 1951]) sind die Formeln für die Wirkung eines regelmässigen Quaders als Anteil zu

$$-\frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_P} \quad \text{und zu} \quad g_{\text{Modelle}}^{(P)}$$

(Letzteres ist im LAG noch nicht eingebaut), und zwar je die genaue Quaderformel und die Näherungsformeln für die Linien- und für die Punktmasse desselben Quaders im Anhang zusammengestellt.

7.2.5 Programm L O S T

7.2.5.1 Elemente von LOST

(Mittlere L Otschwerewirkungen und Schwerewirkungen aus Topographie und Massenmodellen).

Aus dem Programm LAG wurde ein neues Programm LOST entwickelt, das die notwendigen Berechnungen für die mittlere Schwere in der Lotlinie ausführt. Damit können für jeden beliebigen Punkt in der Schweiz die Schwere $g_{\text{Modelle}}^{(P)}$ und die

mittlere Schwere in der Lotlinie $\frac{1}{H_p} \int_0^{H_p} g_{\text{Modelle}}^{(Q)} dh = - \frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_p}$ berechnet werden.

Die einzelnen Anteile zu den berechneten Grössen werden separat ausgegeben. So hat man die Werte für die Nah- und Ferntopographie, die MOHO, den IVREA-Körper sowie das Total für jeden Punkt zur Verfügung. Vorgesehen ist noch eine weitere mit STÖR angeschriebene Kolonne, wo die Wirkungen von einer beliebigen weiteren Störung, die digitalisiert vorliegt, berechnet werden könnte. Natürlich kann, wie beim LAG, gesteuert werden, welche Modelle berücksichtigt werden sollen.

Berechnet werden die *Wirkungen* der Massenmodelle und nicht deren Korrektur! Es stehen nun 3 neue Subroutinen QUADER, LINIE und PUNKT zur Verfügung, die beide gesuchten Werte auf einmal berechnen, da man viele Zwischenresultate in beiden Formeln braucht und somit nur einmal berechnen muss.

7.2.5.2 Testberechnungen

In Testberechnungen mussten folgende Fragen geklärt werden:

- a) Arbeitet das Programm richtig?
- b) Ist die Nahtopographie erforderlich?
- c) Welchen Einfluss hat die MOHO, welchen das IVREA-Modell?

a) Arbeitet das Programm richtig?

Um diese Frage zu beantworten, bin ich folgendermassen vorgegangen: Am Institut für Geophysik existiert ein Programm zur Berechnung der topographischen Korrektur, das mit einem eigenen Topographiemodell arbeitet. Für einige Punkte konnte ich die topographische Korrektur mit beiden Programmen berechnen. Sie stimmt innerhalb der zu erwartenden Genauigkeit überein. Gleichzeitig konnten die Parameter kontrolliert werden, die steuern, bis in welche Stationsentfernung die exakte Quaderformel verwendet werden

muss und in welchem Abstand auf den jeweils nächstgrößeren Raster gegangen werden kann (vgl. Abb. 7.2-5 und 7.2-7).

Um den Mittelwert der topographischen Wirkung in der Lotlinie zu kontrollieren, wurde dieser Wert bei einigen Beispielen ebenfalls durch numerische Integration bestimmt. Auch hier stimmten die Werte überein.

Schliesslich wurden in [Schürer, 1944], Seite 18, die mittleren Lotschweren der Anschlusspunkte des Schweizerischen Nivellementsnetzes ans Ausland publiziert. Drei davon habe ich - ohne Berücksichtigung der Nahtopographie - mit denselben Oberflächenschwerewerten nachgerechnet.

DG und DGM sind die mit LOST berechneten Grössen mit folgender Bedeutung:

$$DG = g_{\text{Top}}^{(P)} + g_{\text{Moho}}^{(P)} + g_{\text{Ivrea}}^{(P)} \quad (\text{also ohne } g_{\text{Bpl}}^{(P)}) \quad (7.2-22)$$

$$DGM = \frac{1}{H_p} \int_0^{H_p} (g_{\text{Top}}^{(Q)} + g_{\text{Bpl}}^{(Q)} + g_{\text{Moho}}^{(Q)} + g_{\text{Ivrea}}^{(Q)}) dh = - \frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_p} \quad (7.2-23)$$

Sie sind je mit den fest vorgegebenen Werten $\rho = 2.65 \text{ g/cm}^3$ für die Topographie bzw. $\sigma = 0.4 \text{ g/cm}^3$ für die Moho und den Ivreakörper berechnet.

Aus diesen beiden Werten erhält man die mittlere Schwere in der Lotlinie wie folgt:

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Modelle}}^{(P)} - \frac{T_M^{(P)} - T_M^{(0)}}{H_p} \quad (7.2-24)$$

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - DG - g_{\text{Bpl}}^{(P)} + DGM \quad (7.2-25)$$

Bei Verwendung von anderen Dichtewerten für die Wirkung der Topographie, wie im Beispiel unten, müssen die im Programm separat ausgewiesenen Schwereanteile der Topographie (und der Bouguerplatte) durch 2.65 g/cm^3 dividiert und mit dem richtigen ρ multipliziert werden:

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.1543 \cdot H - \left(\frac{DG - DGM + 0.1119 \cdot H}{2.65} \right) \cdot \rho \quad (7.2-26)$$

Punkt	Höhe [m]	g [mgal] (Beob)	\bar{g} [mgal] Schürer	DG	DGM	\bar{g} (LOST)	ρ
Pierre du Niton	373.60	980'599	980'617	21.54	20.38	980'616.84	2.47
La Cure	1160.56	980'494	980'548	40.19	43.22	980'546.79	2.65
Gd. St. Bernard	2470.52	980'073	980'188	-86.26	-68.50	980'187.72	2.75

Tab. 7.2-1: Alte und nachgerechnete mittlere Schwerewere in der Lotlinie.

Über die von Niethammer bzw. Schürer verwendeten Dichten bin ich nur für den Pierre du Niton sicher. Sie stammt aus [Schürer, 1944]. Für die anderen beiden Punkte habe ich keine Angaben. Der Gd. St. Bernhard liegt in ähnlichem Gestein wie Airolo, Fusio. Dort hat Niethammer auch Dichten von 2.74 - 2.76 [g/cm³] verwendet.

Wenn für die letzten zwei Punkte auch nicht genau mit den angegebenen Dichten gearbeitet worden ist, so stimmen die Resultate doch für die Kontrollzwecke beruhigend gut überein. Rechtfertigung für die Verwendung einer einzigen Dichte für die ganzen Massen oberhalb des Meeresniveaus: Es steht bisher noch nichts Besseres zur Verfügung.

Eine einfache Modellrechnung zeigt aber, dass dieses Vorgehen gar nicht so grosse Fehler bewirken kann. Wir stellen uns vor, die Massen über dem Meeresniveau bestehen nur aus einer ebenen, unendlich ausgedehnten Platte von $h = 1000$ m Mächtigkeit (also einer ebenen Bouguerplatte), auf der wir unsere Messung ausführen. In Wirklichkeit erzeugt diese Platte auch den grössten Teil der Wirkung der topographischen Massen über dem Meeresniveau. Bildet man die Differenz (Wirkung der Bouguerplatte minus Wirkung des Kreiszyinders mit Radius R um den Beobachtungspunkt aus derselben Platte), so berechnet man die Wirkung sämtlicher Massen ausserhalb R (vgl. Abb. 7.2-9).

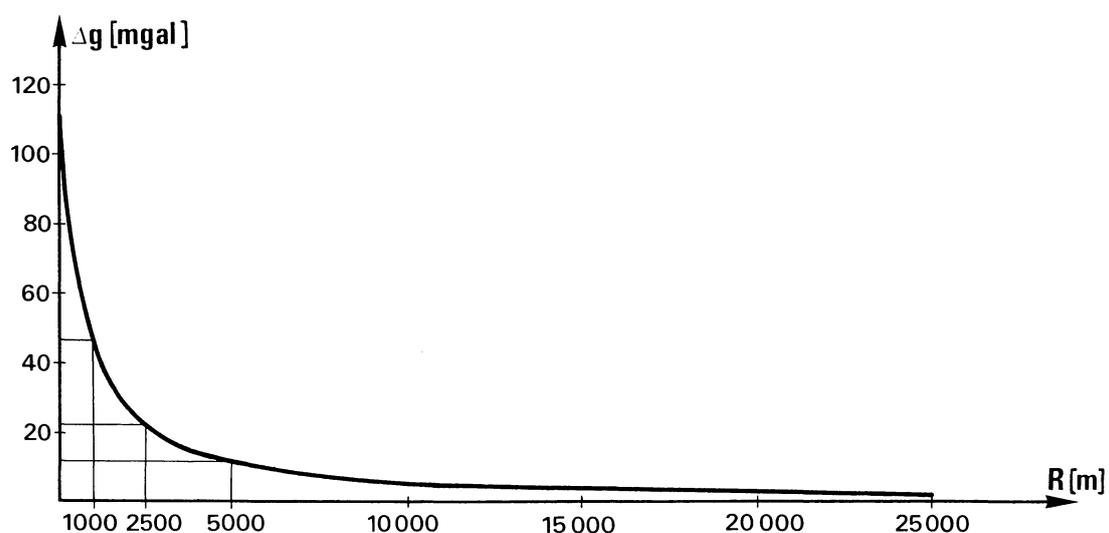


Abb. 7.2-9: Anteil der Massen ausserhalb R zur ebenen Bouguerplattenwirkung

50% der Wirkung stammen von den Massen im Umkreis von 1000 m.

80% der Wirkung stammen von den Massen im Umkreis von 2500 m.

90% der Wirkung stammen von den Massen im Umkreis von 5000 m.

99.7% der Wirkung stammen von den Massen im Umkreis von 167 km.

99.95% der Wirkung stammen von den Massen im Umkreis von 1000 km.

Wenn man also mit der mittleren Dichte der Gesteine im Umkreis von ca. 5 km rechnet, so werden 90% der Wirkung mit der richtigen Dichte bestimmt. Ausserhalb dieser 5 km unterscheidet sich die wahre mittlere Dichte von den verwendeten 2.65 g/cm^3 sowieso nur noch geringfügig.

b) Ist die Nahtopographie erforderlich?

Es wurden 9 Punkte im Wallis einmal mit und einmal ohne Nahtopographie berechnet.

DG ist die Schwerewirkung des entsprechenden Modells.

DGM ist der Mittelwert der Schwerewirkung des entsprechenden Modells in der Lotlinie.

a) ohne Nahtopographie

PUNKT	TOPOGRAPHIE									
	UMG 50		MH 500+10KM		MOHO		IVREA		TOTAL	
	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM
1001	0.00	0.00	-36.03	-49.43	-56.57	-57.18	-22.67	-22.59	-115.26	-129.20
1021	0.00	0.00	-42.67	-46.38	-57.21	-58.31	-21.75	-21.63	-121.63	-126.31
1041	0.00	0.00	-27.93	-25.30	-55.61	-56.58	-23.12	-23.00	-106.66	-104.88
1061	0.00	0.00	-30.63	-13.44	-54.02	-55.16	-20.93	-20.78	-105.58	-89.38
1081	0.00	0.00	-30.65	-29.94	-56.15	-57.12	-21.99	-21.87	-108.78	-108.94
1101	0.00	0.00	-27.93	-42.19	-54.69	-55.27	-21.30	-21.22	-103.92	-118.68
2018	0.00	0.00	-37.07	-53.17	-56.36	-56.96	-21.96	-21.89	-115.39	-132.01
1130	0.00	0.00	-40.63	-53.39	-55.28	-55.91	-22.39	-22.31	-118.30	-131.61
1150	0.00	0.00	-31.04	-21.94	-54.86	-56.11	-23.63	-23.48	-109.53	-101.53

b) mit Nahtopographie

PUNKT	TOPOGRAPHIE									
	UMG 50		MH 500+10KM		MOHO		IVREA		TOTAL	
	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM	DG	DGM
1001	-0.81	-2.10	-30.32	-44.89	-56.57	-57.18	-22.67	-22.59	-110.36	-126.75
1021	-18.39	-9.21	-21.56	-35.34	-57.21	-58.31	-21.75	-21.63	-118.91	-124.48
1041	-8.26	5.85	-20.14	-31.46	-55.61	-56.58	-23.12	-23.00	-107.13	-105.19
1061	-5.41	4.17	-17.02	-18.66	-54.02	-55.16	-20.93	-20.78	-97.38	-90.42
1081	-12.79	0.38	-19.03	-30.87	-56.15	-57.12	-21.99	-21.87	-109.96	-109.49
1101	-1.89	-2.58	-26.30	-38.73	-54.69	-55.27	-21.30	-21.22	-104.18	-117.80
2018	-4.06	-5.86	-31.36	-46.04	-56.36	-56.96	-21.96	-21.89	-113.74	-130.74
1130	-2.73	-4.14	-32.60	-47.35	-55.28	-55.91	-22.39	-22.31	-113.00	-129.71
1150	-5.63	0.86	-20.15	-24.27	-54.86	-56.11	-23.63	-23.48	-104.27	-103.01

Tab. 7.2-2: Berechnete Modellwirkungen mit und ohne Nahtopographie

In die Formel 7.2-25 gehen diese Werte als $-DG + DGM$ ein.

Punkt	Ohne Nahtopo -DG + DGM	Mit Nahtopo -DG + DGM	Differenz [mgal]	Punkthöhe [m]
1001	-13.94	-16.39	2.45	627
1021	-4.68	-5.57	0.89	1121
1041	1.78	1.94	-0.16	993
1061	16.20	6.96	9.24	1262
1081	-0.16	0.47	-0.63	1016
1101	-14.76	-13.62	-1.14	633
2018	-16.62	-17.00	0.38	627
1130	-13.31	-16.71	3.40	668
1150	8.00	1.26	6.74	1289

Tab. 7.2-3: Schweredifferenzen bei Vernachlässigung der Nahtopographie

Diese Differenzen zeigen deutlich, dass es unerlässlich ist, die Nahtopographie zu berücksichtigen. Die grössten Abweichungen von 6.7 bzw 9.2 mgal treten bei Hangpunkten auf.

c) Welchen Einfluss hat die MOHO, welchen der IVREA-Körper?

Die Einflüsse für die gerechneten Walliser Punkte können auch der Tabelle 7.2-2 entnommen werden.

Punkt	MOHO -DG + DGM	IVREA -DG + DGM
1001	-0.61	0.08
1021	-1.10	0.12
1041	-0.97	0.12
1061	-1.14	0.15
1081	-0.97	0.12
1101	-0.58	0.08
2018	-0.60	0.07
1130	-0.63	0.15
1150	-1.25	0.15

Tab. 7.2-4: Schwereinflüsse der MOHO und des IVREA-Körpers

Es fällt auf, dass die Beträge verhältnismässig klein sind. Das kommt daher, dass diese Massen tief liegen und sich ihr Einfluss in der Lotlinie nicht stark ändert. Die IVREA-Wirkung könnte hier im Wallis vernachlässigt werden, wie übrigens auch im Mittelland und in der Nordschweiz.

Die Wirkung der MOHO hängt natürlich davon ab, wo die Punkte liegen. Für andere Punkte wurden aber ähnliche Werte berechnet. Der Effekt nimmt mit wachsender

Punkthöhe zu. Ich würde also auf jeden Fall empfehlen, die MOHO zu berücksichtigen. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit dem Programm LOST das Werkzeug zur Verfügung steht, mit dem die wesentlichen Grössen zur Berechnung der mittleren Schwere in der Lotlinie für jeden beliebigen Punkt in der Schweiz berechnet werden können. Der Rechenaufwand pro Punkt ist vergleichbar mit dem zur Berechnung einer Lotkrümmung aus demselben Massenmodell. Der grösste Aufwand besteht momentan noch in der Erfassung der Nahtopographie, wofür pro Punkt mit ca 3 - 4 Arbeitsstunden gerechnet werden muss.

7.2.5.3 Beispiel

Als erste Anwendung des Programmes habe ich die orthometrischen Höhen von 69 Stationen in der Ostschweiz berechnet. Es sind dies die Punkte der Strecken 29, 30, 33 und 35 der Übersicht Abb. 7.1-1.

Die L+T stellte mir freundlicherweise ihr Präzisionsnivellement dieser Strecken von 1981 zur Verfügung. Vom IGP konnte ich die im gleichen Jahr durchgeführten Schwere-messungen verwenden. Die Berechnungen wurden zu einem Zeitpunkt durchgeführt, als erst die Wirkung der Topographie berücksichtigt werden konnte. Es wurde überall mit der konstanten Gesteinsdichte von 2.65 g/cm^3 gerechnet.

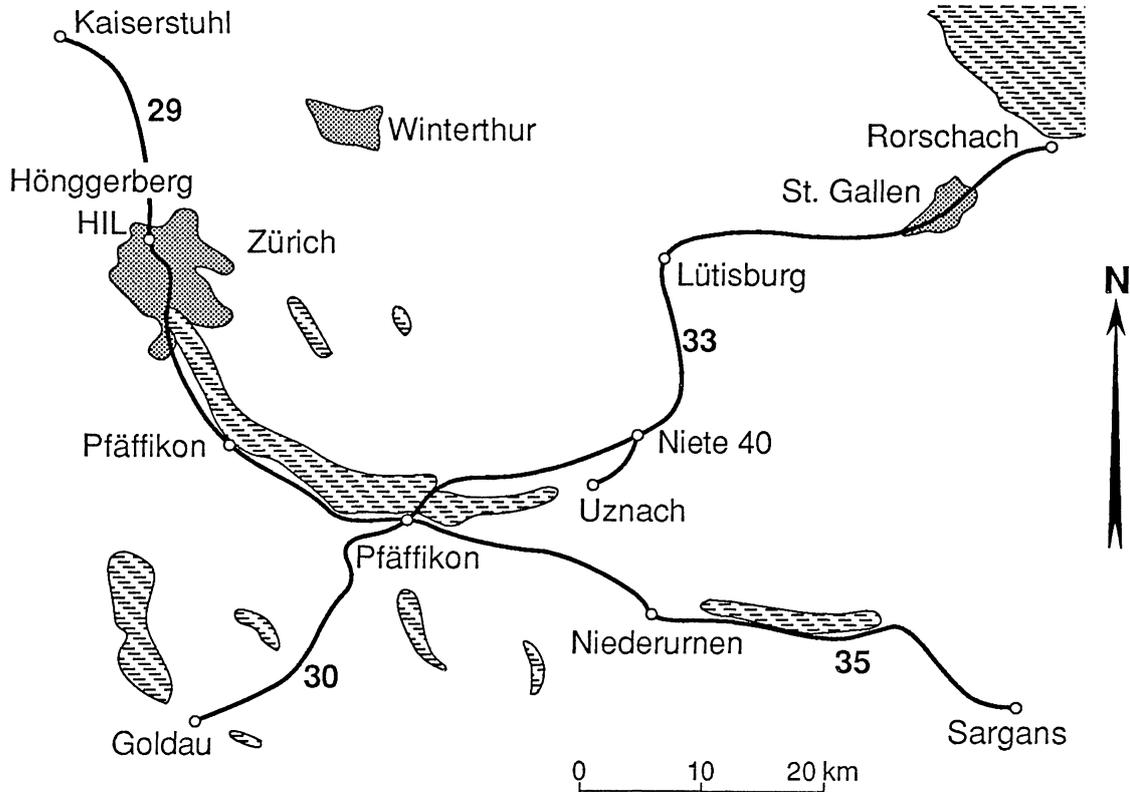
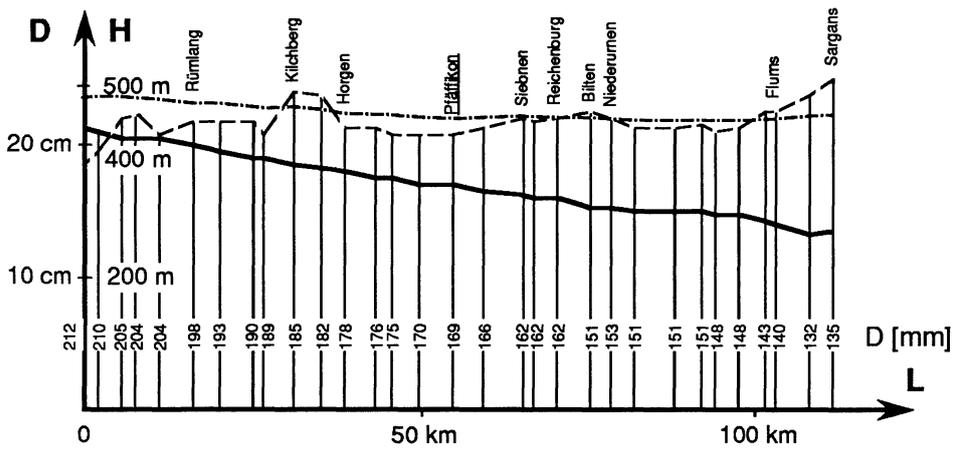
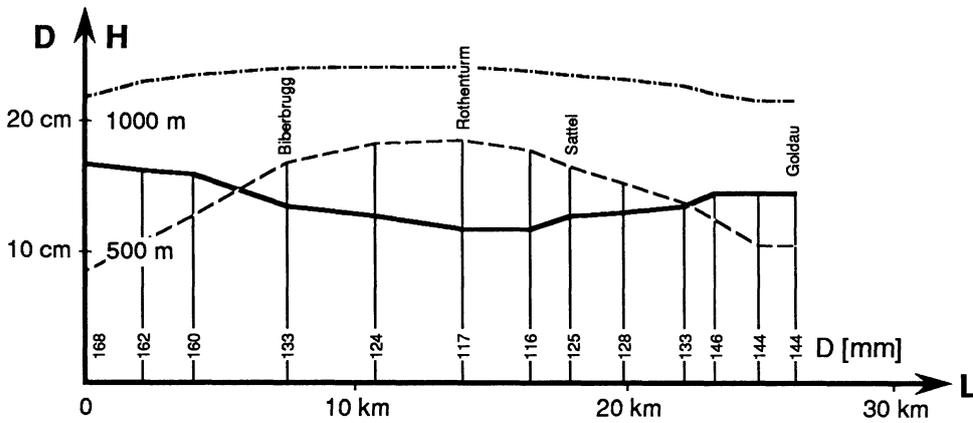


Abb. 7.2-10: Situation der Nivellementslinien zur Berechnung orthometrischer Höhen

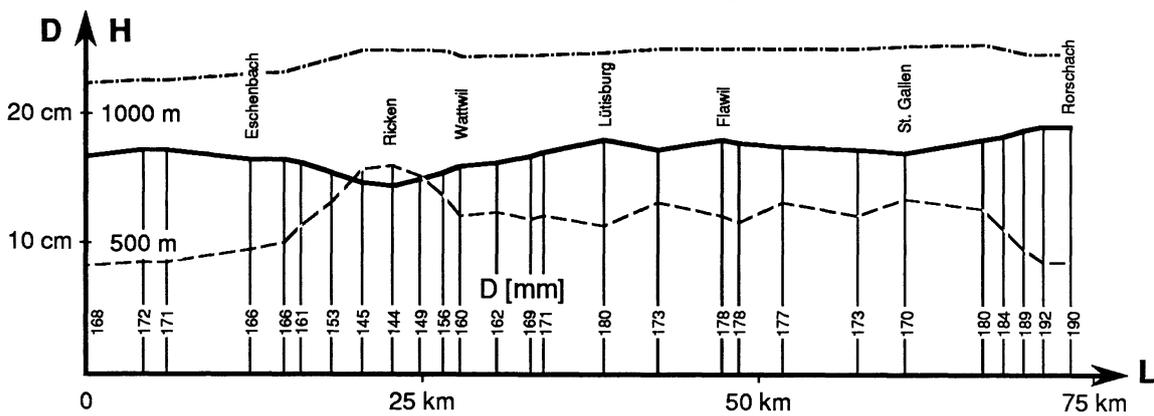
Linie 29 und 35



Linie 30



Linie 33



- D: gem. - wahre orthometrische Höhe
- · - · - gem. - Normalhöhe
- - - H: Meereshöhe

Abb. 7.2-11: Orthometrische Korrekturen auf den Linien 29, 35, 30 und 33.

Die Resultate können der Abb. 7.2-11 entnommen werden. Dargestellt ist je ein Längenprofil der Strecke mit den Differenzen gemessene minus orthometrische Höhe. Auf den Linien 29 und 35, also zwischen Kaiserstuhl und Sargans, ergibt sich betragsmässig eine systematische, fast lineare, Verringerung der orthometrischen Korrektur um 77 mm, überlagert von einer höhenabhängigen Komponente. Die beiden Linien 30 und 33 über die Pässe Sattel und Ricken unterstreichen diese höhenabhängige Komponente nochmals, über den Sattel ist die Abweichung von der linearen Änderung ca 40 mm bei einer Höhendifferenz von ca 450 m. Nach den in Kap. 7.2.1 erwähnten orthometrischen Korrekturen, die auf ausgesuchten Linien bis 4 dm betragen können, bestätigt dieses erste eigene Beispiel auf nicht speziell ausgesuchten Linien, dass die orthometrische Korrektur in den dm-Bereich vorstossen, aber auch über kürzere steile Strecken sofort einige cm ausmachen kann.

7.3 Orthometrische Korrektur

Die orthometrische Korrektur E wird so definiert, dass sie, zu der rohen Höhendifferenz addiert, die orthometrische Höhe H ergibt. Formeln dazu sind in [Jeanrichard, 1962] und in [Chaperon und Elmiger, 1989] hergeleitet. Sie setzen sich aus dem wegabhängigen Anteil E1 zum theoretischen Schleifenschlussfehler (7.1-3) und einem wegunabhängigen "Potentialanteil" E2 zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_B H_B - \bar{g}_A H_A &= \sum_A^B g_i \delta h_i' \\ H_B - H_A &= E + \sum_A^B \delta h_i' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Diff} \\ \cdot g_0 \end{array} \quad (7.3-1)$$

$$H_B (\bar{g}_B - g_0) - H_A (\bar{g}_A - g_0) = \sum_A^B (g_i - g_0) \delta h_i' - E g_0$$

Daraus ergibt sich die orthometrische Korrektur E:

$$E = \underbrace{\frac{1}{g_0} \sum_A^B (g_i - g_0) \delta h'_i}_{E_1} + \underbrace{H_A \left(\frac{\bar{g}_A - g_0}{g_0} \right) - H_B \left(\frac{\bar{g}_B - g_0}{g_0} \right)}_{E_2} \quad (7.3-2)$$

Analog kann für die Normalhöhen geschrieben werden:

$$E^N = \frac{1}{g_0} \sum_A^B (g_i - g_0) \delta h'_i + H_A^N \left(\frac{\bar{g}_{\text{Norm}}^A - g_0}{g_0} \right) - H_B^N \left(\frac{\bar{g}_{\text{Norm}}^B - g_0}{g_0} \right) \quad (7.3-3)$$

Setzen wir in 7.3-2 $g_0 = \bar{g}_{\text{Norm}}^B$, so wird $E_2 = \frac{C_A}{\bar{g}_{\text{Norm}}^B} - H_A - \underbrace{\frac{C_B}{\bar{g}_{\text{Norm}}^B}}_{H_B^N} + H_B$

$$\frac{C_A}{\bar{g}_{\text{Norm}}^B} = \frac{C_A}{\bar{g}_{\text{Norm}}^A + (\bar{g}_{\text{Norm}}^B - \bar{g}_{\text{Norm}}^A)} = \frac{C_A}{\bar{g}_{\text{Norm}}^A + \delta \bar{g}_{\text{Norm}}^{AB}} \approx \frac{C_A (\bar{g}_{\text{Norm}}^A - \delta \bar{g}_{\text{Norm}}^{AB})}{(\bar{g}_{\text{Norm}}^A)^2}$$

$$\frac{C_A}{\bar{g}_{\text{Norm}}^B} = H_A^N \left(1 - \frac{\delta \bar{g}_{\text{Norm}}^{AB}}{\bar{g}_{\text{Norm}}^A} \right)$$

$$E_2 = H_A^N - H_A - H_B^N + H_B - H_A^N \frac{\delta \bar{g}_{\text{Norm}}^{AB}}{\bar{g}_{\text{Norm}}^A} \quad (7.3-4)$$

Aus $h_{\text{EII}} = H + N = H^N + \zeta$ folgt

$$\left. \begin{array}{l} H = h_{\text{EII}} - N \\ H^N = h_{\text{EII}} - \zeta \end{array} \right\} \Rightarrow H_A^N - H_A = h_{\text{EII}}^A - \zeta_A - h_{\text{EII}}^A + N_A = N_A - \zeta_A$$

$$\text{oder } E_2 = (\zeta_B - N_B) - (\zeta_A - N_A) - H_A^N \frac{\delta \bar{g}_{\text{Norm}}^{AB}}{\bar{g}_{\text{Norm}}^{AB}} \quad (7.3-5)$$

Falls wir Punkt A auf das Geoid legen, so wird $H_A^N = 0$ und damit $\zeta_A = N_A$.

$$E_2 = (\zeta_B - N_B) \quad (7.3-6)$$

Der wegunabhängige Teil E_2 der orthometrischen Korrektur entspricht der Differenz zwischen der Quasigeoidhöhe und der Geoidhöhe in Punkt B. E_2 kann näherungsweise aus Massenmodellen berechnet werden:

$$E_2 \approx \frac{T_M^{(B)} - T_M^{(0)}}{\bar{g}_{\text{Norm}}^B}$$

Unter den Voraussetzungen $H_A^N = 0$ und der speziellen Wahl von g_0 als mittlerer Normalschwere in der Lotlinie von B wird der zu E_2 analoge Teil der Formel 7.3-3 zu Null und damit $E^N = E_1$. In Abb. 7.2-11 sind die E^N ebenfalls strichpunktiert eingetragen. Sie weisen eine kleinere Systematik auf (zwischen 217 und 251 mm) als die orthometrischen Korrekturen (zwischen 116 und 212 mm) und sind auch weniger mit der Höhe korreliert.

8 Genauigkeitsabschätzungen

8.1 Die Nivellementshöhe

$$s = s_0 \sqrt{L}$$

- s = mittlerer Fehler einer Nivellementslinie
 s_0 = mittlerer 1 km - Fehler des Nivellementes (8.1-1)
 L = Länge der Nivellementslinie in [km]

Wie in Kapitel 7.1 angegeben wurde, beträgt beim Schweizerischen Landesnivellement $s_0 = 1.75$ mm, ohne Berücksichtigung des theoretischen Schleifenschlussfehlers, und $s_0 = 1.40$ mm mit Berücksichtigung desselben.

Die Genauigkeit der Punkthöhen in einem Nivellementsnetz kann nicht allgemein angegeben werden, sie ist abhängig von der Netzgeometrie sowie der Verteilung und Genauigkeit der Anschlusspunkte.

Tabelle 8.1-1 mit den Genauigkeiten der Schweizer Punkte nach der Ausgleichung unter Berücksichtigung des theoretischen Schleifenschlussfehlers stammt aus [Schürer, 1944, Seite 29].

Linie	Pierre du Niton -	Nyon -
Les Verrières	±13.1 mm	±10.7 mm
Delémont	±15.2	±13.2
Boncourt	±17.6	
Basel	±15.0	±12.9
Konstanz	±17.1	±15.3
St. Margarethen	±16.9	±15.1
Landquart	±16.6	±14.8
Süs	±18.8	±17.3
Martinsbruck	±20.8	
Zemez	±18.9	±17.4
Münster i. M.	±20.9	
Wormserjoch	±21.4	
Castione	±17.9	±16.2
Chiasso	±20.9	
Brissago	±19.7	
Gotthard	±16.0	±14.1
Martigny	±14.2	±12.0
Gd. St. Bernard	±17.0	
Châtelard	±15.5	

Tab. 8.1-1: Relative Genauigkeiten der Schweizer Punkte nach Schürer

8.2 Die geopotentielle Kote

$$C = \sum_i g_i \cdot \delta h_i \quad dC = \sum_i (dg_i \cdot \delta h_i + g_i \cdot d(\delta h_i))$$

Daraus ergibt sich mit dem Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_C^2 = \sum_i \left(s_{g_i}^2 \cdot \delta h_i^2 + g_i^2 \cdot s(\delta h_i)^2 \right) \quad (8.2-1)$$

Der Hauptanteil von s_C^2 stammt aus $s(\delta h_i)$, also aus den Fehlern an den gemessenen Höhendifferenzen. Nun kann man sich fragen, in welchen Punktabständen auf der Nivellementsline Schweren gemessen werden müssen, ohne dass sich der Fehler des Mittelwertes der Schwere in beiden Endpunkten wesentlich in s_C bemerkbar macht.

Die Differenz der geopotentiellen Koten zweier Punkte mit Schweremessungen berechnet man, indem man das Mittel der beiden Schwerewerte mit der Höhendifferenz dazwischen multipliziert. Als Fehler an g erscheint dann die Abweichung der tatsächlichen Schwere zwischen den beiden Punkten vom linearen Verlauf.

Für unsere Abschätzung treffen wir folgende Annahmen:

s_C^2 soll infolge s_g um nur 2% grösser werden, womit sich s_C nur um ca 1% vergrössert. Den Wert s_g nehmen wir zu 0.3 mgal plus 10% von der Schweredifferenz zwischen den beiden Punkten an (die pro Meter Höhendifferenz ca 0.2 mgal beträgt). Pro Umstellung werden 3 m Höhendifferenz gemessen, die mittlere Distanz zwischen zwei Umstellpunkten betrage 50 m.

Mit diesen Annahmen ergeben sich folgende Werte:

$$\Delta h = n \cdot 3.0 \text{ [m]} \quad (n \text{ sei die Anzahl Umstellungen, bis} \quad (8.2-2)$$

$$g = 980'600 \text{ [mgal]} \quad \text{wieder ein Schwerewert gemessen wird.)} \quad (8.2-3)$$

Den mittleren Fehler einer 50m-Strecke des Nivellementes schätzen wir aus dem mittleren Kilometerfehler von 1.4 mm (Kap. 7.1) ab. Dieser setzt sich aus 20 Teilstrecken zusammen: $s(1\text{km})^2 = 20 \cdot s(\delta h_1)^2 = 0.0014^2 \text{ m}^2$, daraus

$$s(\delta h_1)^2 = \frac{0.0014 \text{ m}}{\sqrt{20}} = 0.0003 \text{ m} \quad (8.2-4)$$

$$s(\Delta h)^2 = (0.0003)^2 \cdot n \quad [\text{m}^2] \quad (8.2-5)$$

$$s_g^2 = (0.3 + 0.06 \cdot n)^2 \quad [\text{mgal}^2] \quad (8.2-6)$$

(0.3 mgal + 10% von 3 mal 0.2 mal n)

$$\begin{aligned} s_C^2 &= s_g^2 \cdot \Delta h^2 + g^2 \cdot s(\Delta h)^2 \quad (\text{nach Formel 8.2-1}) \\ &= (0.3 + 0.06 \cdot n)^2 \cdot 9.0 \text{ n}^2 + 980600^2 \cdot (0.0003^2 \cdot n) \\ &= (0.0036n^2 + 0.036n + 0.09) \cdot 9n^2 + 86542n \end{aligned}$$

mit $s_g^2 \cdot \delta h^2 < 0.02 \text{ g}^2 \cdot s(\Delta h)^2$ folgt (die verlangten 2%)

$$0.0324n^4 + 0.324n^3 + 0.81n^2 \leq 1731n \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \leq 34} \quad (8.2-7)$$

Dies bedeutet, dass nach maximal 34 Umstellungen wieder ein Schwerewert gemessen werden sollte. Setzen wir dieses Resultat in die Formeln 8.2-2,3,5 und 6 ein, so erhalten wir die maximalen Beträge für diese Werte:

$\Delta h \leq 100 \text{ m}$	Dieses Beispiel zeigt, dass die Messge-
$g \approx 980'600 \text{ mgal}$	nauigkeit der Gravimeter bei weitem nicht
$s(\Delta h) \approx 0.0018 \text{ m}$	ausgeschöpft werden muss, dass es ohne
$s_g \leq 2.3 \text{ mgal}$	Genauigkeitsverlust genügt, in ansteigen-
	den Strecken im Abstand von 100

Höhenmetern und auf flachen Strecken **alle 1.7 km** einen Schwerewert zu messen.

Der mittlere Fehler an der geopotentiellen Kote entspricht also dem mittleren Fehler der Nivellementshöhe (oder -höhendifferenz) multipliziert mit g .

$$\boxed{s_C \approx s \cdot g = s_0 \cdot \sqrt{L} \cdot g} \quad (8.2-8)$$

Vom Bundesamt für Landestopographie (L+T) wurden mir freundlicherweise die Resultate der Europäischen Ausgleichung 1979 des REUN - Netzes in geopotentiellen Koten sowie die Abbildung 8.2-1 zur Verfügung gestellt. Die Tabelle 8.2-1 stammt aus [Ehrnsperger, W. und J.J. Kok, 1987 (UELN-73, Ausgleichung 1986)].

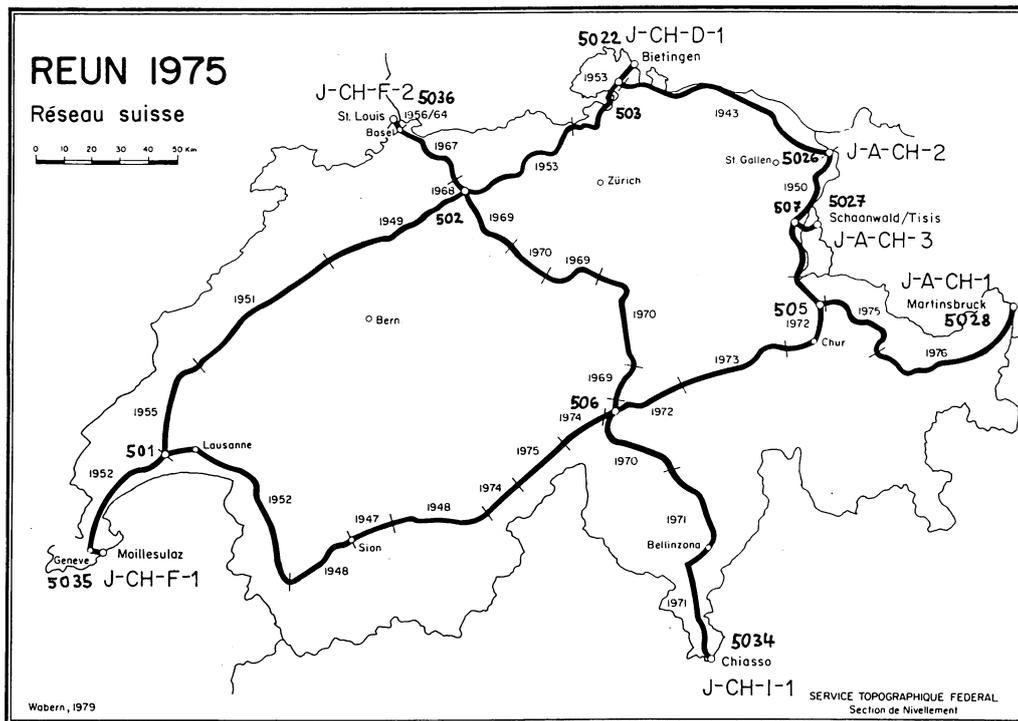


Abb. 8.2-1: Linien und Knotenpunkte des REUN in der Schweiz

Punkt	Name	Höhe[GPU]	m.F.[GPU]
501	Préverenges	400.407783	.019
502	Olten	393.246551	.018
503	Schaffhausen	426.345567	.018
505	Landquart	516.886682	.018
506	Andermatt	1403.473911	.018
507	Frümsen	443.314275	.018
5022	Bietingen	424.052081	.018
5026	St. Margreten	411.081792	.018
5027	Schaanwald	453.154056	.018
5028	Vinadi	1037.622904	.018
5034	Chiasso	227.563078	.019
5035	Moillesulaz	407.052275	.019
5036	St. Ludwig	254.110595	.018

Tab. 8.2-1: Schweizer Stationen in REUN mit Genauigkeiten gegenüber Amsterdam

8.3 Die dynamische Höhe

$$H^D = \frac{C}{\xi_{\text{Norm}}^{(45^\circ)}}$$

ξ_{Norm} kann als fehlerfrei betrachtet werden

$$s_C = s_0 \cdot \sqrt{L} \cdot g, \text{ damit} \quad s_{H^D} = s_0 \sqrt{L} \frac{g}{g_{\text{Norm}}} \approx s_0 \sqrt{L}$$

$$s_{H^D} = s_0 \sqrt{L}$$

(8.3-1)

8.4 Die Normalhöhe

$$H^N = \frac{C}{\bar{g}_{\text{Norm}}^{(\varphi, h)}}$$

dafür gilt analog zu Kapitel 8.3

$$s_{H^N} = s_0 \sqrt{L}$$

(8.4-1)

Die dynamischen Höhen, die Normalhöhen und die Nivellementshöhen, unter Berücksichtigung des theoretischen Schleifenschlussfehlers, haben dieselbe Genauigkeit.

8.5 Die orthometrische Höhe

Wir gehen aus von der Formel 2.5-1 $H = \frac{C}{\bar{g}}$

$$dH = \frac{1}{\bar{g}} dC - \frac{C}{\bar{g}^2} d\bar{g}; \quad s_H^2 = \frac{1}{\bar{g}^2} s_C^2 + \left(\frac{C}{\bar{g}^2}\right)^2 s_{\bar{g}}^2$$

$$\text{Mit } H = \frac{C}{\bar{g}} \text{ folgt:} \quad s_H^2 = \frac{1}{\bar{g}^2} s_C^2 + \left(\frac{H}{\bar{g}}\right)^2 s_{\bar{g}}^2 \quad (8.5-1)$$

Von Kap. 8.2 wissen wir, dass $s_C = s_0 \cdot \sqrt{L} \cdot g$, und da $g \approx \bar{g}$:

$$s_H^2 = s_0^2 \cdot L + \left(\frac{H}{\bar{g}}\right)^2 s_{\bar{g}}^2 \quad (8.5-2)$$

In [Schürer, 1944] finden wir, Seite 31, zwei Formeln für die Genauigkeit des Mittelwertes der Schwere in der Lotlinie, die er von Th. Niethammer übernommen hat:

$$\begin{aligned} s_g &= 3 \text{ mgal} & s_{\bar{g}} &= \sqrt{10 + (2 \cdot H [\text{km}])^2} \text{ mgal} & \text{oder} \\ s_g &= 1.5\sqrt{2} \text{ mgal} & s_{\bar{g}} &= \sqrt{4.75 + (1.13 \cdot H [\text{km}])^2} \text{ mgal} & (8.5-3) \end{aligned}$$

Früher konnten die Schwerewerte nicht so bequem und genau gemessen werden wie heute. Deshalb mussten oft Werte für Zwischenpunkte aus benachbarten Messungen interpoliert werden. Heute (bei gravimetrisch bestimmtem g) können wir s_g , verglichen mit den andern Fehlern, als Null annehmen.

Ausgehend von Formel 7.2-14:
$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Modelle}}^{(P)} + \bar{g}_{\text{Modelle}}^{(\text{Lot})}$$

stellen wir nochmals fest:

g_{Beob}	:	fehlerfrei
g_{Frei}	:	fehlerfrei
g_{Modelle}	:	} abhängig von der Gesteinsdichte und von der Geländegestalt
\bar{g}_{Modelle}	:	

Wir verlangen, dass die Geländegestalt im Topographiemodell so gut erfasst wird (mit Verwendung der Nahtopographie), dass der daraus resultierende mittlere Fehler nur noch maximal 1.5 mgal beträgt. Dazu kommt die Unsicherheit der Gesteinsdichte. Betroffen davon ist die Summe der Modellwirkungen $M = (-DG - g_{\text{Bpl}} + DGM)$. Für unsere Beispiele (vgl. Tab. 7.2-2, -3 und -4):

Punkt	H[m]	M
1001	627	-85.87
1021	1121	-129.61
1041	993	-107.97
1061	1262	-132.63
1081	1016	-111.98
1101	633	-83.77
2018	627	-86.48
1130	668	-90.72
1150	1289	-141.28

Tab. 8.5-1: Summe der Modellwirkungen M für einige Stationen

Man sieht sofort, dass M sehr stark mit der Höhe korreliert ist. Eine vermittelnde Ausgleichung mit dem Ansatz $M = a \cdot H + v$ ergibt die Lösung $a = -0.1149$ mgal/m. Dies wundert nicht besonders, steckt doch in M die Wirkung der Bouguerplatte, die eine lineare Funktion der Höhe ist. Dieser Wert wird bis zu max 20% korrigiert durch - DG + DGM. Für die Fehlerabschätzung genügt es, den höhenabhängigen Term zu verwenden.

$$M \approx -0.042 \cdot \rho \cdot H[\text{m}] \quad (8.5-4)$$

also $s_M = 0.042 \cdot H \cdot s_\rho$. Für s_ρ setzen wir 0.03 g/cm^3 (falls wir die bestmöglichen Gesteinsdichten verwenden).

$$s_M = 0.00126 \cdot H[\text{m}] \quad [\text{mgal}]$$

damit also auch $s_{\bar{g}} = 0.00126 \cdot H[\text{m}] \quad [\text{mgal}]$

oder mit den 1.5 mgal mittlerem Fehler für die Erfassung der Topographie:

$$s_{\bar{g}} = \sqrt{1.5^2 + (1.26 \cdot H [\text{km}])^2} \quad [\text{mgal}] \quad (8.5-5)$$

Damit haben wir eine Formel gefunden, die den Formeln 8.5-3 von Niethammer sehr ähnlich ist und den heutigen Messgenauigkeiten etwa entsprechen dürfte.

Für die Genauigkeit der orthometrischen Höhen folgt:

$$s_H^2 = s_0^2 \cdot L + \left(\frac{H}{g}\right)^2 s_{\bar{g}}^2 = s_0^2 \cdot L + \left(\frac{H}{g}\right)^2 \left(1.5^2 + (1.26 \cdot H [\text{km}])^2\right)$$

$$s_H [\text{mm}] = \sqrt{s_0^2 \cdot L [\text{km}] + \left(\frac{H [\text{mm}]}{\bar{g} [\text{mgal}]}\right)^2 \left(1.5^2 + (1.26 \cdot H [\text{km}])^2\right)} \quad (8.5-6)$$

Die folgende Darstellung zeigt s_H als Funktion der Punkthöhe für verschiedene $s_0\sqrt{L}$ aufgezeichnet (für $\bar{g} = 980600$ mgal).

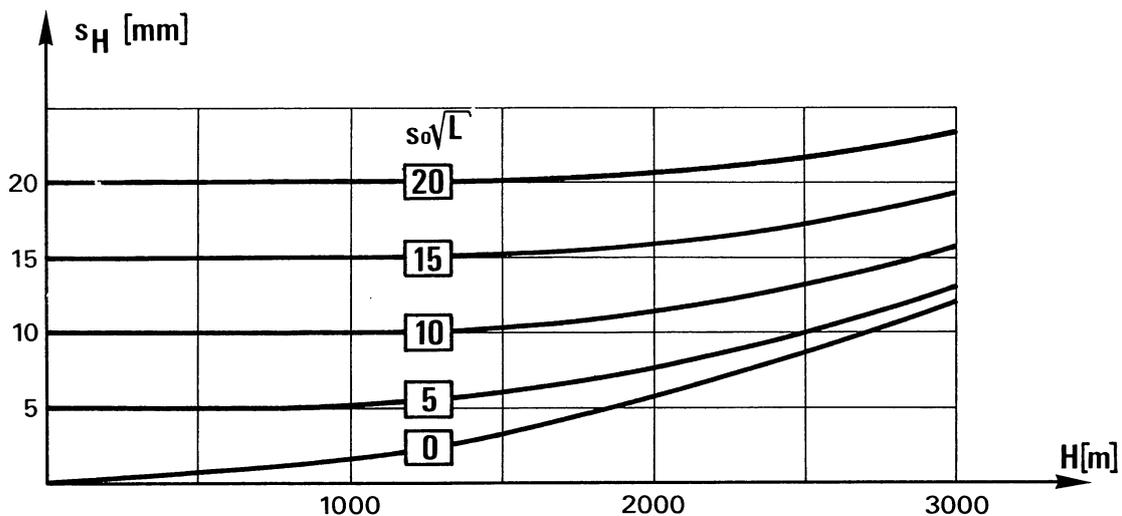


Abb. 8.5-1: Genauigkeit der orthometrischen Höhe als Funktion der Messgenauigkeit und der Punkthöhe

In [Sünkel, 1986] wird der Einfluss der Abweichungen eines Dichtemodelles (blockweise eine konstante Dichte zwischen Geoid und Oberfläche) auf die orthometrischen Höhen gegenüber der Annahme einer einzigen Dichte für das ganze Topomodell für ganz Österreich ausgewiesen. Der Einfluss liegt zwischen -3 mm und +5 mm und ist praktisch zu vernachlässigen.

Nach [Bretterbauer, 1986, Seiten 214, 215] kann für die orthometrische Höhe eine empirisch bestimmte Faustformel verwendet werden:

$$H \text{ [m]} = \frac{C}{g_{\text{Beob}}} - 0.033 \cdot H_{[\text{km}]}^2 \quad (8.5-7)$$

Sie gibt ohne jeden Aufwand die orthometrische Höhe auf $\pm 5\text{mm}$ durch Verwendung der Oberflächenschwere alleine. Diese Formel wollen wir überprüfen:

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} + M \quad (8.5-8)$$

mit $M = (-DG - g_{\text{Bpl}} + \text{DGM})$.

$$\frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} = \frac{1}{2} \cdot 0.3085 \cdot H = 0.1543 \cdot H \text{ [mgal]}$$

$$M = -0.1119 \cdot H \pm 20 \% \text{ [mgal]} \quad (\text{Bouguerplatte})$$

$$\frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} + M = 0.0424 \cdot H$$

$$\bar{g}^{(P)} \approx g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.0424 \cdot H \quad (8.5-9)$$

$$\text{Daraus: } H = \frac{C}{\bar{g}^{(P)}} \approx \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.0424 \cdot H} = \frac{\frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}}}{1 + \frac{0.0424 \cdot H}{g_{\text{Beob}}^{(P)}}} \approx \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} \left(1 - \frac{0.0424 \cdot H}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} \right)$$

$$= \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} - \underbrace{\frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} \cdot \frac{0.0424 \cdot H}{g_{\text{Beob}}^{(P)}}}_{\approx H} = \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} - \frac{0.0424}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} \cdot H^2$$

$$H \text{ [m]} = \frac{C}{g_{\text{Beob}}^{(P)}} - 0.043 \cdot H_{[\text{km}]}^2 \quad (8.5-10)$$

Wir erhalten also einen leicht höheren Wert als Bretterbauer. Dies hat folgenden Grund: Bretterbauer hat seine Formel empirisch erhalten, während wir von der Helmert'schen orthometrischen Höhe ausgegangen sind. Dabei wird der topographische Einfluss vernachlässigt. Bei den von mir untersuchten Punkte ergibt $-DG + DGM$ für Stationen auf dem Talboden einen Effekt, der die Differenz erklärt, und dort werden auch die meisten Nivellements liegen. Bei Hang- oder Gipfelpunkten hingegen wechselt dieser Einfluss das Vorzeichen!

Die Streuung wird im Mittel zu 12% dieser Korrektur angenommen (aus Tab. 8.5-1 berechnet), was

$$s_H \approx 5.2 \text{ mm} \cdot H_{[\text{km}]^2} \quad \text{entspricht} \quad (8.5-11)$$

Die $\pm 5 \text{ mm}$ Genauigkeit von Bretterbauer gelten also nur für maximale Punkthöhen von ca. 1000 m. In seinem Beispiel treten Punkthöhen bis 1500 m auf. Diese Ergebnisse relativieren ein wenig die Aussage von [Sünkel, 1986, Seite 83], wonach die Vernachlässigung der Topographie eine Verfälschung der orthometrischen Höhen *um mehrere Zentimeter* bewirke.

8.6 Zusammenfassung

Mit Kap. 8.2 wurde gezeigt, dass beim Nivellement für die Genauigkeit die *Messgenauigkeit der Höhendifferenzen* der limitierende Faktor ist, was bewirkt, dass alle verschiedenen Höhen praktisch dieselbe Genauigkeit aufweisen (abgesehen von den Einheiten der Geopotentiellen Kote C). Einzig bei der orthometrischen Höhe kommt die Unsicherheit der Dichteverteilung dazu, die einen höhenabhängigen Fehleranteil ergibt.

9 Quervergleich Lotkrümmung - Potential

In Kapitel 3 haben wir die geometrische Deutung der orthometrischen Korrektur als Einfluss der Lotkrümmung κ gesehen. Dort wurde auch angegeben, dass die trigonometrischen Höhenbestimmungen um die Lotkrümmung in Richtung der jeweiligen Visur korrigiert werden müssen, um orthometrische Höhendifferenzen zu erhalten.

Andererseits kümmern wir uns beim Nivellement gar nicht um die Lotkrümmungen und berechnen orthometrische Höhen mit Hilfe der gemessenen Höhendifferenzen und Schwerewerte und der Modellvorstellung über das Verhalten der Schwere in der Lotlinie des Punktes (vgl. Kapitel 7). Dass die beiden Verfahren doch identisch sind, soll hier gezeigt werden.

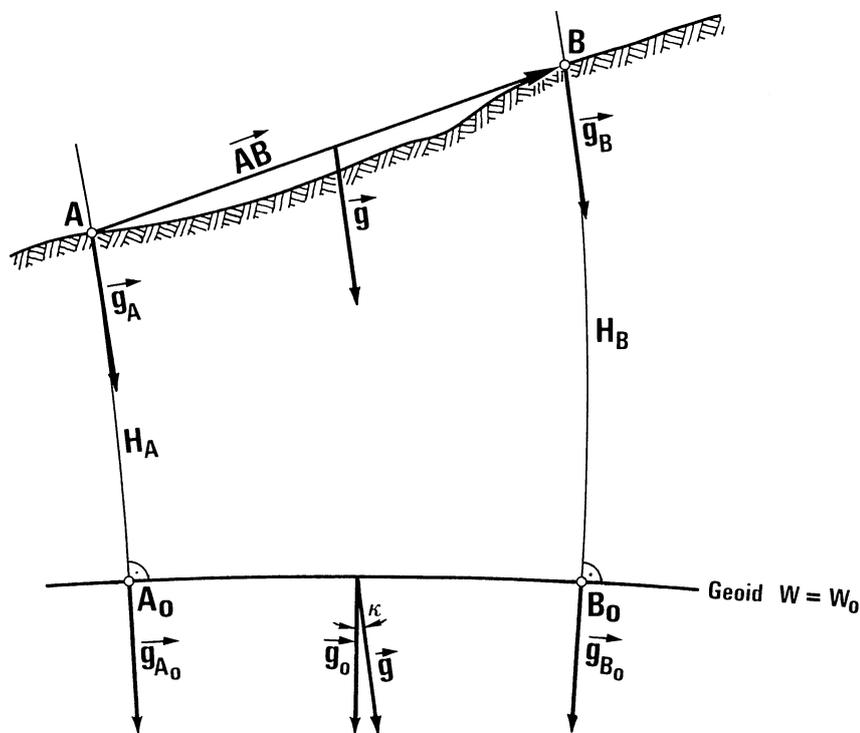


Abb. 9.1-1: Ein kurzes Stück einer Nivellementsline

Wir führen folgende Vereinfachungen ein: $\vec{g} = \frac{\vec{g}_A + \vec{g}_B}{2}$; $\vec{g}_0 = \frac{\vec{g}_{A_0} + \vec{g}_{B_0}}{2}$.

Dies sind die Mittelwerte der Schwere von A und B. Nun können wir die orthometrische Korrektur geometrisch nochmals herleiten:

$$\delta h' = - \frac{\overline{AB} \cdot \vec{g}}{|\vec{g}|} \quad (\text{gemessene Höhendifferenz}) \quad (9.1-1)$$

(Skalarprodukte)

$$\delta H = - \frac{\overline{AB} \cdot \vec{g}_0}{|\vec{g}_0|} \quad (\text{orthometrische Höhendifferenz}) \quad (9.1-2)$$

$$\delta H = \delta h' + (\delta H - \delta h') = \delta h' + \overline{AB} \cdot \left(\frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} - \frac{\vec{g}_0}{|\vec{g}_0|} \right) = \delta h' - \overline{AB} \cdot \vec{\kappa} \quad (9.1-3)$$

$\vec{\kappa}$ ist ein Korrekturvektor, der praktisch horizontal liegt und den Betrag $\tan \kappa \approx \sin \kappa \approx \kappa$ hat (da $\kappa \ll 1$)

Damit $\delta H = \delta h' - AB \cdot \kappa = \delta h' - |AB| \cdot \cos \beta \cdot |\kappa| = \delta h' - AB_{\text{hor}} \cdot \kappa$
oder die orthometrische Korrektur

$$\delta H - \delta h' = - AB_{\text{hor}} \cdot \kappa \quad (9.1-4)$$

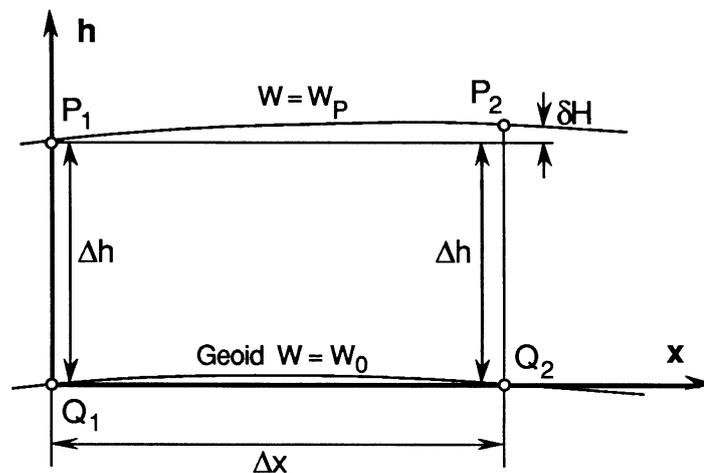


Abb. 9.1-2: Orthometrische Korrektur aus Schwerepotential W

Zur physikalischen Herleitung der orthometrischen Korrektur aus dem Schwerepotential W gehen wir von folgender Situation aus: P_1 und P_2 sind Punkte an der Erdoberfläche mit gleichem Schwerepotential, also $W(P_1) = W(P_2)$. Diese Vereinfachung ist zulässig, da in erster Ordnung die orthometrische Korrektur unabhängig von der gemessenen Höhendifferenz $\delta h'$ zwischen P_1 und P_2 ist (man muss nur Δx klein genug wählen).

Damit wird $\delta h' = 0$ und die orthometrische Korrektur nach (9.1-4) reduziert sich zu δH . Nun entwickeln wir das Schwerepotential W um den Ursprung unseres Koordinatensystems (Q_1) bis zur zweiten Ordnung. Die x -Richtung legen wir in die Richtung des Nivellementsweges von P_1 nach P_2 ; die h -Achse entspricht der Höhe. Für die partiellen Ableitungen von W schreiben wir die tiefgestellten Indices, also

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W_x \text{ etc.}$$

$$W(x, h) = W(0, 0) + W_x x + W_h h + W_{xx} \frac{x^2}{2} + W_{xh} xh + W_{hh} \frac{h^2}{2} + \dots \quad (9.1-5)$$

Mit $P_1 = (0, \Delta h)$; $Q_1 = (0, 0)$; $P_2 = (\Delta x, \Delta h + \delta H) \approx (\Delta x, \Delta h)$; $Q_2 = (\Delta x, 0)$ schreiben wir für die mittleren Schwerewerte in der Lotlinie:

$$\begin{aligned} \bar{g}(P_1, Q_1) &= \frac{W(P_1) - W(Q_1)}{\Delta h} = \frac{1}{\Delta h} \left[W_h \Delta h + W_{hh} \left(\frac{\Delta h^2}{2} \right) \right] \\ \bar{g}(P_1, Q_1) &= W_h + W_{hh} \frac{\Delta h}{2} \end{aligned} \quad (9.1-6)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}(P_2, Q_2) &= \frac{W(P_2) - W(Q_2)}{\Delta h} = \frac{1}{\Delta h} \left[W_h \Delta h + W_{xh} \Delta x \Delta h + W_{hh} \left(\frac{\Delta h^2}{2} \right) \right] \\ \bar{g}(P_2, Q_2) &= W_h + W_{xh} \Delta x + W_{hh} \frac{\Delta h}{2} = \bar{g}(P_1) + W_{xh} \Delta x \end{aligned} \quad (9.1-7)$$

Wegen $W(P_1) = W(P_2) = W_P$ folgt damit für die orthometrische Korrektur δH :

$$\delta H = H_2 - H_1 = \frac{W_P}{\bar{g}(P_2)} - \frac{W_P}{\bar{g}(P_1)} = \frac{W_P}{\bar{g}(P_1) + W_{xh} \Delta x} - \frac{W_P}{\bar{g}(P_1)} \quad (9.1-8)$$

Den Ausdruck $\frac{W_P}{\bar{g}(P_1) + W_{xh} \Delta x}$ entwickeln wir in eine Reihe:

$$\text{Für } h \ll 1 \text{ gilt } \frac{1}{x+h} \approx \frac{1}{x} + \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} \cdot h = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot h$$

$$\Rightarrow \delta H = \frac{W_P}{\bar{g}(P_1)} - \frac{W_P}{\bar{g}(P_1)^2} \cdot W_{xh} \Delta x - \frac{W_P}{\bar{g}(P_1)} = -\frac{W_P}{\bar{g}(P_1)^2} \cdot W_{xh} \Delta x \quad (9.1-9)$$

Setzen wir $\frac{W_P}{\bar{g}(P_1)} = H_1 \approx \Delta h$, so wird (9.1-9) zu:

$$\delta H = -\frac{W_{xh} \Delta x \Delta h}{\bar{g}(P_1)} \approx -\frac{W_{xh} \Delta x \Delta h}{\bar{g}(P)}; \quad W_{xh} \approx \frac{W_x(P) - W_x(Q)}{\Delta h}$$

und damit

$$\delta H = -\frac{[W_x(P) - W_x(Q)] \cdot \Delta x \Delta h}{\Delta h \cdot \bar{g}(P)} = -\left(\frac{W_x(P)}{\bar{g}(P)} - \frac{W_x(Q)}{\bar{g}(P)}\right) \cdot \Delta x \quad (9.1-10)$$

$W_x(P)$ ist die Horizontalkomponente des Schwerevektors in x-Richtung.

Für kleine Winkel ε ist $\varepsilon \approx \tan \varepsilon = -\frac{W_x}{|g|} \approx -\frac{W_x}{\bar{g}}$.

Also: $\delta H = (\varepsilon(P) - \varepsilon(Q)) \Delta x = -\kappa \Delta x$ (9.1-11)

analog wie bei der geometrischen Herleitung (9.1-4). Nach [Rummel, 1984] ist

$$\kappa_1 = -\frac{1}{g_{\text{Norm}}} W_{xh} \quad (9.1-12)$$

die Lotkrümmung im mathematischen Sinne und

$$\kappa_1 = +\frac{1}{g_{\text{Norm}}} W_{xh} \Delta h \quad (9.1-13)$$

die Lotkrümmung im geodätischen Sinne als Differenz von Lotabweichungen. Wenn wir 9.1-13 in 9.1-9 einsetzen, erhalten wir 9.1-11 direkt. Damit ist die Identität der beiden verschiedenen Verfahren gezeigt.

Einen praktischen Unterschied gibt es dennoch: Wird die Lotkrümmung κ explizit berechnet (z.B. mit dem LAG), so ist das *nur* über Modelle der Massenverteilung

möglich. κ ist damit eine rein modellmässige Grösse, es wird dafür keine Messung verwendet.

Wenn wir die orthometrische Höhe für das Nivellement rechnen, benützen wir ebenfalls das Massenmodell, um die Schwereänderung mit der Tiefe zu berechnen. Wir können aber doch eine Beobachtung mitbenutzen: Die gemessene Schwere an der Erdoberfläche, an die die Bestimmung des Mittelwertes in der Lotlinie angeschlossen wird.

Zusammenfassung

Der Zweck der Kapitel 1 bis 9 bestand darin, einen Überblick über die Höhensysteme zu geben und zu zeigen, wie die einzelnen Höhenarten ineinander übergeführt werden können. Daneben sollte die orthometrische Höhe theoretisch erarbeitet und praktisch in Form eines Programmes zur Berechnung der wichtigsten Grössen dafür zur Verfügung gestellt werden. Dies ist gegenwärtig von grossem Interesse, da mit dem modernen Satellitenmessverfahren (NAVSTAR/GPS) ein neues Verfahren gegeben ist, womit unter anderem auch Höhen bestimmt werden können, diese aber nicht ohne weiteres in das Gebrauchshöhennetz übernommen werden. Dazu sind neben der genauen Kenntnis des Geoides auch die orthometrischen Korrekturen erforderlich.

Die wesentlichste Voraussetzung zur Berechnung der orthometrischen Höhen ist ein zutreffendes Massenmodell, das neben einem Terrainmodell auch die zugehörigen Dichten enthält. Dies ist leider bis heute in der Schweiz nicht realisiert.

Ein Ziel des Bundesamtes für Landestopographie (L+T) ist es, für das Schweizerische Landesnivellement orthometrische Höhen zu berechnen. Wenn einmal für die ausgewählten Punkte die Nahtopographie vorliegt (die L+T ist daran, diese über die Schweiz zu erstellen), so ist die Berechnung von orthometrischen Höhen operationell möglich.

Teil II

10 Kollokation und Prädiktion

Für eine lokale *kombinierte Geoidbestimmung* aus Lotabweichungen, Schwereanomalien und aus GPS und Nivellement bestimmten Geoidundulationen will ich mich an die bewährte Methode von [Elmiger, 1969] und [Gurtner, 1978] halten, wonach von den gemessenen Grössen die Effekte des Topographiemodells, besser aber zusätzlich noch eines Moho-Modells, subtrahiert werden müssen. Erst dann sind die verbleibenden Differenzen gut genug interpolierbar. Diese Methode hat sich auch wieder bei [Marti, 1988] bewährt. Die verwendeten Modelle werden bei der Geoidberechnung wieder berücksichtigt, indem deren Potentiale *auf Meereshöhe* berechnet werden und damit in Geoidanteile umgerechnet werden können. Dieses Vorgehen hat allerdings auf die nachfolgende Herleitung der Grundgleichungen keinen Einfluss.

10.1 Herleitung der Grundgleichungen

Die Kollokation wurde ursprünglich in der Gravimetrie verwendet, wo Schwereanomalien in beliebigen Punkten aus unregelmässig verteilten Schweremessungen mit Hilfe von statistischen Prädiktionsverfahren inter- bzw. extrapoliert werden mussten. Später hat diese Methode auch in der Photogrammetrie Einzug gefunden. Sie ist eine erweiterte Anwendung der Ausgleichsrechnung auf Probleme, bei denen nicht nur Parameter des mathematischen Modelles bestimmt werden, sondern auch funktional nicht modellierte systematische Anteile, die dem Modell überlagert sind und somit in den Messungen stecken, unter bestmöglicher Beseitigung der zufälligen Messfehler.

Im Folgenden gebe ich die Herleitung der statistischen Interpolationsmethode wieder, um deren physikalischen und geometrischen Inhalt untersuchen zu können. Die Untersuchungen führen schliesslich zu einem neuen, sehr einfachen Ansatz für die kombinierte Geoidbestimmung.

Die Einführung in die Kollokation mit den zugehörigen Begriffen stammt aus [Gotthardt, 1978].

Die Kollokation ist eine Verallgemeinerung der Ausgleichsrechnung und umfasst in einem geschlossenen Ansatz die Probleme *Ausgleichung, Filterung und Prädiktion*.

Mit der *Ausgleichung* werden die Parameter einer Funktion bestimmt, die den mit den Messungen erfassten Prozess darstellt. Dieser Anteil wird im formelmässigen Ansatz mit $A \cdot x$ dargestellt und oft als Trend oder regelmässiger-systematischer Anteil bezeichnet.

Zu den Messfehlern n kommt eine zweite zufällige Veränderliche, die Störgrösse s' ,

hinzu, die als unregelmässig-systematischer Anteil oder Signal das Ausgleichungsmodell überlagert.

$$\ell = A x + s' + n \quad (10.1-1)$$

Anstelle von n (Noise) schreibt man oft $-v$.

Als *Filterung* bezeichnet man die Bestimmung der Parameter und der Störgrößen in den Messpunkten selbst, unter bestmöglicher Beseitigung der Messfehler.

Als *Prädiktion* bezeichnet man die Störgrößenbestimmung in Punkten, die von den Messpunkten verschieden sind.

Die Messfehler n und die Störgrößen s' stellen zufällige Variable dar, deren Erwartungswerte Null sind: $E(n) = E(s') = 0$. Die Verbesserungen sind unabhängige, die Signale s' korrelierte Werte.

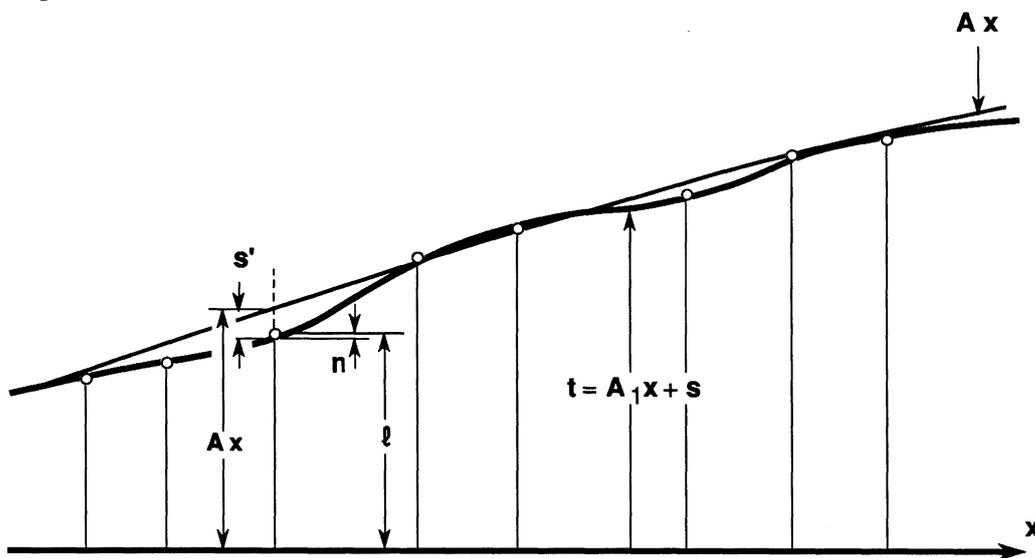


Abb. 10.1-1: Kollokation im eindimensionalen Fall

ℓ	= Messwert
n	= Noise
Ax, A_1x	= Trend in einer Messstation bzw. in Zwischenpunkt
s', s	= Signal in einer Messstation bzw. in Zwischenpunkt
$t = A_1x + s$	= Prädizierter Wert für Trend plus Signal in Zwischenpunkt

In A und A_1 stehen Funktionswerte von x . Je nach Anwendung bedeuten x die Ortskoordinaten oder die Zeit. Die A -Matrix umfasst die Funktionswerte von x in den Stützstellen, während in A_1 beliebig viele (zu interpolierende) Zwischenpunkte stehen können.

Beim Kollokationsverfahren müssen im voraus Annahmen über das Korrelationsverhalten der Signale getroffen werden. Glücklicherweise gilt dabei ähnlich wie in der Ausgleichsrechnung bezüglich der Gewichte, dass für die eigentliche Parameterbestimmung die Korrelation der Störgrößen nur genähert bekannt sein muss. Für eine zutreffende Fehlerrechnung sind jedoch präzisere Korrelationsaussagen erforderlich.

Bereits in [Wolf, 1977] und [Wolf, 1979] wird gezeigt, dass es zwei unterschiedliche Herleitungen für diese Methode gibt, einmal über die Ausgleichsrechnung nach dem Gauss'schen Algorithmus (kleinste Quadrate) und zum anderen über Least Squares Collocation (minimale Varianz). Beide Herleitungen führen jedoch zu identischen Formeln. Ich gebe hier die Herleitung über die kleinsten Quadrate:

$$\ell = A x + s' + n \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\ell - n = A x + s'} \quad (10.1-2)$$

ℓ = Messwerte

n = Noise = $-v$

A = Koeffizientenmatrix

x = Unbekannte Parameter

s' = Signalwerte in den Beobachtungspunkten

Neben der Kovarianzmatrix C_{nn} für den Noise (meist diagonal angesetzt) existiert auch eine Kovarianzmatrix $C_{s's'}$ für die Signalwerte.

Als v' bezeichnen wir den Vektor $v' = \begin{pmatrix} n \\ s' \end{pmatrix}$.

Damit können wir die Kollokationsgleichung (10.1-1) als

$$A x + (E \ E) \begin{pmatrix} n \\ s' \end{pmatrix} - \ell = 0 \quad \text{schreiben.} \quad (E = \text{Einheitsmatrix})$$

bzw. mit $(E \ E) = B$:

$$\boxed{A x + B v' - \ell = 0}$$

Wir verlangen wie üblich $v'^T P v' = \text{Min}$, mit $P = Q^{-1}$, $Q = \begin{bmatrix} C_{nn} & 0 \\ 0 & C_{s's'} \end{bmatrix}$

Als Voraussetzung gilt, dass die Signale unabhängig vom Noise sind, was in den Nullen in der Nebendiagonalen sichtbar wird. \mathbf{Q} und \mathbf{P} stehen normalerweise für Kofaktormatrizen, hier aber für Kovarianzmatrizen, was gleichbedeutend mit $\sigma_0 = 1$ ist.

$$\text{also } \boxed{\mathbf{v}'^T \mathbf{P} \mathbf{v}' = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{s}'^T \mathbf{C}_{s's'}^{-1} \mathbf{s}' = \text{Minimum}} \quad (10.1-3)$$

Moritz bezeichnet dies als Minimumsprinzip der "Kleinste Quadrate - Kollokation" [Moritz, 1980a, Kap. 16].

Die Lösung führt über die Lagrange'sche Prinzipalfunktion (vgl. z.B. [Schmid, 1977]):

$$\boxed{\Phi = \mathbf{v}'^T \mathbf{P} \mathbf{v}' - 2 \mathbf{k}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}' - \boldsymbol{\ell})} \quad (10.1-4)$$

Φ muss zum Minimum gemacht werden, wobei \mathbf{k} die Lagrange'schen Multiplikatoren darstellen.

$$\text{also } \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}'} = -\mathbf{P} \mathbf{v}' + \mathbf{B}^T \mathbf{k} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{k} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}' - \boldsymbol{\ell} = 0$$

Aus diesen Gleichungen eliminieren wir vorerst \mathbf{v}' :

$$-\mathbf{P} \mathbf{v}' + \mathbf{B}^T \mathbf{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}' - \boldsymbol{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k} - \boldsymbol{\ell} = 0.$$

Dies können wir nach \mathbf{k} auflösen: $\mathbf{k} = (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x})$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = 0$$

Was wir schliesslich nach \mathbf{x} auflösen können:

$$\mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \boldsymbol{\ell}$$

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \boldsymbol{\ell} \quad (10.1-5)$$

Aus Gleichung (10.1-5) können wir $\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T$ berechnen und neu bezeichnen:

$$\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{s's'} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{C}_{s's'} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{C}_{s's'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{nn} + \mathbf{C}_{s's'} = \mathbf{D} \quad (10.1-6)$$

$$\text{also } \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\ell}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x})$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x})$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{s's'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nn} \\ \mathbf{C}_{s's'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nn} \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \\ \mathbf{C}_{s's'} \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Zusammengefasst als Lösung unseres Ansatzes erhalten wir die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{C}_{nn} \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \\ \mathbf{s}' &= \mathbf{C}_{s's'} \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (10.1-7)$$

10.2 Die Kovarianzmatrix $C_{\ell\ell}$ der Beobachtungen ℓ

Wir untersuchen nun die Kovarianzmatrix $C_{\ell\ell}$ der Beobachtungen ℓ . Dazu bilden wir den um $A x$ zentrierten oder rein stochastischen Anteil z der Beobachtungen:

$$z = \ell - A x = s' + n \quad (10.2-1)$$

$$C_{\ell\ell} = \text{Cov}(\ell, \ell) = E \left\{ \left(\ell - E\{\ell\} \right) \cdot \left(\ell^T - E\{\ell^T\} \right) \right\}$$

$$E\{\ell\} = A x$$

$$\begin{aligned} C_{\ell\ell} &= E \left\{ (\ell - A x) \cdot (\ell^T - x^T A^T) \right\} = E\{z z^T\} = C_{zz} \\ &= E \left\{ (s' + n) \cdot (s'^T + n^T) \right\} = E \left\{ s' s'^T + s' n^T + n s'^T + n n^T \right\} \\ &= E \left\{ s' s'^T \right\} + E \left\{ s' n^T \right\} + E \left\{ n s'^T \right\} + E \left\{ n n^T \right\} \end{aligned}$$

$$E \left\{ s' s'^T \right\} = C_{s's'}$$

$$E \left\{ s' n^T \right\} = 0$$

$$E \left\{ n s'^T \right\} = 0$$

$$E \left\{ n n^T \right\} = C_{nn}$$

da n und s' unabhängige Größen sind.

$$C_{\ell\ell} = C_{zz} = C_{nn} + C_{s's'} = D = B P^{-1} B^T \quad (10.2-2)$$

$C_{\ell\ell}$ = Autokovarianz der Messungen.

C_{zz} = Autokovarianz des stochastischen Anteils der Messungen

$C_{s's'}$ = Autokovarianz des Signals s' in den Messpunkten.

C_{nn} = übliche Kovarianzmatrix der Messfehler (des Noise).
Meist diagonal.

10.3 Signale s in beliebigen Zwischenpunkten

Ein wesentlicher Bestandteil des Erfolges der Kollokationsmethode beruht auf der Tatsache, dass zusätzlich in beliebigen Zwischenpunkten, wo keine Beobachtungen ausgeführt werden, Werte für den systematischen Anteil $A_1 \cdot x$ und das Signal s berechnet (interpoliert) werden können:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{s} \\ \mathbf{s} &= \mathbf{C}_{s's} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (10.3-1)$$

Die Signale s der Zwischenpunkte berechnen sich sehr ähnlich wie die Signale s' der Beobachtungsstationen. Der einzige Unterschied ist in der für die Zwischenpunkte berechneten Kovarianzmatrix $C_{s's}$ zu finden.

10.4 Genauigkeiten der berechneten Grössen

10.4.1 Varianzen, Kovarianzen der unbekannt Parameter und der Signale

Die unbekannt Parameter x und die Signale s' bzw. s können als lineare Funktionen der Beobachtungen \mathbf{l} dargestellt werden. Wir untersuchen zuerst allgemein die Kovarianzen von linearen Funktionen der Beobachtungen (vgl. [Moritz, 1973], [Moritz, 1980a]):

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{z}} \quad ! \quad (10.4-1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}' + \mathbf{n}$$

Es wird nicht zwischen ausgeführter und wahrer Beobachtung unterschieden. Beide Gleichungen sind richtig. Wahre Grössen werden durch Überstreichen gekennzeichnet.

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{l}} ; \quad (10.4-2)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{A} \mathbf{G} \bar{\mathbf{l}}) = \mathbf{H}(\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{G}) \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{l}} \quad (10.4-3)$$

Aus den Erwartungswerten für diese Grössen ergeben sich Bedingungen für die Matrizen \mathbf{G} und \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}\} &= \mathbf{0} = \mathbf{L}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{L}E\{\bar{\mathbf{z}}\} \\ E\{\bar{\mathbf{z}}\} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{x}} &\neq \mathbf{0} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{0}} \quad (10.4-4)$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}\} &= \mathbf{G}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{G}E\{\bar{\mathbf{z}}\} = \bar{\mathbf{x}} \\ E\{\bar{\mathbf{z}}\} &= \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{E}} \end{aligned} \quad (10.4-5)$$

Die wahren Fehler ergeben sich aus der Differenz von wahren Werten und Schätzwerten:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\boldsymbol{\ell} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{z}} = -\mathbf{G}\bar{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\ell} = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{L}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{H}(\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{G})\bar{\mathbf{z}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x^T &= \mathbf{G}\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{G}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T &= (\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{z}})(\bar{\mathbf{s}}^T - \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{L}^T) = \bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{s}}^T - \mathbf{L}\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{s}}^T - \bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{L}^T + \mathbf{L}\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{L}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{xx} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x^T\} = \mathbf{G} \mathbf{C}_{zz} \mathbf{G}^T \stackrel{(10.2-2)}{\downarrow} \boxed{\mathbf{G} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{G}^T} \quad (10.4-6)$$

Das Symbol "E" für \mathbf{E}_{xx} , \mathbf{E}_{ss} und \mathbf{E}_{tt} kommt von "Error covariance matrix" und ist mit C gleichbedeutend.

$$\mathbf{E}_{ss} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T\} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{L} \mathbf{C}_{zs} - \mathbf{C}_{sz} \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{C}_{zz} \mathbf{L}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{sz} &= E\{\mathbf{s} \mathbf{z}^T\} = E\{\mathbf{s}(\mathbf{s}' + \mathbf{n})^T\} = E\{\mathbf{s} \mathbf{s}'^T + \mathbf{s} \mathbf{n}^T\} = \\ &= E\{\mathbf{s} \mathbf{s}'^T\} + E\{\mathbf{s} \mathbf{n}^T\} = E\{\mathbf{s} \mathbf{s}'^T\} = \mathbf{C}_{ss'} \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{zs} = \mathbf{C}_{s's} = \mathbf{C}_{ss'}^T$$

$$\text{damit} \quad \boxed{\mathbf{E}_{ss} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{L}^T} \quad (10.4-7)$$

$$\text{Soweit allgemein. In unserem Fall haben wir: } \mathbf{G} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \quad (10.4-8)$$

$$\text{verifiziere: } \mathbf{G} \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} = \text{Einheitsmatrix})$$

$$\text{und} \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1}$$

Dies ergibt für die unbekannt Parameter:

$$\mathbf{E}_{xx} = \mathbf{G} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{G}^T = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1}; \quad \mathbf{C}_{\ell\ell} = \mathbf{D}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{xx} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1}} \quad (10.4-9)$$

Dies ist die Varianz-Kovarianzmatrix der unbekannt Parameter.

Für das Signal \mathbf{s} haben wir gesehen, dass $\mathbf{s} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\ell}$ mit $\mathbf{L} = \mathbf{H} (\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{G})$

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \quad (10.4-10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \right) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T \\ &= \left(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T \\ &= \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T \\ \mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T &= \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{L}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{L}^T &= \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T = \\ &= \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T \\ &= \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right)^2 \mathbf{C}_{ss'}^T \end{aligned}$$

Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, dass der Ausdruck in der äusseren runden Klammer idempotent ist, das heisst,

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right)^2 = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{C}_{\varrho\varrho} \mathbf{L}^T = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T$$

$$\mathbf{E}_{ss} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \underbrace{\mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1}}_{\mathbf{E}_{xx}} \right) \mathbf{C}_{ss'}^T$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{ss} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T + \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T} \quad (10.4-11)$$

\mathbf{E}_{ss} ist die Varianz-Kovarianzmatrix der Signale (mit $\sigma_0 = 1$).

10.4.2 Kovarianz des vollständigen Signals

Unter Umständen ist man nicht am reinen Signal \mathbf{s} mit Genauigkeit interessiert, sondern an dem mit Trend versehenen vollständigen Signal (vgl. 10.3-1):

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{s}$$

\mathbf{E}_{tt} wird analog zu \mathbf{E}_{ss} bestimmt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t} = \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{s}} - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{s} \right) \\ &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{s}} - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} + \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\varrho} \\ &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{s}} - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{A} \right) \bar{\mathbf{x}} - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} + \mathbf{L} \right) \bar{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Es gilt wiederum: $\mathbf{G} \mathbf{A} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{0}$, (10.4-4 und 10.4-5) so dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \bar{\mathbf{s}} - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} + \mathbf{L} \right) \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T &= \left(\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \right) \left(\bar{\mathbf{s}}^T - \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}^T \right) = \bar{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{s}}^T - \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{s}}^T - \bar{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}^T \\ \mathbf{E}_{tt} &= \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \right\} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{K} \mathbf{C}_{zs} - \mathbf{C}_{sz} \mathbf{K}^T + \mathbf{K} \mathbf{C}_{zz} \mathbf{K}^T \\ &= \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{K} \mathbf{C}_{ss'}^T - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{K}^T + \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^T \end{aligned} \quad (10.4-12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{G} + \mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{A}_1 \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{L} + \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{K} \mathbf{C}_{ss'}^T &= \mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \\ \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{K}^T &= \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{L}^T + \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^T &= \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} + \mathbf{L} \right) \mathbf{D} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T + \mathbf{L}^T \right) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{L}^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T$$

Mit (10.4-8 und 10.4-10): $\mathbf{G} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1}$ und

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \right)$$

wollen wir $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T$ bestimmen:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T$$

$$\mathbf{L} \mathbf{D} = \mathbf{C}_{ss'} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T = \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T -$$

$$- \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T \right)^T = \mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{L}^T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} = \mathbf{E}_{xx}$$

damit $\mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^T = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tt} = & \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T - \\ & - \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T \end{aligned}$$

Wir hatten beim Signal:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ss} = & \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{L} \mathbf{C}_{ss'}^T - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \\ = & \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T + \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tt} = & \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T + \overbrace{\mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1}}^{\mathbf{H}} \mathbf{C}_{ss'}^T - \\ & - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T - \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_1^T \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{tt} = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{ss'} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_{ss'}^T + \left(\mathbf{H} \mathbf{A} - \mathbf{A}_1 \right) \mathbf{E}_{xx} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{H}^T - \mathbf{A}_1^T \right)} \quad (10.4-13)$$

\mathbf{E}_{tt} ist die Varianz- Kovarianzmatrix des vollständigen Signals \mathbf{t} .

In [Moritz, 1980a] wird auf die wichtige Tatsache aufmerksam gemacht, dass E_{xx} , E_{ss} und E_{tt} a priori berechnet werden können, es braucht keine explizit ausgeführten Messungen ℓ dazu. Sie sind durch die Kovarianzmatrizen der Signale und des Noise und der geometrischen Information über die *Lage* der Messpunkte in den A und A_1 -Matrizen gegeben. Diese Tatsache ist der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate und der Kollokation nach kleinsten Quadraten gemeinsam.

10.4.3 Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

$$\begin{aligned}
 \ell &= A x + s' + n \\
 D &= C_{nn} + C_{s's'} \\
 x &= (A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} \ell \\
 n &= C_{nn} D^{-1} (\ell - A x) & s &= C_{s's} D^{-1} (\ell - A x) \\
 s' &= C_{s's'} D^{-1} (\ell - A x) & t &= A_1 x + s \\
 E_{xx} &= (A^T D^{-1} A)^{-1} \\
 E_{ss} &= C_{ss} - C_{ss'} D^{-1} C_{ss'}^T + H A E_{xx} A^T H^T \\
 E_{tt} &= C_{ss} - C_{ss'} D^{-1} C_{ss'}^T + (H A - A_1) E_{xx} (A^T H^T - A_1^T) \\
 &\text{mit } H = C_{ss'} D^{-1}
 \end{aligned} \tag{10.4-14}$$

Mit diesem Formelapparat können wir nun praktisch alle Aufgaben der Ausgleichungsrechnung inklusive Kollokation und Prädiktion mit oder ohne Filterung lösen. Einige Spezialfälle sind:

$$C_{nn} = 0 \Rightarrow C_{\ell\ell} = C_{s's'} : \text{keine Filterung, } n = 0.$$

$$C_{s's'} = 0 \Rightarrow C_{\ell\ell} = C_{nn} : \text{reine Parameterschätzung ohne Signal, entspricht der klassischen Ausgleichungsrechnung. } s' = 0, \\ -n = v = -(\ell - A x) = A x - \ell.$$

$$A = 0 : \text{Prädiktion mit oder ohne Filterung ohne Parameterbestimmung.}$$

Bevor wir die Matrix $C_{s's'}$ bzw. $C_{ss'}$ weiter untersuchen (das sind die einzigen, die uns bisher noch nicht vertraut sind), stellen wir folgende Eigenschaften der Signale fest:

$$s' = C_{s's'} D^{-1} (\ell - A x)$$

$$s = C_{ss'} D^{-1} (\ell - A x)$$

Die Signale in den Messpunkten bzw. in den zu berechnenden Punkten sind *Linearkombinationen* aller Messungen (wie gefordert).

$$\boxed{k = D^{-1} (\ell - A x)} \quad (10.4-15)$$

ist ein konstanter Vektor und kann ein für alle mal berechnet werden. Danach können in beliebig vielen Punkten die Signale s berechnet werden (Prädiktion).

10.5 Allgemeines zur Kovarianzfunktion Φ

Die Kovarianzmatrix $C_{s's'}$ beschreibt die Kovarianz zwischen den Signalen s_i und s_k in zwei Punkten P_i und P_k . Es existieren viele verschiedene Ansätze für Kovarianzfunktionen, die meist auf sehr ähnliche Resultate führen. Die Kovarianz nimmt im Nullpunkt das Maximum ein, nimmt im allgemeinen mit zunehmendem Abstand r der beiden Punkte ab und geht für $r \rightarrow \infty$ gegen Null.

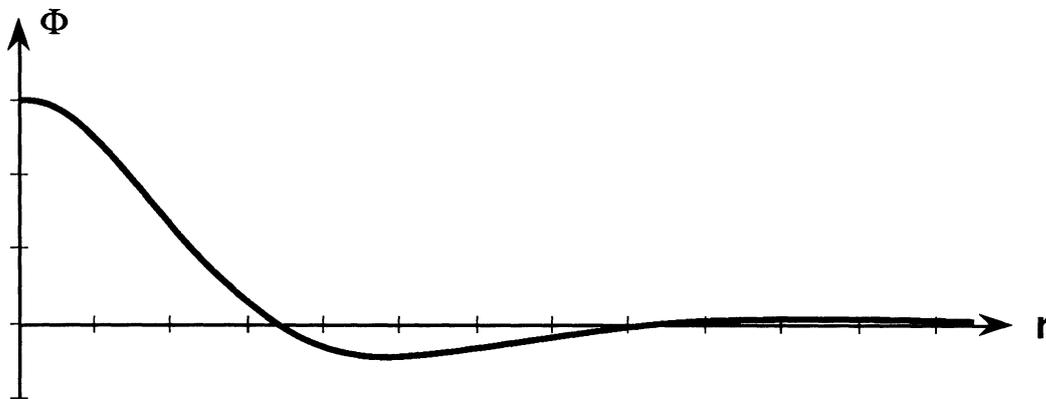


Abb. 10.5-1: Allgemeines Verhalten einer Kovarianzfunktion

Homogene Kovarianzfunktionen sind ortsunabhängig, sie gelten also im ganzen Definitionsbereich unverändert. Isotropie bedeutet Richtungsunabhängigkeit, also eine reine Funktion des Abstandes r . Das Verhalten der Kovarianzfunktionen wird meist über zwei freie Parameter bestimmt. σ_0^2 ist die Varianz des Signales und entspricht dem Wert der Funktion im Nullpunkt. d ist die charakteristische Distanz oder Korrelationslänge und entspricht im Beispiel 10.5-1 dem $(1/e)$ Punkt der Funktion. Um verschiedene Kovarianzfunktionen miteinander vergleichen zu können, wird häufig ihr $(1/e)$ Punkt angegeben.

$$\Phi(r) = \sigma_0^2 \cdot e^{-\frac{r}{d}} \quad (10.5-1)$$

(Exponentialmodell nach [Shaw et al., 1969] für Schwereanomalien)

$$\Phi(r) = \frac{\sigma_0^2}{1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2} \quad (10.5-2)$$

$$\Phi_{NN}(r) = \sigma_N^2 \left(1 + \frac{r}{d} + \frac{r^2}{3d^2}\right) e^{-\frac{r}{d}} \quad (10.5-3)$$

(N: Geoidundulation)

Das letzte Beispiel ist das von Jordan vorgeschlagene Markov - Undulationsmodell 3. Ordnung [Jordan, 1972], das von Gurtner [1978] verwendet wurde, um das Geoid der Schweiz zu berechnen. Dieser Ansatz erfüllt u.a. folgende Bedingungen:

$$-\infty < \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi_{NN}(r)}{\partial r} \frac{1}{r} < 0 \quad (10.5-4)$$

damit die Kovarianzfunktion der Lotabweichungskomponenten für $r = 0$ einen endlichen Wert erhält [Gurtner, 1978].

$$\left. \frac{\partial \Phi_{gg}(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (10.5-5)$$

(g: Schwereanomalie)

um physikalisch sinnvoll zu sein [Kasper, 1971]. Diese Bedingung wird z.B. vom Ansatz (10.5-1) nicht erfüllt.

10.6 Anwendung auf das Störpotential: Selbstkonsistentes Modell für Δg , ξ , η und N

Diese vier bekannten Größen werden durch ein einziges Feld verursacht: das Störpotential T . Für lokale Geoidbestimmungen genügen die Formeln für ebene Approximation [Shaw et al., 1969]:

$$N(x,y) = \frac{1}{2\pi g_0} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \frac{\Delta g(u,v)}{\sqrt{(y-u)^2 + (x-v)^2}} du dv \quad (\text{Stokes, Kap. 4.3}) \quad (10.6-1)$$

$$\xi(x,y) = -\frac{\partial N}{\partial x}; \quad \eta(x,y) = -\frac{\partial N}{\partial y} \quad (10.6-2)$$

Nach [Moritz, 1980a, Kap. 22] gilt für die Schwereanomalie in ebener Approximation:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} \quad (10.6-3)$$

Aus dem Ansatz für Φ_{NN} und obigen Beziehungen lassen sich alle Auto- und Kreuzkorrelationen berechnen:

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi N}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \Phi_{NN}(x,y) \\ \Phi_{\eta N}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \Phi_{NN}(x,y) \\ \Phi_{\xi\eta}(x,y) &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi_{NN}(x,y) \\ \Phi_{\xi\xi}(x,y) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_{NN}(x,y) \\ \Phi_{\eta\eta}(x,y) &= -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_{NN}(x,y) \end{aligned} \quad (10.6-4)$$

$$\Phi_{\xi\xi}(x,y) + \Phi_{\eta\eta}(x,y) = \frac{1}{g_0} \Phi_{gg}(x,y) \quad (10.6-5)$$

(entspricht $\Delta\Phi_{NN} = 0$!)

(Δ = Laplace Operator)

Die übrigen Funktionen, die die Schwere enthalten, Φ_{Ng} , $\Phi_{g\xi}$, $\Phi_{g\eta}$, sind nicht mehr so einfach herleitbar und führen im Falle des Markov-Modells 3. Ordnung auf modifizierte Besselfunktionen, die auch einen beträchtlichen Rechenaufwand bedeuten.

Die Matrix $C_{s's}$ sieht damit folgendermassen aus:

$$\begin{array}{c}
 \text{Stützwert} \rightarrow \xi_1 \quad \eta_1 \quad g_1 \quad N_1 \quad \dots \quad g_n \quad N_n \\
 \\
 \begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \\ g_1 \\ N_1 \\ \vdots \end{array} \left[\begin{array}{cccccc}
 \Phi_{\xi_1\xi_1} & \Phi_{\xi_1\eta_1} & \Phi_{\xi_1g_1} & \Phi_{\xi_1N_1} & \dots & \Phi_{\xi_1g_n} & \Phi_{\xi_1N_n} \\
 \Phi_{\eta_1\xi_1} & \Phi_{\eta_1\eta_1} & \Phi_{\eta_1g_1} & \Phi_{\eta_1N_1} & \dots & \Phi_{\eta_1g_n} & \Phi_{\eta_1N_n} \\
 \Phi_{g_1\xi_1} & \Phi_{g_1\eta_1} & \Phi_{g_1g_1} & \Phi_{g_1N_1} & \dots & \Phi_{g_1g_n} & \Phi_{g_1N_n} \\
 \Phi_{N_1\xi_1} & \Phi_{N_1\eta_1} & \Phi_{N_1g_1} & \Phi_{N_1N_1} & \dots & \Phi_{N_1g_n} & \Phi_{N_1N_n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right] \\
 \uparrow \\
 \text{zu berechnen}
 \end{array}$$

Die Funktionen sind zu berechnen für die Koordinatendifferenzen Δx und Δy zwischen den jeweiligen Stützpunktkoordinaten 1 ... n.

$C_{n'n}$ entspricht der normalerweise in der Ausgleichsrechnung verwendeten diagonalen Kovarianzmatrix der "Beobachtungs-Varianzen":

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \sigma_{\xi_1}^2 & & & & & \\
 & \sigma_{\eta_1}^2 & & & & \\
 & & \sigma_{g_1}^2 & & & \\
 & & & \sigma_{N_1}^2 & & \\
 & & & & \dots & \\
 & & & & & \sigma_{g_n}^2 \\
 & & & & & & \sigma_{N_n}^2
 \end{array} \right]$$

Mit diesen beiden Matrizen wird die $C_{\ell\ell} = \mathbf{D}$ Matrix aufgestellt, invertiert und daraus der Vektor

$$\mathbf{k} = \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{A} \mathbf{x})$$

berechnet. Jetzt ist es möglich, in jedem beliebigen Ebenen-Punkt (x,y) des durch die Stützpunkte begrenzten Gebietes das Signal s zu berechnen.

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot \Phi_{\xi v}(x-x_i, y-y_i) & v = \xi, \eta, g, N \\ & & \text{je nach Stützwert} \\ \eta(x,y) &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot \Phi_{\eta v}(x-x_i, y-y_i) \\ g(x,y) &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot \Phi_{g v}(x-x_i, y-y_i) & (10.6-6) \\ N(x,y) &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot \Phi_{N v}(x-x_i, y-y_i) \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung werden folgende Sachverhalte anschaulich klar: Alle vier Schwerefeldgrößen können als *Funktion* von x und y dargestellt werden. Als Funktionen treten die Kovarianzfunktionen auf. Die k_i sind skalare Werte, die dem Stützpunkt i mit den Koordinaten x_i, y_i zugeordnet sind. Demselben Stützpunkt i können bis zu vier unabhängige k_i zugeordnet werden, wenn dort alle vier Größen beobachtet sind.

Wenn wir ausgehen von der Formel für N :

$$N(x,y) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \begin{cases} \Phi_{NN}(x-x_i, y-y_i) & \text{wenn } N \text{ beobachtet ist} \\ \Phi_{N\xi}(x-x_i, y-y_i) & \text{wenn } \xi \text{ beobachtet ist} \\ \Phi_{N\eta}(x-x_i, y-y_i) & \text{wenn } \eta \text{ beobachtet ist} \\ \Phi_{Ng}(x-x_i, y-y_i) & \text{wenn } g \text{ beobachtet ist} \end{cases} \quad (10.6-7)$$

dann muss sinnvollerweise gelten:

$$\xi(x,y) = -\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi_{N\xi}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi_{N\eta}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi_{Ng}}{\partial x} \end{array} \right\} (x-x_i, y-y_i) \left\{ \begin{array}{l} N \text{ beobachtet} \\ \xi \text{ beobachtet} \\ \eta \text{ beobachtet} \\ g \text{ beobachtet} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{i=1}^n k_i \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\xi N} \\ \Phi_{\xi \xi} \\ \Phi_{\xi \eta} \\ \Phi_{\xi g} \end{array} \right\} (x-x_i, y-y_i) \left\{ \begin{array}{l} N \text{ beobachtet} \\ \xi \text{ beobachtet} \\ \eta \text{ beobachtet} \\ g \text{ beobachtet} \end{array} \right. \quad (10.6-8)$$

analog für η .

Für g gilt dasselbe, nur verwendet man hier (da im ebenen Falle nicht nach z abgeleitet werden kann) Differentialgleichungen, die die Zusammenhänge wiedergeben.

Wenn also die 4 Funktionen Φ_{NN} , $\Phi_{N\xi}$, $\Phi_{N\eta}$ und Φ_{Ng} , die zusammen $N(x,y)$ bestimmen, gegeben sind, so können die andern durch Ableitungen gefunden werden. Damit die gemischten Funktionen (allenfalls bis auf das Vorzeichen) wie $\Phi_{N\xi} = -\Phi_{\xi N}$ oder $\Phi_{\xi\eta} = \Phi_{\eta\xi}$ etc. identisch sind, können bereits die Funktionen $\Phi_{N\xi}$, $\Phi_{N\eta}$ und Φ_{Ng} aus Φ_{NN} durch Ableitung gewonnen werden.

10.7 Das vollständige Markov-Modell 3. Ordnung

Als Beispiel für ein selbstkonsistentes Modell zur Schwerefeldbestimmung ist hier das Markov-Modell 3. Ordnung aufgeführt. Dieses Modell wurde ins später beschriebene Programm HITCOL (s. Kapitel 10.11) aufgenommen. Zum Markov-Modell 3. Ordnung vgl. [Jordan, 1972], die dazu notwendigen Besselfunktionen können in [Sneddon, 1963] nachgeschlagen werden.

$$\Phi_{NN}(r) = \sigma_N^2 \left(1 + \frac{r}{d} + \frac{r^2}{3d^2}\right) e^{-\frac{r}{d}}$$

$$\Phi_{N\xi} = -\sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-\frac{r}{d}} \Delta x \quad \Phi_{N\eta} = -\sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-\frac{r}{d}} \Delta y$$

$$\Phi_{\xi\eta} = -\sigma_\varepsilon^2 \frac{\Delta x \Delta y}{d^2} e^{-\frac{r}{d}}$$

$$\Phi_{\xi\xi} = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{\Delta x^2}{d^2}\right) e^{-\frac{r}{d}} \quad \Phi_{\eta\eta} = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{\Delta y^2}{d^2}\right) e^{-\frac{r}{d}}$$

$$\Phi_{gg} = \sigma_g^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{2d^2}\right) e^{-\frac{r}{d}}$$

Dazu gilt:

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\sigma_N}{\sqrt{3} d} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{2} g_0}$$

$$\Phi_{Ng} = \Phi_{gN} = \frac{2 \sigma_N \sigma_g}{\sqrt{6}} \left\{ \frac{r}{2d} \left(1 - \frac{r^2}{2d^2}\right) \cdot \left[I_0\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) - I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_0\left(\frac{r}{2d}\right) \right] + \frac{r^2}{4d^2} \cdot \left[I_0\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_0\left(\frac{r}{2d}\right) + I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) \right] \right\}$$

$$\Phi_{\xi g} = -\Phi_{g\xi} = \frac{3 \sigma_\xi \sigma_g}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\Delta x}{d} \cdot I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) - \frac{r^2 \Delta x}{12 d^3} \left[3 I_0\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_0\left(\frac{r}{2d}\right) - 2 I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) - I_2\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_2\left(\frac{r}{2d}\right) \right] \right\}$$

$$\Phi_{\eta g} = -\Phi_{g\eta} = \frac{3 \sigma_\eta \sigma_g}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\Delta y}{d} \cdot I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) - \frac{r^2 \Delta y}{12 d^3} \left[3 I_0\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_0\left(\frac{r}{2d}\right) - 2 I_1\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_1\left(\frac{r}{2d}\right) - I_2\left(\frac{r}{2d}\right) \cdot K_2\left(\frac{r}{2d}\right) \right] \right\}$$

Die $I_n(x)$ und $K_n(x)$ bezeichnen die modifizierten Besselfunktionen für ganzzahlige $n \geq 0$.

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^r}{r! \cdot (r+n)!}$$

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} \cdot I_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^r +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{-x}{2}\right)^n \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^r}{r! (r+n)!} \cdot \left(\sum_{s=1}^r \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{r+n} \frac{1}{s} \right) \right]$$

mit $\gamma = \text{Euler'sche Konstante} = 0.577215665\dots$

10.8 Bisherige Arbeiten mit Kollokation in der Schweiz

In der Schweiz wurde die Methode der Kollokation bereits verschiedentlich mit Erfolg angewendet. Zum Zwecke der astrogeodätischen Geoidbestimmung der Schweiz wurde sie in [Gurtner, 1978] mit dem Markov-Modell 3. Ordnung angesetzt. Verwendet wurden alle verfügbaren Lotabweichungskomponenten in einem Ansatz ohne Schätzung von Trendparametern und ohne Einbezug von Schwereanomalien.

[Bürki, 1979] beschreibt die Anwendung der Kollokation auf Teilkreisuntersuchungen an Theodoliten.

[Wunderlin, 1987] wendet die Kollokation zur Refraktionsbestimmung an. Die Korrelation zwischen zwei Höhenwinkelbeobachtungen kann dabei nicht als einfache Funktion des Ortes angesetzt werden, sie wird aus Einflüssen des Wetters (Besonnung, Niederschlag und Windstärke), der Topographie und der Beobachtungszeit nach einer Formel abgeleitet, in die sehr viel Erfahrung eingeflossen ist.

[Marti, 1988] wiederholte die Anwendung der Kollokation auf die astrogeodätische Geoidbestimmung nach dem Ansatz von Gurtner und führte erste Versuche zum Einbeziehen von Schwereanomalien durch. Aus seinem Bericht stammt die übersichtliche Zusammenstellung des vollständigen Markov-Modells 3. Ordnung in Kapitel 10.7.

10.9 Wo liegt der Erfolg der multivariaten Kollokation?

Ähnlich wie bei einer Reihenentwicklung, sei es in Polynome oder in Fourierreihen, werden bei der multivariaten Prädiktion Basisfunktionen zur Verfügung gestellt und die dazugehörigen Koeffizienten so bestimmt, dass die Differenzen in den Stützpunkten zwischen Messung und approximiertem Wert minimal werden. Es gibt aber doch einige Unterschiede zwischen den Verfahren: Bei der Reihenentwicklung wird die Anzahl der zur Verfügung gestellten Funktionen durch Erhöhung des Grades gesteuert. Bei der Entwicklung im Zwei- oder Dreidimensionalen erhöht sich die Anzahl jeweils um eine gewisse Anzahl Funktionen, man nimmt entweder alle oder keine vom entsprechend höheren Grad. Mit der Erhöhung des Grades verringert sich die Wellenlänge der neu dazukommenden Funktionen, damit wird die Auflösung besser. Die Verteilung der Beobachtungen hat keinen Einfluss auf die einzelne Basisfunktion, sie hat denselben Ursprung und denselben Definitionsbereich wie die übrigen auch.

Beim Verfahren der multivariaten Prädiktion ist die Anzahl der unabhängigen Basisfunktionen fest vorgegeben (bei der Anwendung auf das Störpotential der Physikalischen Geodäsie z.B. 16). Es wird für alle zusammen ein Parameter festgelegt, der die Wellenlänge der Funktion bestimmt. Damit wird die Entwicklung an die mittlere Anzahl und Verteilung der Beobachtungen, also an deren Maschenweite, angepasst. Nun wird für jede einzelne Beobachtung *genau eine* Funktion des zugehörigen Beobachtungstypes mit Ursprung im Beobachtungsstandort angesetzt und ein Koeffizient dazu bestimmt. Jede einzelne Funktion kann damit mehrfach genau gleich verwendet werden, nur ihr Ursprung wird transliert. Damit passen sich die angesetzten Funktionen in optimaler Weise der Beobachtungsverteilung an. Wo dichter beobachtet wurde, werden mehr Funktionen angesetzt, wo Löcher sind hingegen keine. Die Art der gewählten Funktionen ist so, dass sie in einer gewissen Punktumgebung wirken, mit grossem Punktabstand hingegen gegen Null konvergieren. Damit wird das bei Reihenentwicklungen auftretende Ausschwingen der Funktionswerte zwischen den Stützwerten vermieden. Die Anzahl der zu bestimmenden Parameter entspricht gerade der Anzahl der Beobachtungen, womit keine Probleme mit Graderhöhungen auftreten können. Diese Gründe sprechen bei lokalen Geoidbestimmungen mit nur einer beschränkten Anzahl von Beobachtungen eindeutig für den Einsatz der Prädiktion und gegen eine Reihenentwicklung im üblichen Sinne. Die i -te Zeile der $C_{s's'}$ - Matrix entspricht dem Anteil, den die für die Beobachtung i angesetzte Funktion in allen andern Beobachtungsorten auf die entsprechende Beobachtung (die natürlich nicht vom gleichen Beobachtungstyp wie die Beobachtung i selbst sein muss!) hat.

Diese Aussagen werden gestützt durch [Denker, 1987], der sagt, dass die Kollokation am wenigsten Probleme mit Beobachtungen hat, die nicht in einem regelmässigen Gitter

gegeben sind. Nach [Moritz, 1980a, Kap. 12] müsste, um z.B. die Kovarianzfunktion $\Phi(P,Q)$ des Störpotentials T *exakt* zu bestimmen, dieses als Funktion $T(\theta,\lambda)$ über die ganze Erde bekannt sein. Die verwendete *empirische* Kovarianzfunktion (von der es unendlich viele gibt) ist ein analytischer Ausdruck, der auf die gegebenen diskreten Daten angepasst ist. Man kann damit ein Gravitationsfeld erhalten, das mit den Beobachtungen konsistent ist. Dies ist Motivation genug, um eine möglichst einfache Kovarianzfunktion zu suchen.

10.10 Vorschlag für einen neuen Ansatz der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen

Die in [Shaw et al., 1969], [Jordan, 1972] und [Kasper, 1971] vorgestellten Modelle vermögen nicht vollständig zu befriedigen:

- Durch den zweidimensionalen Ansatz des eigentlich dreidimensionalen Problems wird die Herleitung und spätere Berechnung der Funktionen, die ein g enthalten, umfangreich und aufwendig und für einen Nichtmathematiker praktisch nicht mehr nachvollziehbar.
- Für die gute Interpolierbarkeit der Beobachtungen setzen wir voraus, dass sie mindestens um ein Topographiemodell reduziert worden sind. Wir können deshalb im Beobachtungsgebiet bis auf Meereshöhe hinunter in erster Näherung davon ausgehen, dass der Raum materiefrei ist und damit die Laplacesche Differentialgleichung gültig ist. In obenerwähnten Modellen wird dies für Φ_{NN} erzwungen über den Ansatz für Φ_{gg} (vgl. 10.6-5). Wie wir in 10.6-7 gesehen haben, setzt sich die funktionale Darstellung von $N(x,y)$ aus der Summe über 4 Basisfunktionen zusammen, so dass auch für $\Phi_{\xi N}$, $\Phi_{\eta N}$ und $\Phi_{g N}$ nachgewiesen werden müsste, dass sie harmonisch sind.

Aus diesen Gründen machte ich mich auf die Suche nach einer homogenen und isotropen Autokovarianzfunktion (der Situation besser angepasst vorläufig im dreidimensionalen Raum!), die wenn möglich die harmonische Darstellung von $T(x,y,z)$ ermöglicht. Wir wählen das Kugelkoordinatensystem, da hier isotrope Funktionen natürlicherweise dargestellt werden können.

Ausgehend von der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (10.10-1)$$

verlangen wir Isotropie, was bedeutet, dass die Terme und Ableitungen nach θ und λ verschwinden. Es bleibt eine einfache Differentialgleichung 2. Grades in r :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{die als Lösung } T = \frac{1}{r} \text{ hat.} \quad (10.10-2)$$

Dies wäre eine sehr schöne Funktion für Φ_{NN} , von der wir wissen, dass sie harmonisch ist. Ebenfalls könnte sie physikalisch interpretiert werden als die Summe der Wirkungen (Potential) von Punktmassen, die jeweils im Beobachtungspunkt liegen. Der Nachteil liegt darin, dass die Funktion und ihre Ableitungen im Beobachtungspunkt einen Pol haben. Wir können diese Unschönheit umgehen, indem wir uns die Punktmasse nicht im Beobachtungspunkt selbst denken, sondern um einen konstanten Betrag B in die Tiefe versetzt.

$$\Phi_{TT}(x, y, z) = \sigma_T^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 + B)^2}{B^2}}} \quad (10.10-3)$$

σ_T ist die Autokovarianz des Störpotentials T . Die Funktion wurde so angesetzt, dass

$$\Phi_{TT}(x_0, y_0, z_0) = \sigma_T^2$$

Für die weiteren Herleitungen benötigen wir noch folgende Ableitungen:

$$r = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 + B)^2}{B^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = +\frac{1}{r} \frac{(x - x_0)}{B^2}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = +\frac{1}{r} \frac{(y - y_0)}{B^2}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = +\frac{1}{r} \frac{(z - z_0 + B)}{B^2}$$

und die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{T}{g_{\text{Norm}}} \quad (\text{Theorem von Bruns}); \\
 \xi &= -\frac{\partial N}{\partial x}; \quad \eta = -\frac{\partial N}{\partial y}; \quad \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} = -g_{\text{Norm}} \frac{\partial N}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{10.10-4}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{NN} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r} \\
 \Phi_{N\xi} &= +\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial x} = -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(x-x_0)}{B^2} \\
 \Phi_{N\eta} &= +\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial y} = -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(y-y_0)}{B^2} \\
 \Phi_{Ng} &= -\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial z} g_{\text{Norm}} = g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(z-z_0+B)}{B^2}
 \end{aligned}
 \tag{10.10-5}$$

Dies sind die 4 Basisfunktionen, mit denen wir N darstellen wollen. Die weiteren Grössen können daraus durch Ableitung erhalten werden:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\xi N} &= -\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial x} = \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(x-x_0)}{B^2} \\
 \Phi_{\xi\xi} &= -\frac{\partial \Phi_{N\xi}}{\partial x} = -3\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \left(\frac{(x-x_0)}{B^2} \right)^2 + \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{B^2} = \\
 &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{1}{B^2} - \frac{3}{r^2} \cdot \left(\frac{(x-x_0)}{B^2} \right)^2 \right) \\
 \Phi_{\xi\eta} &= -\frac{\partial \Phi_{N\eta}}{\partial x} = -3\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{B^4} \\
 \Phi_{\xi g} &= -\frac{\partial \Phi_{Ng}}{\partial x} = g_{\text{Norm}} \cdot 3\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x-x_0)(z-z_0+B)}{B^4} \\
 \Phi_{\eta N} &= -\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial y} = \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(y-y_0)}{B^2} \\
 \Phi_{\eta\xi} &= -\frac{\partial \Phi_{N\xi}}{\partial y} = -3\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{B^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\eta g} &= -\frac{\partial \Phi_{Ng}}{\partial y} = g_{\text{Norm}} \cdot 3 \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(y - y_0)(z - z_0 + B)}{B^4} & (10.10-6) \\
\Phi_{\eta \eta} &= -\frac{\partial \Phi_{N\eta}}{\partial y} = \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{1}{B^2} - \frac{3}{r^2} \cdot \left(\frac{(y - y_0)}{B^2} \right)^2 \right) \\
\Phi_{gN} &= -\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial z} = g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(z - z_0 + B)}{B^2} \\
\Phi_{g\xi} &= -\frac{\partial \Phi_{N\xi}}{\partial z} = -3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x - x_0)(z - z_0 + B)}{B^4} \\
\Phi_{g\eta} &= -\frac{\partial \Phi_{N\eta}}{\partial z} = -3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(y - y_0)(z - z_0 + B)}{B^4} \\
\Phi_{gg} &= -\frac{\partial \Phi_{Ng}}{\partial z} = g_{\text{Norm}}^2 \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{3}{r^2} \left(\frac{(z - z_0 + B)}{B^2} \right)^2 - \frac{1}{B^2} \right)
\end{aligned}$$

Es ist bereits bekannt, dass $\Delta \frac{1}{r} = 0$, also $\Delta \Phi_{NN} = 0$.

Damit $N(x, y, z)$ harmonisch ist, müssen auch $\Delta \Phi_{N\xi} = 0$, $\Delta \Phi_{N\eta} = 0$ und $\Delta \Phi_{Ng} = 0$ sein.

Nach einem Satz aus der Potentialtheorie sind sämtliche partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung einer harmonischen Funktion im selben Regularitätsbereich wiederum harmonische Funktionen. Zum Beispiel:

$$\Delta \left(\Phi_{N\xi} \right) = \Delta \left(\frac{\partial \Phi_{NN}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \Phi_{NN} \right) = 0$$

Die partielle Ableitung und die Ableitungen des Laplace Operators dürfen vertauscht werden. $\Phi_{N\xi}$, $\Phi_{N\eta}$ und Φ_{Ng} sind gemäss (10.10-5) partielle Ableitungen der harmonischen Funktion Φ_{NN} .

Damit ist nachgewiesen, dass mit unserem Ansatz

$N(x, y, z)$ harmonisch dargestellt wird.

Mit diesem Ansatz sind die am Anfang des Kapitels aufgeführten Punkte verbessert bzw. erfüllt. Sämtliche Formeln sind denkbar einfach zu berechnen.

Wir können noch die beiden Bedingungen 10.5-4 und 10.5-5 an die Kovarianzfunktionen kontrollieren:

$$1. \quad -\infty < \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi_{NN}(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} < 0$$

$$\frac{\partial \Phi_{NN}(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} = -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} = -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3}$$

$r \rightarrow 0$ bedeutet bei uns $(x - x_0) \rightarrow 0$, $(y - y_0) \rightarrow 0$ und $(z - z_0) \rightarrow 0$, wo r der räumliche Abstand der beiden betrachteten Punkte ist. Unser r im Ansatz der Kovarianzfunktion geht dann gegen 1.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi_{NN}(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} = -\sigma_N^2 < 0 \text{ ist also erfüllt}$$

2. $\frac{\partial \Phi_{gg}}{\partial r}$ soll in $x_0, y_0 = 0$ sein, d.h. Φ_{gg} soll dort extremal sein: wir kontrollieren das in x- und y-Richtung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{gg}] &= -\sigma_N^2 \cdot g_{\text{Norm}}^2 \left(\frac{z - z_0 + B}{B^2} \right)^2 \cdot 15 \cdot \frac{1}{r^7} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^2} \\ &+ \sigma_N^2 \cdot g_{\text{Norm}}^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{r^5 B^2} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\partial \Phi_{gg}}{\partial x} \right] = 0, \quad \text{analog} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\frac{\partial \Phi_{gg}}{\partial y} \right] = 0.$$

Damit ist auch diese Bedingung erfüllt.

Eine Schwierigkeit ergibt sich aus dem dreidimensionalen Ansatz unserer Kovarianzfunktionen:

$$r = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 + B)^2}{B^2}}$$

Dies entspreche der Distanz von P_0 nach P . Aus Symmetriegründen müsste die Distanz von P nach P_0 identisch sein, ist es aber nicht, da $(z - z_0 + B)^2 \neq (z_0 - z + B)^2$. Diese Schwierigkeit können wir umgehen, indem wir jetzt wieder auf das Zweidimensionale zurückgehen, also die z -Komponente aus den Gleichungen entfernen, indem wir $z_0 = z$ setzen. In Abänderung zu den Formeln (10.10-6) erhalten wir dadurch:

$$r = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + B^2}{B^2}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{NN} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r} & \Phi_{N\xi} &= -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^2} \\ \Phi_{N\eta} &= -\sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(y - y_0)}{B^2} & \Phi_{Ng} &= g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{B} \\ \Phi_{\xi N} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^2} & \Phi_{\xi\xi} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{1}{B^2} - \frac{3}{r^2} \cdot \left(\frac{(x - x_0)}{B^2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

(10.10-7)

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi\eta} &= -3 \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{B^4} & \Phi_{\xi g} &= 3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^3} \\ \Phi_{\eta N} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{(y - y_0)}{B^2} & \Phi_{\eta\xi} &= -3 \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{B^4} \\ \Phi_{\eta g} &= 3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(y - y_0)}{B^3} & \Phi_{\eta\eta} &= \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{1}{B^2} - \frac{3}{r^2} \cdot \left(\frac{(y - y_0)}{B^2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\Phi_{gN} = g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{B}$$

$$\Phi_{g\xi} = -3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(x - x_0)}{B^3}$$

$$\Phi_{g\eta} = -3 g_{\text{Norm}} \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{(y - y_0)}{B^3}$$

$$\Phi_{gg} = g_{\text{Norm}}^2 \cdot \sigma_N^2 \cdot \frac{1}{r^3 B^2} \cdot \left(\frac{3}{r^2} - 1 \right)$$

Dadurch haben sich die Formeln weiter vereinfacht, wenn auch auf Kosten einer dreidimensionalen Behandlung des Störpotentials.

Auf der nächsten Doppelseite sind in Abb. 10.10-1 obige Kovarianzfunktionen in einer räumlichen Darstellung zusammengestellt, während sie auf der übernächsten Doppelseite in den Abb. 10.10-2 und 10.10-3 als Funktionen des reduzierten Abstandes denjenigen des Markov-Undulationsmodells 3. Ordnung (Kap. 10.7) gegenübergestellt sind. Die beiden Modelle weisen eine verblüffende Ähnlichkeit auf.

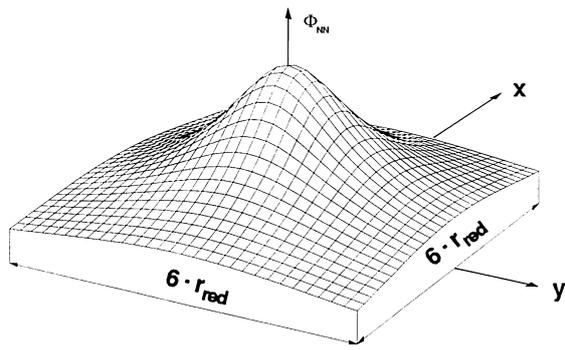
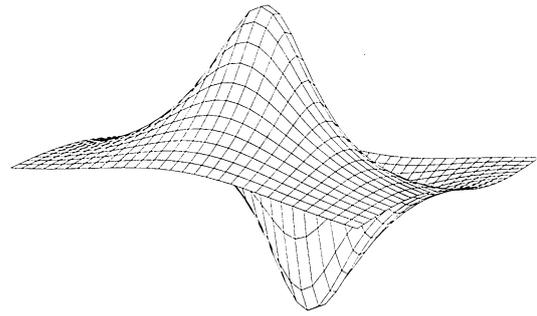
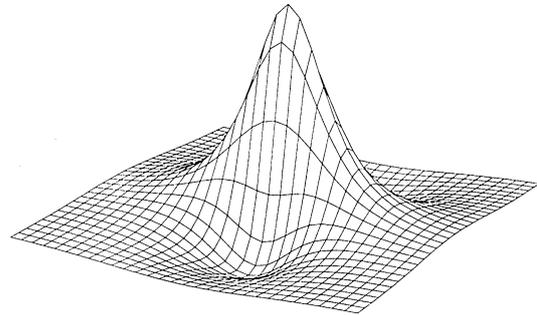
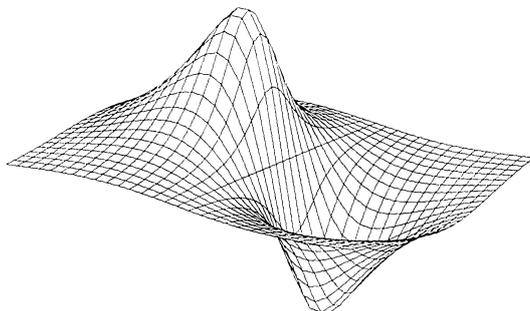
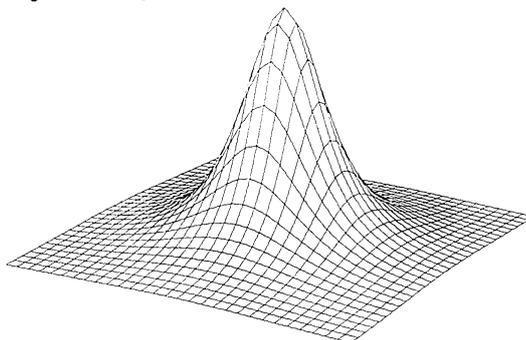
Φ_{NN}  $\Phi_{N\xi} = -\Phi_{\xi N}$  $\Phi_{\xi\xi}$ 

Abb.10.10-1: Darstellung der Kovarianzfunktionen aus Kapitel 10.10

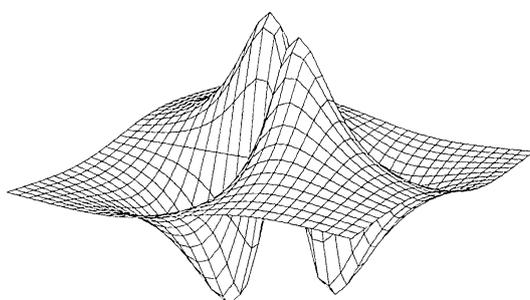
$$\Phi_{N\eta} = -\Phi_{\eta N}$$



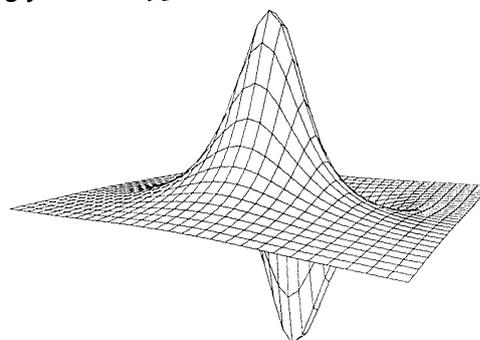
$$\Phi_{gN} = \Phi_{Ng}$$



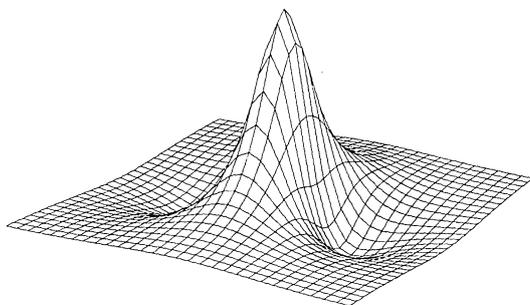
$$\Phi_{\xi\eta} = \Phi_{\eta\xi}$$



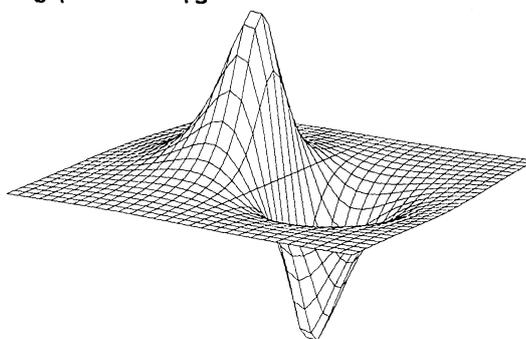
$$\Phi_{g\xi} = -\Phi_{\xi g}$$



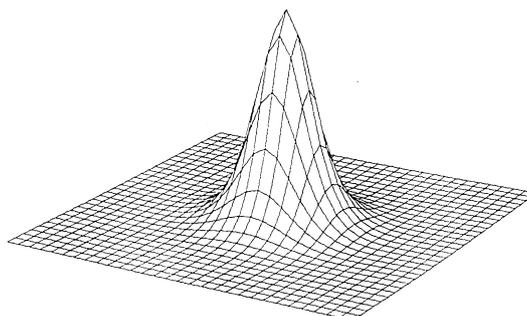
$$\Phi_{\eta\eta}$$



$$\Phi_{g\eta} = -\Phi_{\eta g}$$



$$\Phi_{gg}$$



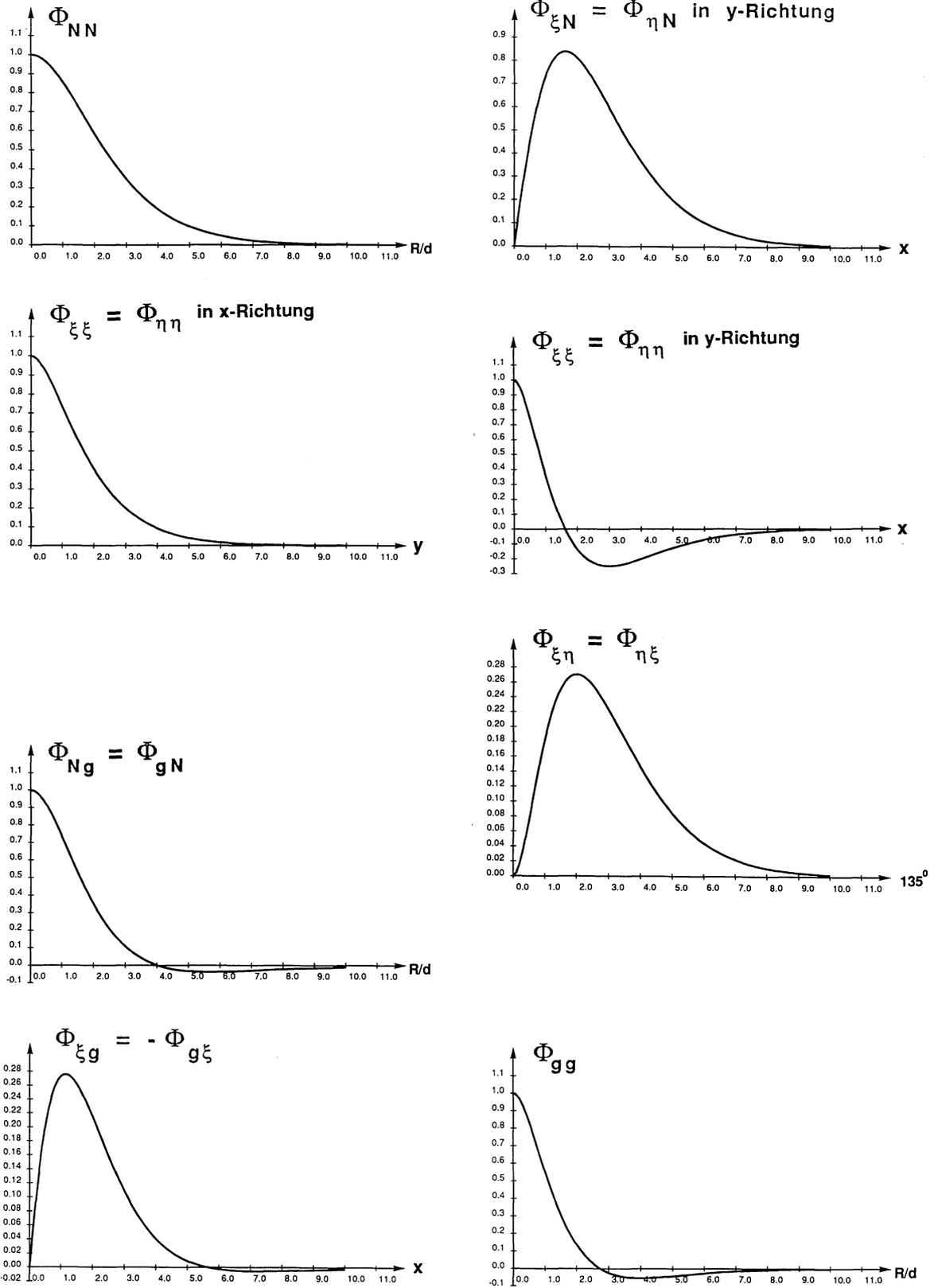


Abb.10.10-2: Die Kovarianzfunktionen des Markov Modells 3. Ordnung (Kap.10.7)

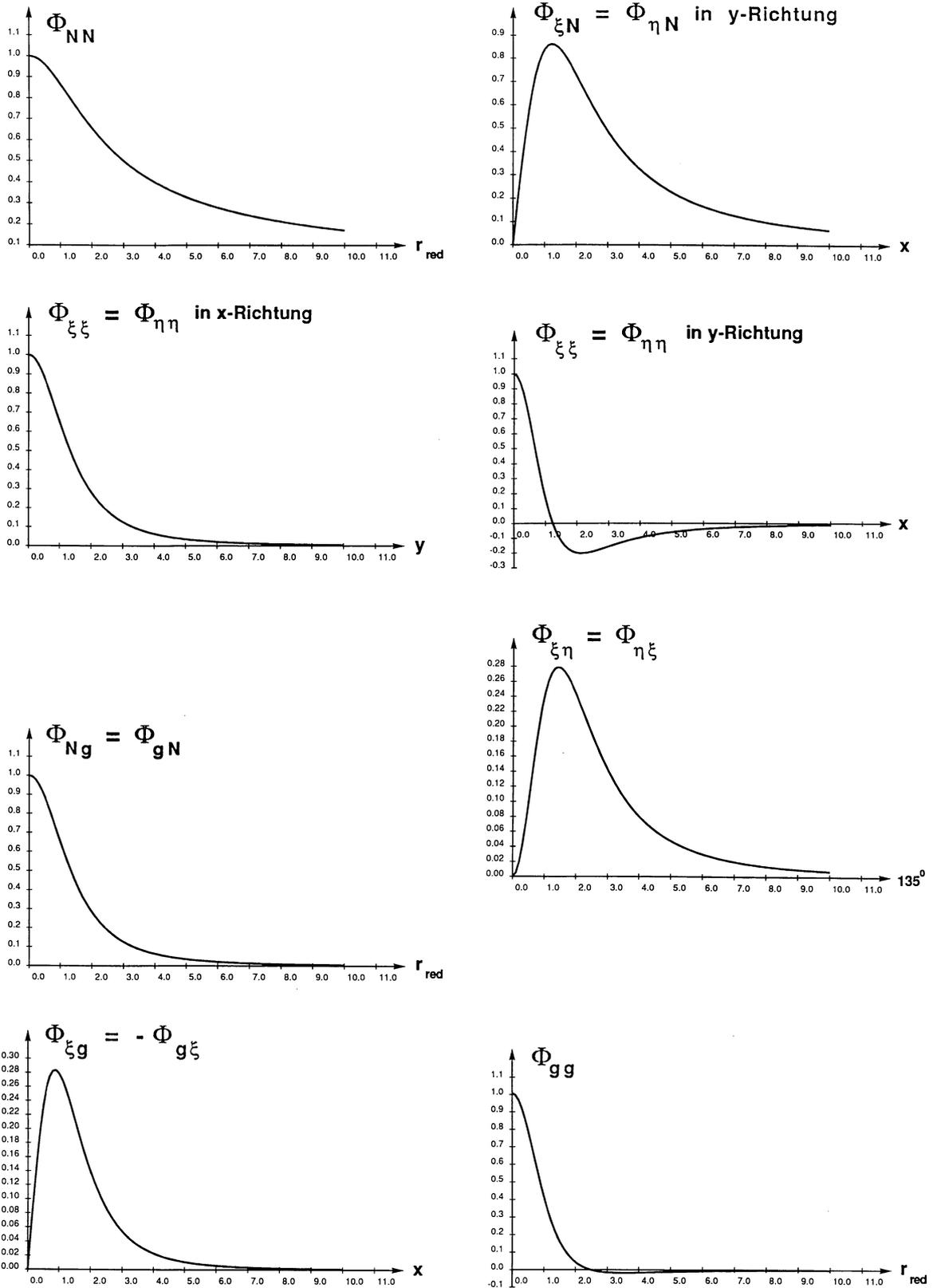


Abb.10.10-3: Die Kovarianzfunktionen des Kapitels 10.10 sind äusserst ähnlich zum Markov Modell 3. Ordnung.

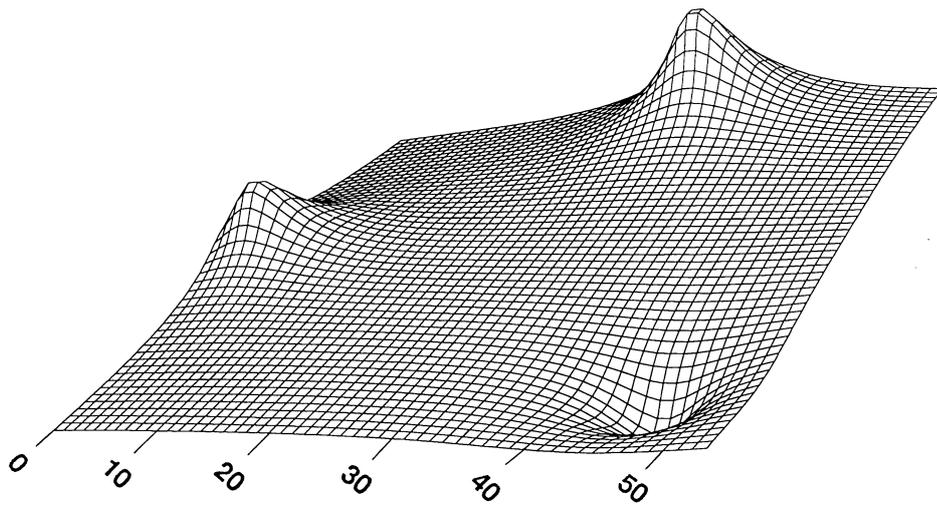
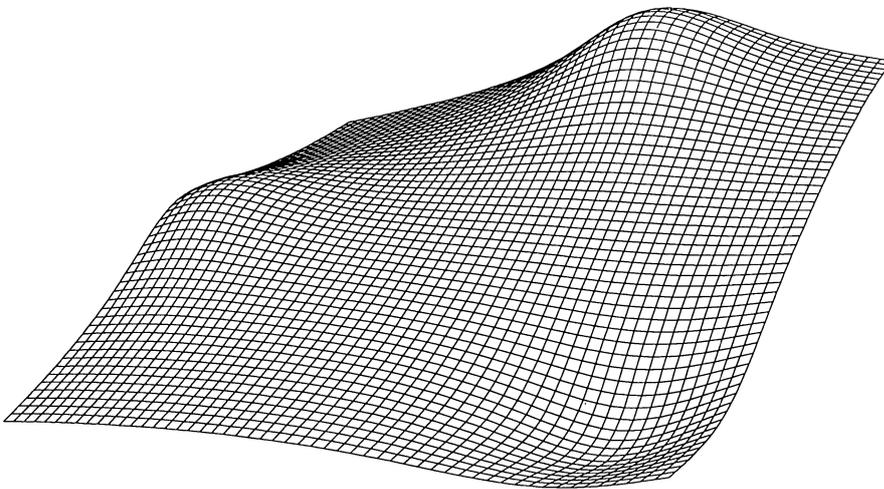
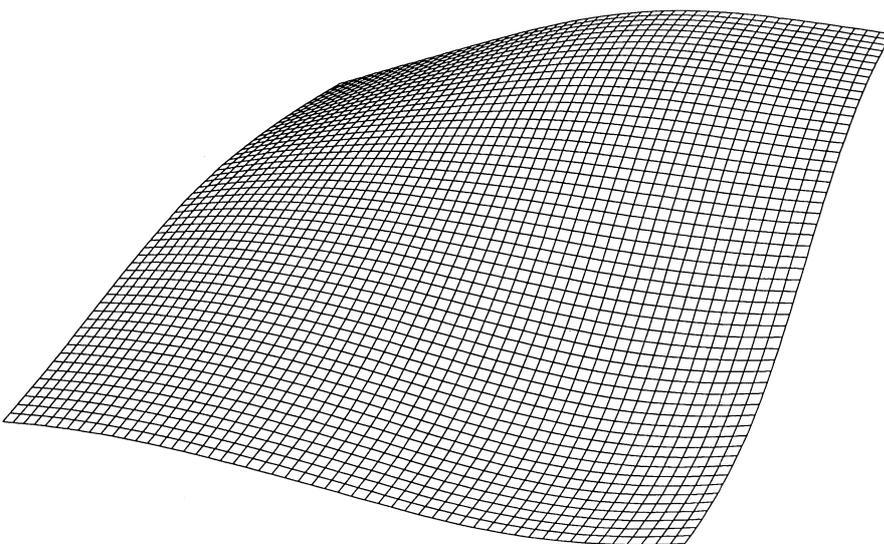
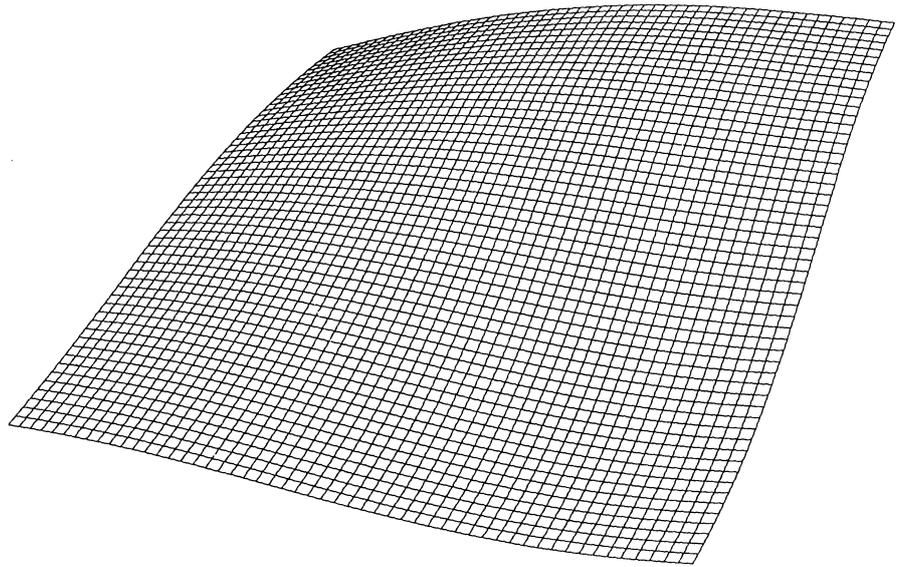
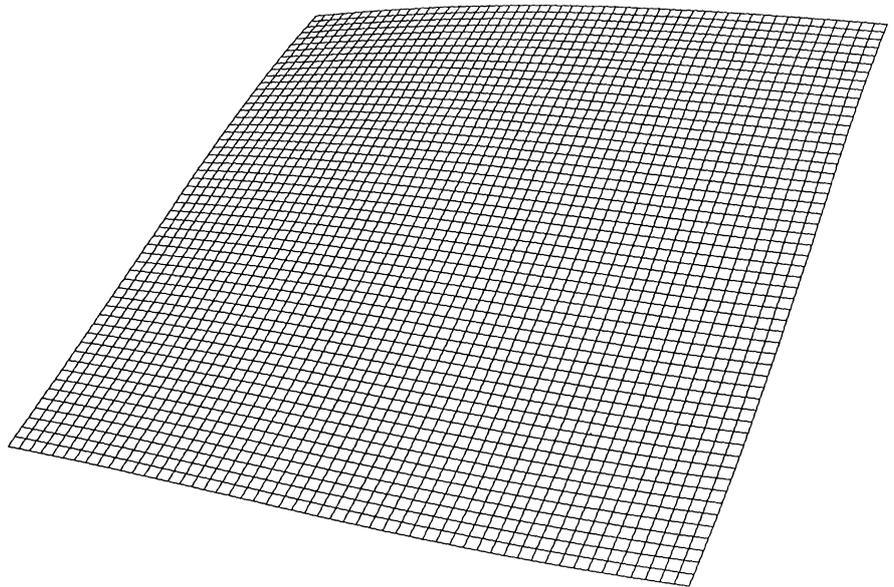
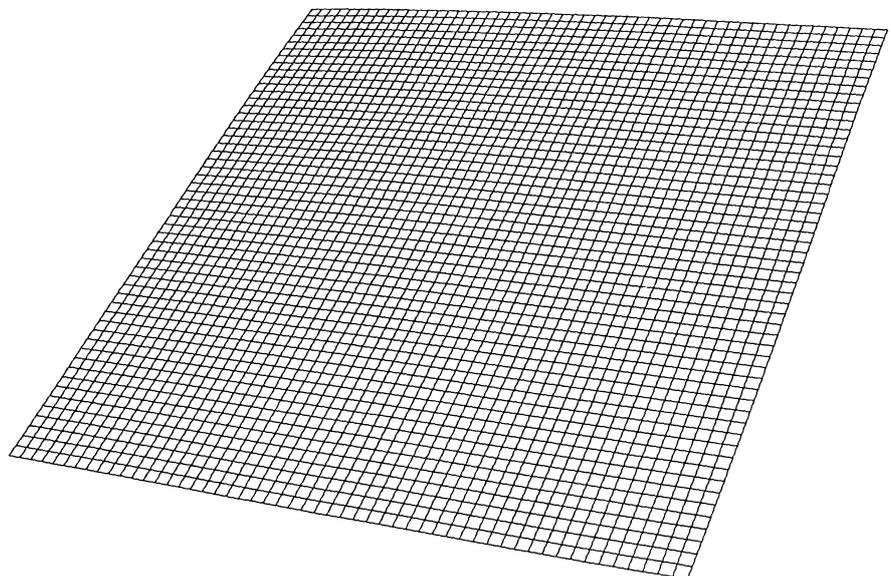
**B = 3****B = 9****B = 27**

Abb10.10-4: Die Art der Interpolation des Geoides aus drei beobachteten Geoidhöhen mit Kollokation bei Änderung des Parameters B .

B = 45**B = 90****B = 180**

Die optimale Wahl von B liegt bei 45, was etwa dem gegenseitigen Abstand der Beobachtungen entspricht.

Um den Einfluss des Parameters "charakteristische Distanz" auf die Geoidbestimmung zu illustrieren, wurde ein Beispiel mit verschiedenen Ansätzen dafür durchgerechnet und die resultierenden Flächen dargestellt.

Im Beispiel sind drei Geoidhöhen als bekannt angenommen worden. Gesucht ist das Geoid, das sich mittels Kollokation und Prädiktion daraus berechnen lässt. In Abb. 10.10-4 sind die Resultate der Reihe nach für die charakteristischen Distanzen 3, 9, 27, 45, 90 und 180 dargestellt. Folgende Resultate ergeben sich aus diesen Rechnungen, die hier rein optisch verifiziert werden können:

- a) Wird die charakteristische Distanz wesentlich zu klein gewählt, so findet die Rechnung ohne Probleme eine Lösung, die die Messungen in den Stützpunkten befriedigt. Die Interpolation dazwischen ist jedoch nicht brauchbar ($B = 3$)! Im Beispiel mit $B = 3$ sind die Punkte mit den beobachteten Geoidhöhen schön hervorgehoben.
- b) In einem weiten Bereich spielt dann der Einfluss der charakteristischen Distanz auf die Lösung (In den Stützpunkten) und die Prädiktion (im Innenbereich der Stützpunkte!) keine grosse Rolle mehr, die Resultate sind sehr ähnlich. Die Prädiktionsgenauigkeit wird allerdings mit zunehmender Distanz besser.
- c) Wird die charakteristische Distanz viel zu gross gewählt, so kann keine befriedigende Lösung mehr gefunden werden, der Noise wird zu gross. Damit wird auch die Interpolation in den Zwischenpunkten ungenügend ($B = 180$).

Die charakteristische Distanz steht also in engem Zusammenhang mit dem durchschnittlichen Punktabstand der Stützpunkte. Diese Aussage ist auch in [Moritz, 1980a] zu finden.

Wir können nun nochmals auf die in der Einleitung von Kap. 10 aufgeführte Reduktion der Messwerte um die Modellwirkungen mindestens eines Topographiemodelles zurückkommen. Es wird z.B. in [Rummel, 1984] darauf hingewiesen und mit einem Beispiel illustriert, dass man für die Umsetzung einer *hohen Messgenauigkeit* der Messgrössen in eine *genaue Störpotentialbestimmung* nur zwei Alternativen hat: Entweder man hält die Distanz zwischen den Messstationen sehr kurz oder man versucht, die a priori Varianz der Signale σ_N^2 (vgl. Formeln 10.10-7) zu reduzieren. Dies entspricht einer Glättung des Störpotentials und kann durch Massenmodelle erreicht werden: Ein Vorgehen, das auch von [Moritz, 1983] propagiert wird. Bei gegebener Messpunktverteilung (z.B. aus finanziellen Gründen) entspricht also die Verwendung von Massenmodellen einer Steigerung der Genauigkeit (C_{ss} in Formel 10.4-13 klein halten).

Nachtrag zu Kap. 10.10: Eine genauere Durchsicht der Literatur hat gezeigt, dass der "neue" Ansatz des Kapitels 10.10 natürlich nicht neu ist. In [Moritz, 1980a] wird über den Ansatz der globalen Kovarianzfunktionen und deren analytische Fortsetzung in den Aussenraum für lokale Anwendungen der dreidimensionale Ansatz:

$$\Phi_{TT}(x, y, z) = \frac{\sigma_T^2}{\sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0 + B)^2}{B^2}}} \quad (10.10-8)$$

angegeben. Er unterscheidet sich durch $(z + z_0)$ anstelle von $(z - z_0)$ bei mir. Dadurch wird dieser Ansatz wieder symmetrisch, die Punkte P und P_0 können vertauscht werden, ohne dass sich der Ausdruck dabei verändert. Er hat weiter die Eigenschaft, dass die Varianz des Signales höhenabhängig geworden ist. Für $P = P_0$ ist diese:

$$\sigma_T^2 \frac{B}{(z + z_0) + B}$$

Sie nimmt mit zunehmender Höhe ab. Diese Eigenschaft ist für die analytische Fortsetzung des Störpotentials nach oben von besonderer Bedeutung.

Die Gleichungen 10.10-3, 10.10-5 und 10.10-6 können ohne weiteres übernommen werden, es muss einzig überall $(z - z_0)$ durch $(z + z_0)$ ersetzt werden. Damit hat man die gesuchten sehr einfachen Formeln für die dreidimensionale Behandlung des lokalen Störpotentials zur Verfügung.

Die Bedeutung dieses Ansatzes ist vor allem darin zu sehen, dass über den Höhenbereich zwischen Erdoberfläche und dem Geoid etwas ausgesagt werden kann. Ob dies aber auf alle Fälle besser ist als die Annahme bei der zweidimensionalen Rechnung, dass sich die reduzierten Schwerefeldbeobachtungen mit der Höhe nicht verändern, müsste an ausgesuchten Beispielen nachgewiesen werden. Weiter ist es mit diesem Ansatz nicht möglich, sehr dicht ausgeführte Messungen auf einer Hochebene zu behandeln (z. B. Oberengadin auf 1800 m. ü. M.). Der Zusammenhang zwischen der Maschenweite der Beobachtungen und der charakteristischen Distanz der Kovarianzfunktion spielt nicht mehr, da $(z + z_0)$ das Verhalten der Kovarianzfunktion massgeblich mitbeeinflusst. Die Halbwertslänge der Funktion ist auf dieser Höhe schon über 6000 m!

10.11 Das Programm HITCOL

(Harmonisch Interpoliertes Störpotential mit Kollokation)

Das Programm HITCOL wurde in TurboPascal auf dem Macintosh entwickelt, um das lokale Schwerefeld aus allen relevanten Beobachtungen zu bestimmen (dies sind Lotabweichungen, Schwereanomalien und mit GPS und Nivellement direkt bestimmte Geoidundulationen). Dieselben Grössen können anschliessend in jedem beliebigen Punkt interpoliert (prädiert) werden. Die wichtigsten Werte werden zu Beginn des Programmes als Konstanten festgelegt. Es sind dies die charakteristische Distanz d und die Varianz des Signales des Störpotentials. Daraus werden die Varianzen der Lotabweichungs- und der Schwereanomalien - Signale berechnet. Wahlweise kann mit den Formeln des Kapitels 10.7, dem Markov-Modell 3. Ordnung, gearbeitet werden oder mit dem Ansatz 10.10-7. Da sich die Lotabweichungen auf ein anderes Ellipsoid beziehen als die Schwereanomalien und nochmals auf ein anderes als die GPS-Geoidundulationen, können diese Unterschiede durch folgende Konstanten, die durch Versuche zu bestimmen sind, festgelegt werden:

- X_{inull} : Offset in ξ in ["] gegenüber den Schwereanomalien.
- E_{tnull} : Offset in η in ["] gegenüber den Schwereanomalien.
- D_{gnull} : Offset der Schwereanomalien selbst.
- d_{xi} : Offset zwischen Lotabweichungen und beobachteten Geoidhöhen in ξ -Richtung.
- d_{eta} : Offset zwischen Lotabweichungen und beobachteten Geoidhöhen in η -Richtung.
- N_{null} : Höhenoffset der Geoidundulationen.

Dies bedeutet, dass man im System der Schwereanomalien rechnet, da die beiden anderen Beobachtungstypen einfacher darauf zu transformieren sind.

Die prädierten Geoidhöhen und Lotabweichungen werden schliesslich ins System der Lotabweichungen transformiert, da diese Grössen sicher im jeweiligen Datum der Landesvermessung von Interesse sind. Die Schwereanomalien bleiben im Berechnungssystem. Für Variantenrechnungen kann angegeben werden, welche Beobachtungstypen für die Berechnung herangezogen werden sollen. Wenn von den nicht zu verwendenden Typen trotzdem Beobachtungen vorliegen, so werden sie ignoriert. Es kann angegeben werden, ob für die berechneten Geoidundulationen eine relative innere Genauigkeit zu einem wählbaren Fixpunkt berechnet werden soll oder nicht.

Es ist vorgesehen, die beschriebenen Offsets wahlweise nicht durch Konstanten festzulegen, sondern sie mit dem vollständigen Ansatz 10.4-14 im selben Durchgang als Parameter zu schätzen. Die im nachfolgenden Teil III dargestellten Beispiele wurden mit dem Programm HITCOL gerechnet.

Teil III

11 Anwendungen

11.1 Lokale Geoidbestimmung in Turtmann

Eine der ersten Anwendungen des Programmes HITCOL war die lokale Geoidbestimmung im GPS-Testnetz Turtmann [Schneider et al., 1990]. In einem Gebiet von 5 x 6 km² wurden 10 Stationen astronomisch mit der Transportablen Zenitkamera des IGP bestimmt. Der Vergleich mit den ellipsoidischen Koordinaten lieferte 20 Lotabweichungskomponenten. Die Verteilung der Stationen ist der Abb. 11.1-1 zu entnehmen. Zusätzlich wurden dort 202 Schweremessungen durchgeführt, die in [Bernauer, Geiger, 1986] detailliert dargestellt sind. Die Verteilung dieser gravimetrischen Messstationen ist in Abb. 11.1-2 dargestellt. Alle Beobachtungen wurden um die Einflüsse der Modelle des LAG (Topographie, Moho und Ivrea) reduziert und diese reduzierten Beobachtungen zu einer astrogeodätisch-gravimetrischen Geoidbestimmung herangezogen. Verwendet wurde das Markov-Undulationsmodell 3. Ordnung und das in diesem Bericht dargestellte 1/r-Modell. Beide Modelle liefern praktisch identische Resultate und Genauigkeiten. Der Vorteil des 1/r-Modelles liegt in einer wesentlich kürzeren Berechnungszeit.

Folgende Angaben stammen aus den Programm-Outputs:

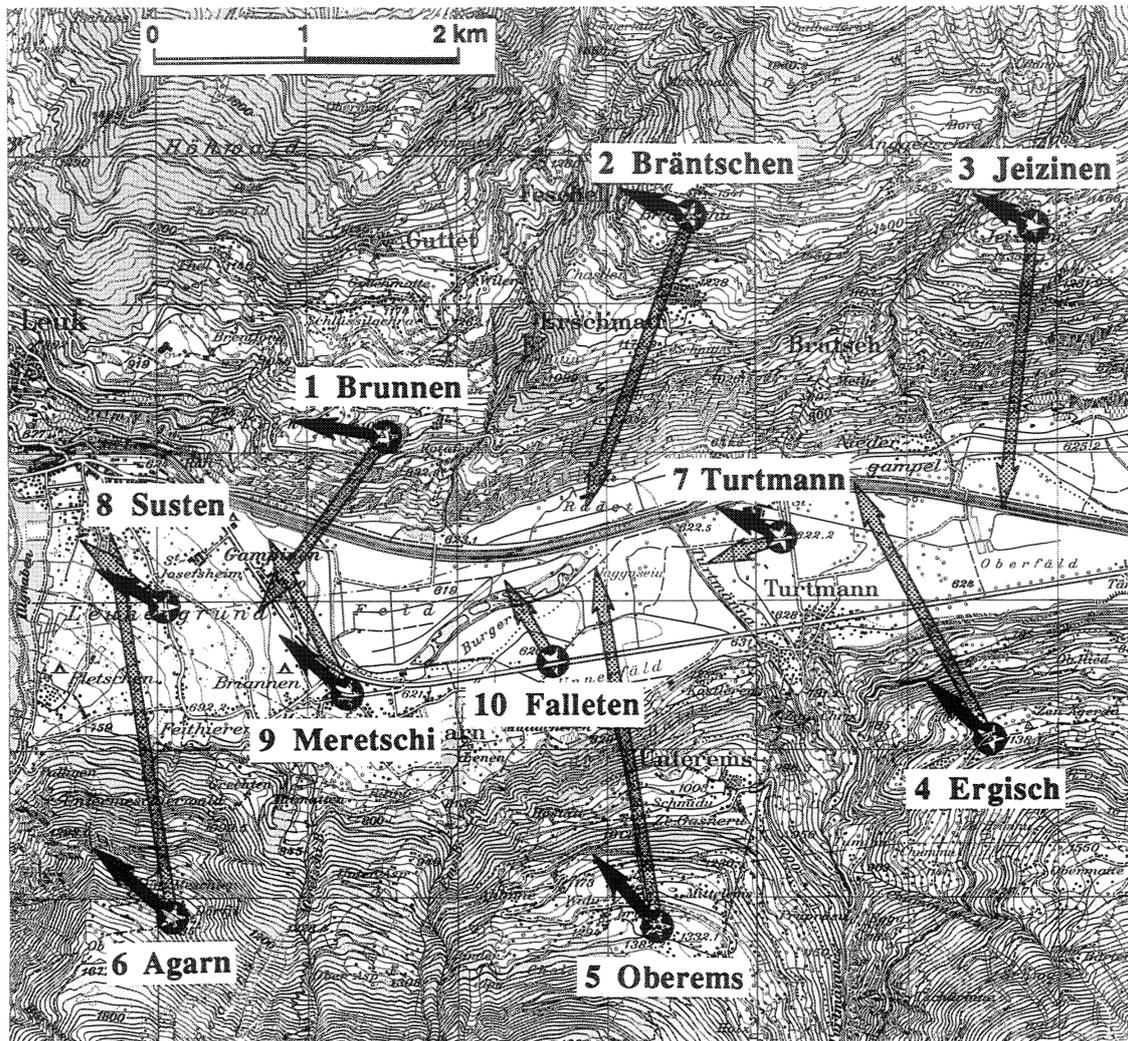
Modell	:	Markov 3	Eins / R	
Parameter	:	d = 2000 m	B = 3200 m	(char. Distanz der Kovarianzfunktion)
Varianzen	:	(a Priori)		
		Markov 3	Eins / R	
		Signal	Signal	Noise
Undulation:		0.031	0.035	0.020 [m]
Xi	:	1.860	2.233	0.500 ["]
Eta	:	1.860	2.233	0.700 ["]
Schwere	:	12.508	15.016	0.500 [mgal]

Offsets zwischen den verschiedenen Datensätzen

Xinull	:	3.1 "	Offset zwischen Lotabweichungen
Etanull	:	-4.8 "	und Schweren
Dgnull	:	-85.00 mgal	Konstanter Offset der Schwerewerte

Totale Anzahl Beobachtungen = 222

N = 0 DG = 202 XI = 10 ET = 10



Reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 12. 9. 1989

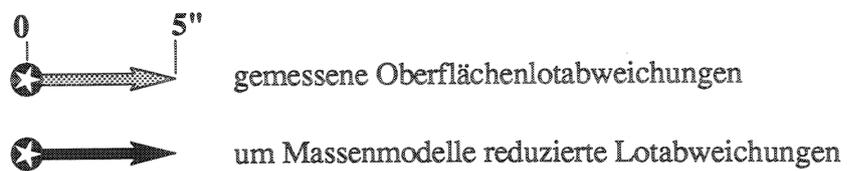


Abb. 11.1-1: Gemessene und reduzierte Lotabweichungen in den Stationen des Testnetzes

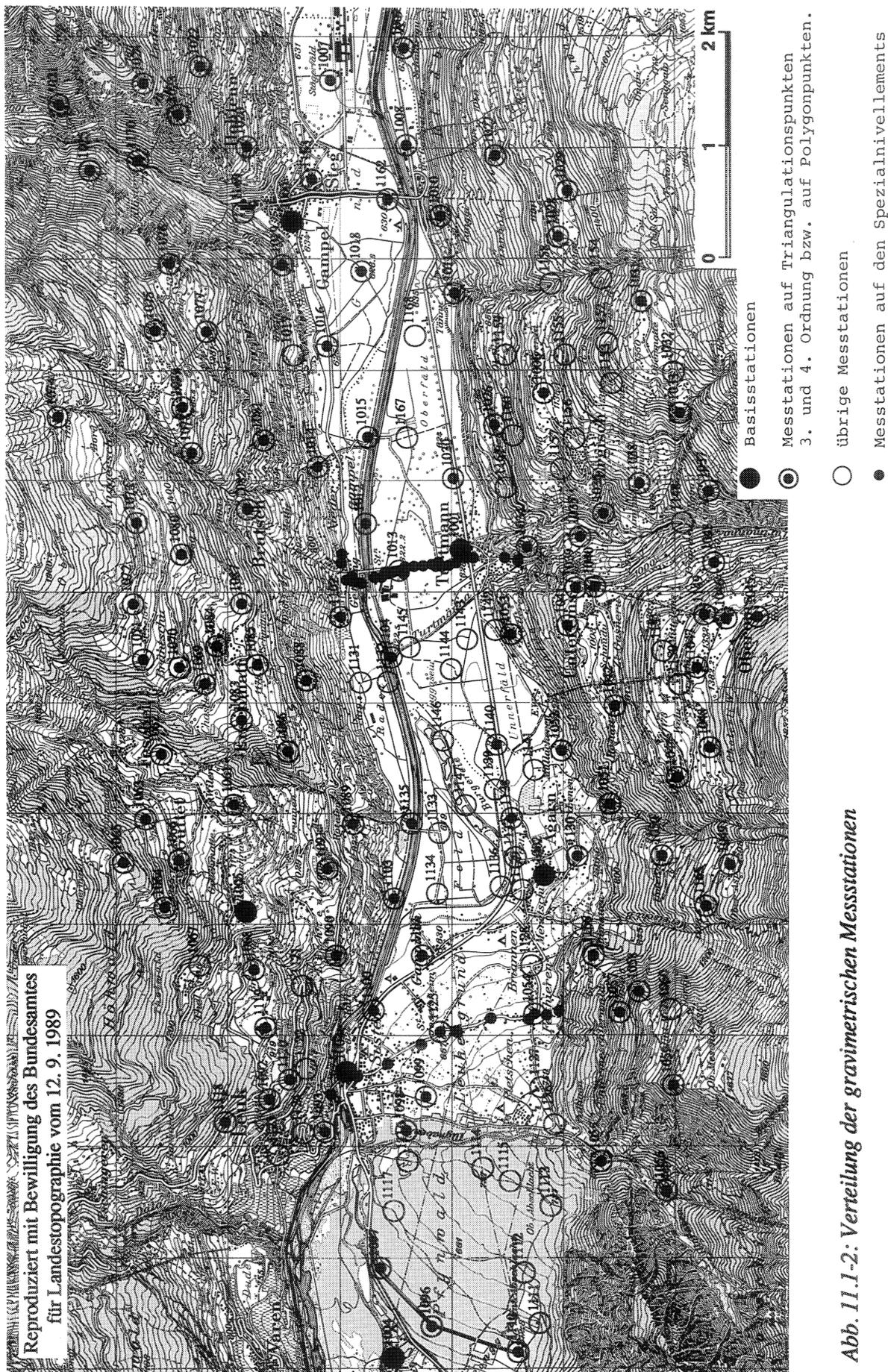


Abb. 11.1-2: Verteilung der gravimetrischen Messstationen

Prädiktionsgenauigkeit a Posteriori in den Beobachtungspunkten (Maximal- und Mittelwerte):

Gmax = 1.507 Gmin = -0.593 Gquer = 0.207 [mgal]
 Xmax = 1.075 Xmin = -1.928 Xquer = 0.870 ["] (Markov 3)
 Emax = 2.422 Emin = -1.525 Equer = 0.980 ["]

Gmax = 2.192 Gmin = -1.154 Gquer = 0.437 [mgal]
 Xmax = 1.023 Xmin = -2.006 Xquer = 0.897 ["] (Eins / R)
 Emax = 2.584 Emin = -1.641 Equer = 1.048 ["]

Punkt	Messungen		prädizierte Werte										N _{CH}
	reduziert		Markov 3					Eins / R					
	ξ_r	η_r	N _{red}	s _N	ξ	η	Δg	N _{red}	s _N	ξ	η	Δg	
1 Brunnen	1.07	-6.28	-0.013	0.0024	1.9	-4.8	-81.3	-0.013	0.0024	1.9	-4.7	-81.0	1.262
2 Bräntschen	1.76	-4.79	0.017	0.0021	1.7	-4.3	-81.1	0.017	0.0021	1.7	-4.2	-81.2	1.384
3 Jeizinen	2.13	-4.02	0.063	0.0026	2.0	-4.0	-82.8	0.063	0.0026	2.0	-4.1	-82.8	1.418
4 Ergisch	3.99	-4.31	0.101	0.0019	3.4	-4.3	-83.4	0.101	0.0020	3.3	-4.3	-83.6	1.384
5 Oberems	4.86	-4.37	0.077	0.0024	3.9	-4.3	-81.3	0.076	0.0024	3.9	-4.3	-81.0	1.404
6 Agarn	4.73	-5.43	0.000	0.0041	4.2	-5.1	-83.9	0.001	0.0042	4.2	-5.1	-83.4	1.310
7 Turtmann	2.11	-4.53	0.050	0.0000	2.4	-4.4	-88.2	0.050	0.0000	2.4	-4.4	-88.5	1.312
8 Susten	2.63	-4.69	-0.036	0.0034	3.0	-4.9	-86.3	-0.035	0.0035	3.0	-4.9	-86.1	1.204
9 Meretschi	4.00	-4.55	0.002	0.0024	3.5	-4.7	-84.4	0.002	0.0025	3.4	-4.6	-84.6	1.256
10 Falleten	1.34	-1.93	0.028	0.0014	3.3	-4.4	-87.4	0.029	0.0014	3.4	-4.5	-87.1	1.284

Tabelle 11.1-1: Resultate der lokalen Schwerfeldbestimmung in den GPS-Stationen für beide Kovarianzfunktionsmodelle

- ξ_r = reduzierte Nord-Süd Komponenten der Lotabweichungen (Input)
 η_r = reduzierte Ost-West Komponenten der Lotabweichungen (Input)
 N_{red} = aus den reduzierten Werten berechnete Cogeoidhöhen [m]
 s_N = Relative Genauigkeiten der Cogeoidhöhen bez. Turtmann [m]
 $\xi, \eta, \Delta g$ = Prädizierte Werte (Output)
 N_{CH} = N_{red} + Modellwirkungen + Konstante; Im Schweizer Datum

Bemerkungen zur Tabelle 11.1-1: Die angegebenen reduzierten Lotabweichungen gingen neben 202 Schwerewerten in die Ausgleichung. Die nächsten zwei mal fünf Kolonnen geben die in den Beobachtungsstationen berechneten prädizierten Werte der reduzierten Schwerfeldparameter für die beiden verschiedenen Kovarianzfunktionsmodelle. Für die Geoidundulationen wurden ebenfalls die relativen Genauigkeiten zur Station Turtmann ausgewiesen. Berechnet wurden sämtliche Werte für alle 212 Stationspunkte. Daraus ergeben sich die oberhalb der Tabelle 11.1-1 ausgewiesenen Prädiktionsgenauigkeiten a

Posteriori in den Beobachtungspunkten. Sie zeigen, dass die verwendeten a Priori Annahmen der Signale und des Noise sowie die charakteristische Distanz der Kovarianzfunktionen zutreffend gewählt wurden. Es wurde eine beträchtliche Genauigkeit der Geoidhöhen erreicht, beträgt doch der maximale Wert der s_N in Agarn lediglich 4.2 mm !

Die maximalen Differenzen der prädizierten Werte der verschiedenen Modelle betragen bei den Geoidundulationen 1 mm bei eigentlich identischen Genauigkeiten. Die Lotabweichungen unterscheiden sich um maximal 0.1" und die Schwereanomalien um maximal 0.5 mgal. Dies zeigt, dass zumindest in diesem lokalen Bereich ohne weiteres das wesentlich einfachere zu berechnende EINS / R - Modell verwendet werden darf.

Interessant ist noch der Vergleich der prädizierten reduzierten Lotabweichungen mit den Messwerten. Die ausgewiesenen Genauigkeiten sind leicht schwächer als angenommen. Grosse Differenzen gibt es lediglich in den beiden Stationspunkten 1 Brunnen Ex. (η -Komponente) und 10 Falleten (ξ - und η -Komponente), die bereits bei den Messungen aufgefallen sind. Wenn diese beiden Stationen aus der Fehlerrechnung weggelassen werden, ergeben sich für $\xi \pm 0.51''$ und für $\eta \pm 0.23''$. Es spricht natürlich für das Verfahren der multivariaten Prädiktion, dass grosse Noise-Verbesserungen an den fragwürdigen Beobachtungen angebracht werden und nicht an den guten! Es ist also mit diesem Verfahren möglich, ungenaue Lotabweichungen mit Hilfe von benachbarten Lotabweichungsbeobachtungen und Schweremessungen zu verbessern.

Die Kolonne N_{CH} zeigt die prädizierten vollständigen Geoidundulationen, die um die Modellundulationen korrigiert wurden. Diese Werte wurden in der Höhe zusätzlich so transliert, dass der Punkt 7, Turtmann, die mit LAG berechnete Geoidhöhe (also im Schweizer Datum) erhält.

Mit demselben Programm wurden schliesslich die reduzierten Geoidundulationen mit ihren relativen Genauigkeiten bezüglich Turtmann in einem regelmässigen Gitter über das Messgebiet berechnet. In diesen Gitterpunkten wurden wiederum mit LAG die Modellwirkungen berechnet, so dass auch die Geoidhöhen im Schweizer Datum dargestellt werden konnten (Abbildungen 11.1-3 und 11.1-4). Die in der Abbildung 11.1-5 dargestellten reduzierten Geoidhöhen widerspiegeln neben einem konstanten Trend sehr schön die Wirkung des nicht reduzierten Sedimenttroges des Rhonetales, der noch in den Messungen (besonders natürlich in diesem Beispiel in den Schweremessungen) steckt. Abbildung 11.1-6 schliesslich zeigt, dass die Genauigkeit der Geoidhöhen für das ganze Testnetz besser als 5mm ist. Damit wurde wirklich ein lokales Geoid mit Subzentimetergenauigkeit berechnet.

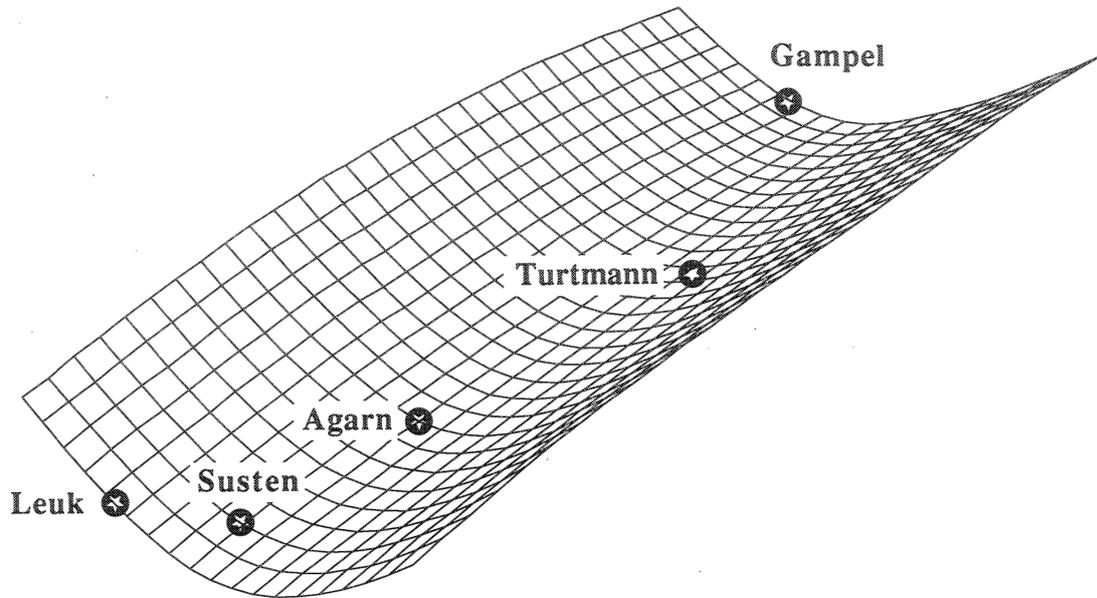
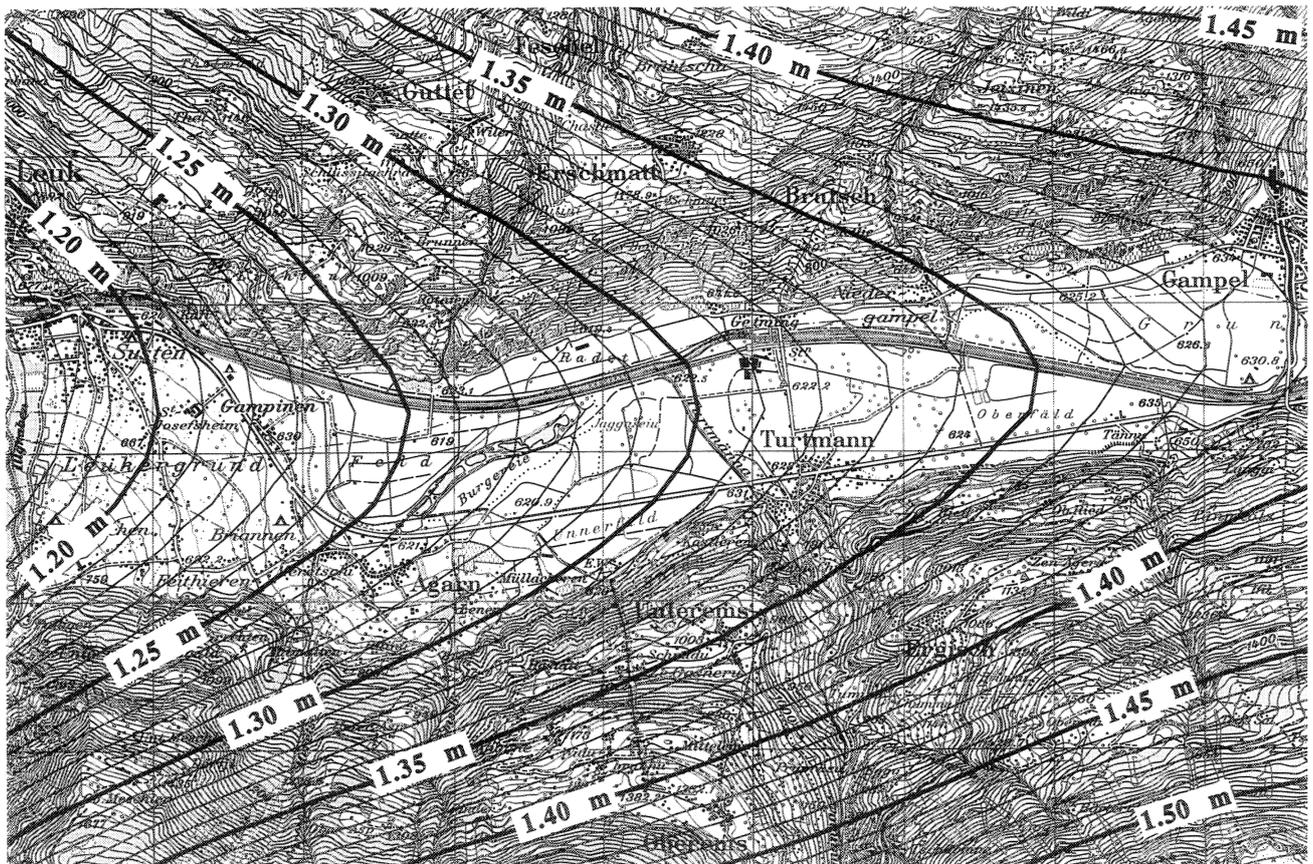


Abb. 11.1-3: Ansicht des Geoides im Turtmann-Netz



Reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes
für Landestopographie vom 12. 9. 1989

Abb. 11.1-4: 1 cm - Isolinienplan des Geoides im Turtmann-Netz (Schweizer Datum)

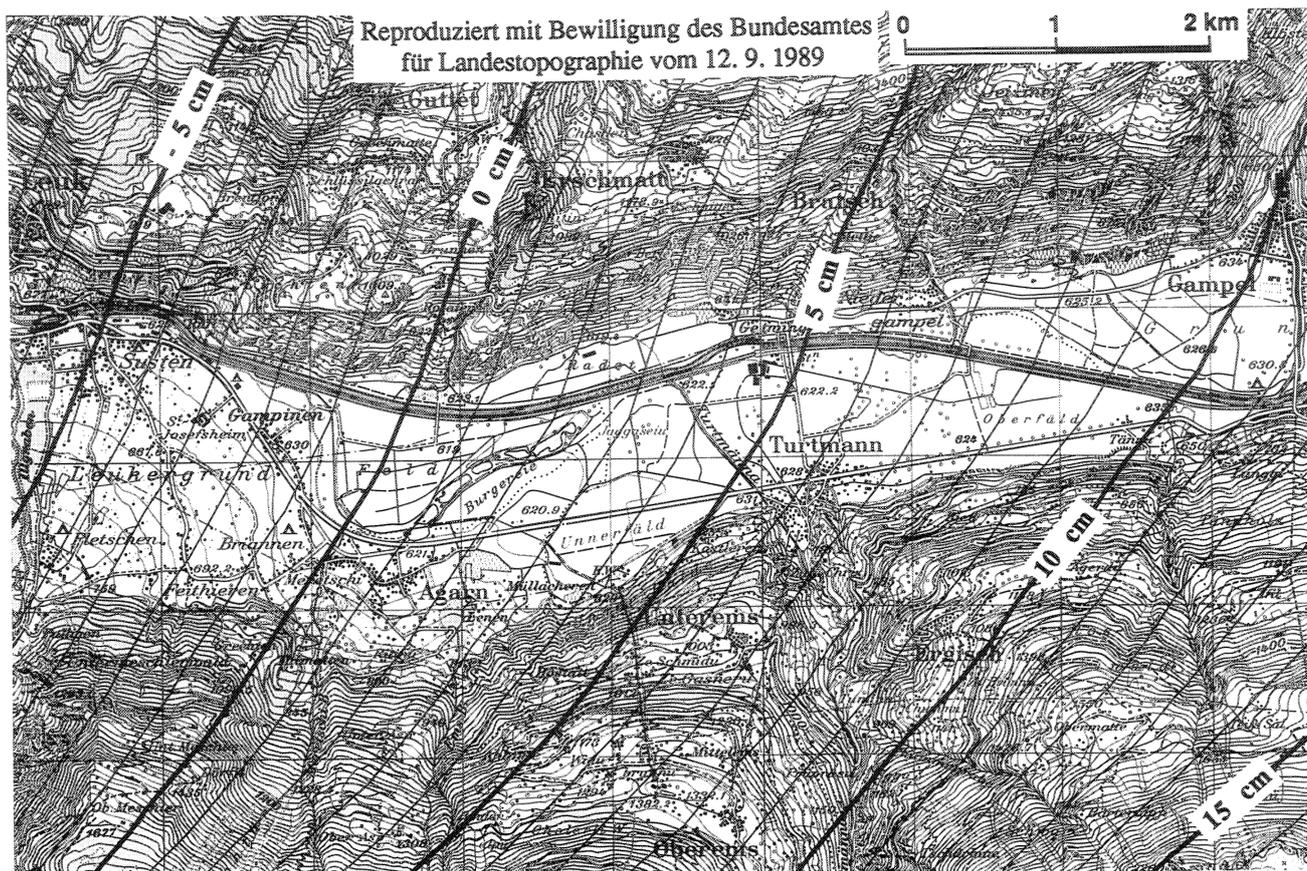


Abb. 11.1-5: Um Massenmodelle reduziertes Teilgeoid (Isolinienabstand: 1 cm)

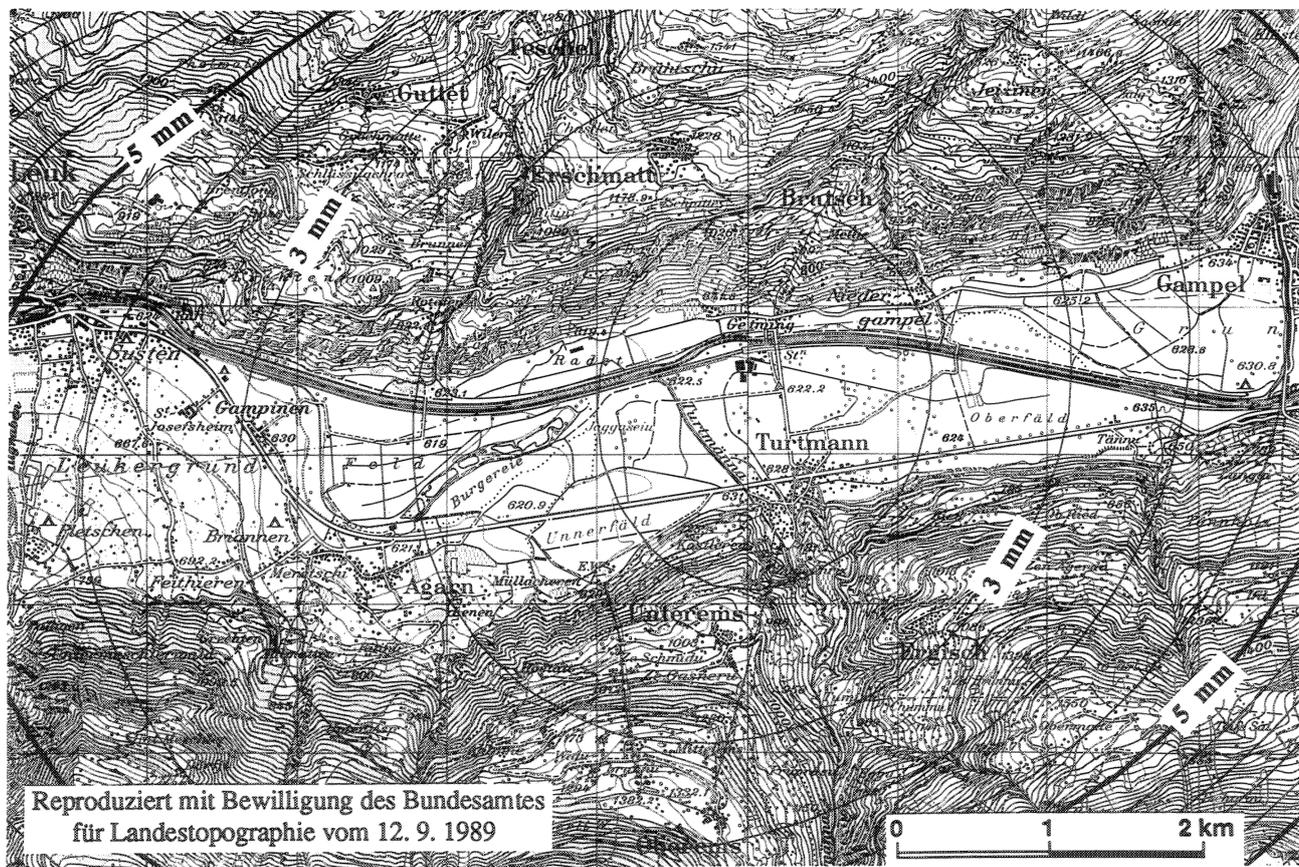


Abb. 11.1-6: Genauigkeit des Geoides relativ zu Punkt Turtmann (Isolinienabstand: 1mm)

11.2 GPS-gestützter Präzisionspolygonzug Visp-Zermatt

Im Rahmen des Nationalen Forschungsprogrammes 20 (NFP 20) "Geologische Tiefenstruktur der Schweiz" wurden innerhalb des Geodäsieprojektes, das gemeinsam vom AIUB, der L+T und dem IGP durchgeführt wird, unter anderem 13 GPS-Punkte auf der Linie zwischen Visp und Zermatt rekognosziert und vermarktet [Schneider, Geiger, 1986]. Diese Stationen wurden in soliden Felsen möglichst nahe der Nivellementsline Visp - Zermatt gelegt und mit dem Verfahren des Global Positioning System (GPS) vermessen. Diese Messungen dienen als Lage-Nullmessung, um später Aussagen über horizontale Krustenverschiebungen machen zu können. Die ellipsoidischen Höhen bilden in Kombination mit dem Nivellement und den Schweremessungen die geometrische Referenz-Grundlage für die Bestimmung der Geoidundulationen. Die Bestimmung dieser 13 Stationen war Aufgabe des IGP. Es war vorgesehen, die Feldkampagne dazu auf den Herbst 1987 zu legen, damit die Messungen im Rahmen des Diplomvermessungskurses durchgeführt werden konnten. Von den Diplomanden der Gruppe Vermessungsingenieure des Diplomvermessungskurses 1987 (Leitung: Prof. F. Chaperon) war gewünscht worden, neben Aufgaben aus dem Bereich der höheren Geodäsie (GPS, Gravimetrie) auch klassische Vermessung zu betreiben. Aus diesem Wunsch ergab sich die Aufgabenstellung, über die rekognoszierten GPS-Punkte einen Polygonzug zu legen. Der Hauptzug besteht aus 16 Stationen, die alle nicht auf die GPS-Stationen gelegt werden konnten, da die nötigen Visuren fehlten. Dazu kommen 3 Hilfspunkte, die zur Einmessung der etwas abgelegenen GPS-Stationen auf den Hauptzug notwendig waren. Zweimal konnte den besonderen topographischen Begebenheiten im Matteredal nur begegnet werden, indem eine Station in eine Talflanke in die Höhe gelegt wurde (Visperterminen und Embd). Die Situation des Zuges ist in Abbildung 11.2-1 dargestellt.

11.2.1 Instrumentarium

Mit dem Instrumentarium standen uns höchstpräzise Geräte zur Verfügung:

- Bis zu 7 WM 101 der Firma Wild-Magnavox für die GPS-Messungen, davon
 - 3 Geräte des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie (IGP)
 - 2 Geräte der Firma Wild-Leitz Zürich
 - 2 Geräte der Firma Wild-Leitz Heerbrugg
- 1 Kern Mekometer ME5000 von der L+T
- 1 E2 Sekundentheodolit des IGP
- 2 T2000 Sekundentheodolite (1 vom IGP, der 2. von der Firma Wild-Leitz Zürich)
- TZK3 Zenitkameraausrüstung des IGP
- 1 G-Gravimeter Nr. 839 des IGP

Die terrestrischen Messungen fanden zwischen dem 3. 8. und dem 11. 8. 1987 statt. Davor und danach wurden die GPS-Messungen durchgeführt.

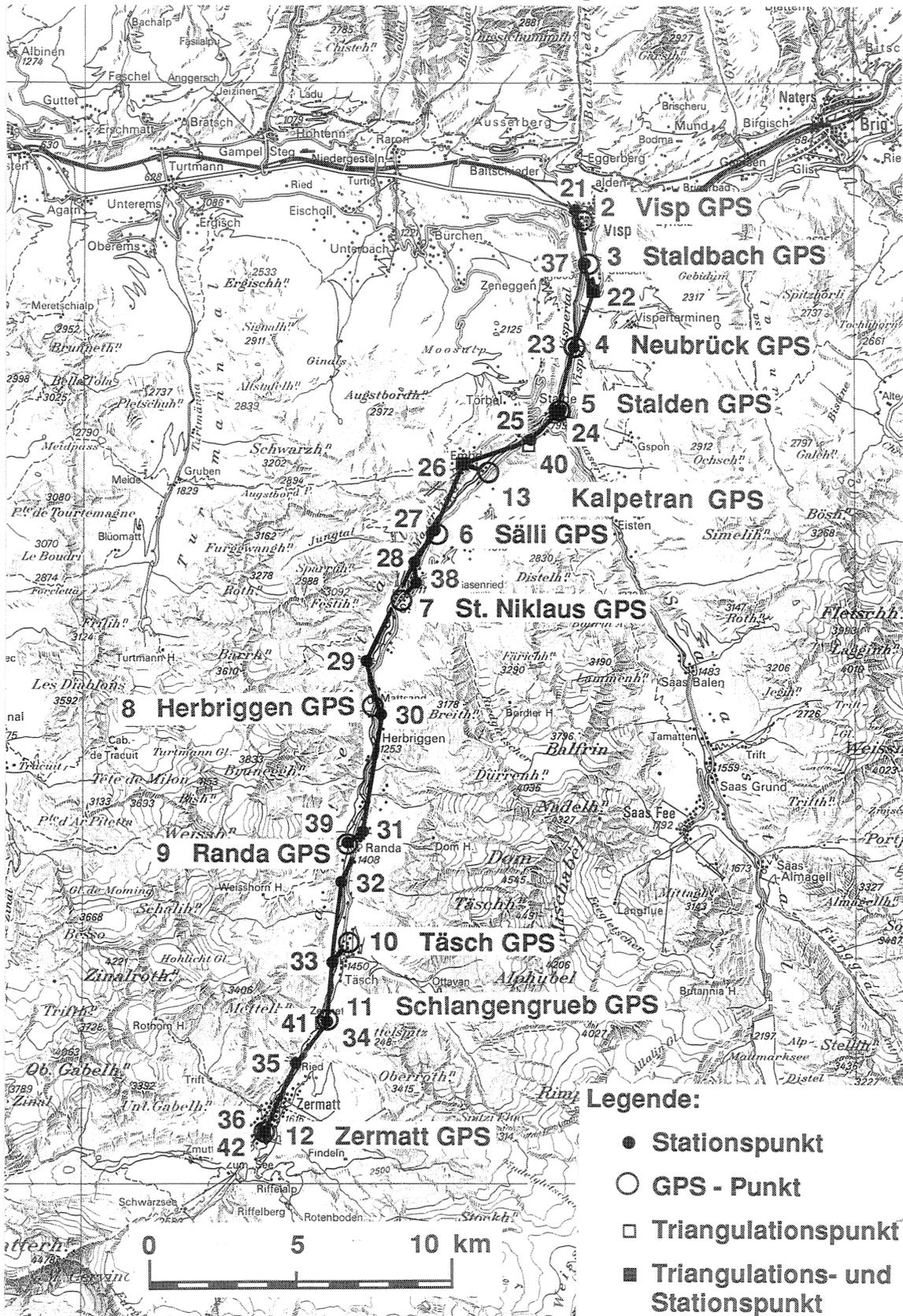
Die Auswertungen der GPS-Kampagnen sind in [Nebiker, 1988] beschrieben und werden hier nicht weiter verfolgt. In [Wirth, 1989] werden die Datenerfassung und -aufbereitung, die Berechnung der Näherungskordinaten, die Modellrechnungen sowie eine kombinierte dreidimensionale Ausgleichung der terrestrischen Daten mit den GPS-Messungen im Programm RAUMTRI beschrieben. Im folgenden wird auf die Geoidbestimmung, die speziell durchgeführten Höhenberechnungen, die orthometrische Korrektur des Nivellementes, die gesonderten Lageberechnungen mit und ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen und der GPS-Messungen eingegangen.

11.2.2 Punktverzeichnis und Situation

Nr.	Name	GPS-Nr.	Nr.	Name	GPS-Nr.
2	Visp GPS	G2	32	Wegweiser PP	18
3	Staldbach GPS	G3	33	Täsch PP	
4	Neubrück GPS	G4	34	Schlangengrueb PP	
5	Stalden GPS	G5	35	Schützenhaus PP	
6	Sälli GPS	G6	36	Zermatt PP	
7	St. Niklaus GPS	G7	37	Staldbach Exz.	
8	Herbriggen GPS	G8	38	St. Niklaus Exz.	
9	Randa GPS	G9	39	Randa Exz.	
10	Täsch GPS	G10	40	Liechtbiel TP	
11	Schlangengrueb GPS	G11	41	Schlangengrueb TP	
12	Zermatt GPS	G12	42	Zermatt TP	
13	Kalpetran GPS	13	50	NF21 Ex (Vterm)	
21	Visp PP	14	51	NF58 Ex (Embd)	
22	Visperterminen PP/TP	15	52	NF57 (Embd)	
23	Neubrück PP		53	NF67 EX (St. N.)	
24	Stalden PP/TP		54	NF81 EX (Mätteli)	
25	Liechtbiel PP		55	NF86 EX (Herbr)	
26	Embd PP	16	56	NF99 (Randa)	
27	Sälli PP		57	NF104 (Wegw)	
28	St. Niklaus PP		58	NF115 (Täsch)	
29	Mätteli PP	17	59	NF126 (Schütz)	
30	Herbriggen PP		60	NF50 (Liechtb)	
31	Randa PP				

Tab. 11.2-1 Punktverzeichnis

Netzplan Polygonzug Visp - Zermatt



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

Abb. 11.2-1: Netzplan Polygonzug Visp - Zermatt mit GPS Stationen

11.2.3 Höhenbestimmungen

Die im Polygonzug gemessenen Zenitdistanzen (meistens gleichzeitig gegenseitig, mit Anschluss an das Nivellement) sollen für mehrere Höhenberechnungen herangezogen werden.

1. Mit rohen, unkorrigierten Zenitdistanzen unter Berücksichtigung der Anschlussmessungen auf das Nivellement.
2. Mit um die Lotkrümmungen korrigierten Zenitdistanzen unter Berücksichtigung der Anschlussmessungen auf die orthometrisch korrigierten Nivellementshöhen.
3. Mit um die Lotabweichungen korrigierten Zenitdistanzen unter Berücksichtigung der Anschlussmessungen auf die um N korrigierten orthometrischen Nivellementshöhen.

Die nivellierten Höhen gehen jeweils als Stützwerte in die Ausgleichung ein. Gleichzeitig werden mehrere Refraktionsunbekannte angesetzt.

Ansatz nach [Chaperon, 1990, Kap. 15]:

$$\Delta h = \frac{D_S \cdot \cos (Z_{\text{gem}} + E - R)}{\cos E} \quad (11.2-1)$$

mit E = Erdkrümmung Z_{gem} = gemessene Zenitdistanz
 R = Refraktion D_S = gemessene Schrägdistanz

Für Horizontaldistanzen < 18 km ist $1 - \cos E < 10^{-6}$ [L+T, 1980], so dass $\cos E$ durch 1 ersetzt werden kann:

$$\Delta h = D_S \cdot \cos (Z_{\text{gem}} + E - R) \quad (11.2-2)$$

Für die Erdkrümmung E gilt:

$$E = \frac{\gamma}{2}$$

γ = Erd-Zentriwinkel über der Distanz

$$E^{cc} = \frac{\gamma}{2} = \frac{D_{hor}}{2 R_E} \cdot \rho^{cc} = \frac{D_S \sin Z_{gem} \rho^{cc}}{2 R_E} =$$

$$= D_S \sin Z_{gem} \cdot \frac{636620}{2 \cdot 6378800} = \frac{D_S \sin Z_{gem}}{20.0396}$$

R_E = Erdradius

Für die Refraktion R gilt:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_E}{R_0}, \text{ also } R_0 = \frac{R_E}{\kappa}$$

κ = Refraktionskoeffizient

R_0 = Lichtbogen der Horizontalvisur

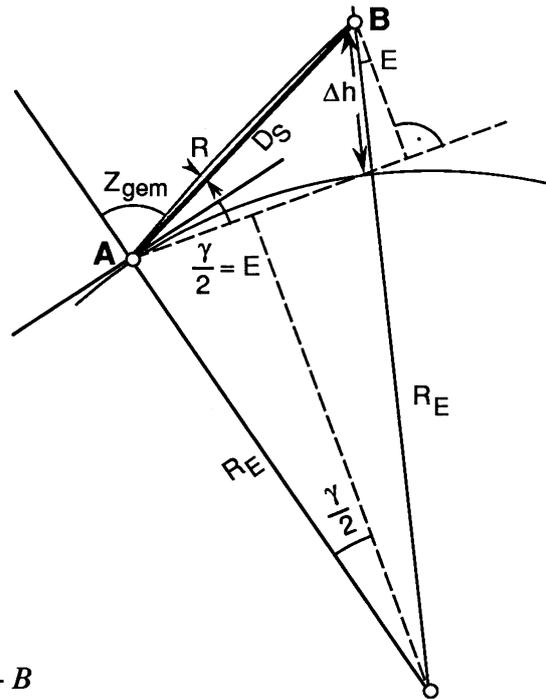


Abb. 11.2-2: Höhendifferenz der Strecke A - B

In [Chaperon, 1990] wird angegeben, dass für die Erreichung eines kreisförmigen Lichtbogens unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes das n-Feld hyperbolisch mit der Höhe abnehmen muss. Der Lichtbogenradius wird damit funktional von der Zenitdistanz abhängig: $R_{\text{Lichtbogen}} = R_0 / \sin Z_{gem}$, wo R_0 der Lichtbogenradius der Horizontalvisur ist.

$$R \text{ [Rad]} = \frac{D_S}{2 R_{\text{Lichtbogen}}} = \frac{D_S \cdot \sin Z_{gem}}{2 \cdot R_0} = \frac{D_S \cdot \sin Z_{gem}}{2 R_E} \kappa$$

$$R^{cc} = \frac{D_S \cdot \sin Z_{gem} \cdot 636620}{2 \cdot 6378800} \kappa = \frac{D_S \cdot \sin Z_{gem}}{20.0396} \kappa$$

damit

$$\Delta h = D_S \cos \left(Z_{gem}^{cc} - \frac{D_S \sin Z_{gem}}{20.0396} + \frac{D_S \sin Z_{gem}}{20.0396} \kappa \right) \quad (11.2-3)$$

oder nach der gemessenen Zenitdistanz aufgelöst:

$$Z_{gem}^{cc} - \frac{D_S \sin Z_{gem}}{20.0396} + \frac{D_S \sin Z_{gem}}{20.0396} \kappa = \arccos \left(\frac{\Delta h}{D_S} \right) \quad [^{\circ}]$$

Daraus ergibt sich für die Beobachtungsgleichung:

$$Z_{gem} = \arccos \left(\frac{\Delta h}{D_S} \right) + \frac{D_S \sin Z_{gem}}{200396} - \frac{D_S \sin Z_{gem}}{200396} \kappa \quad [^{\circ}] \quad (11.2-4)$$

und durch Linearisierung die Verbesserungsgleichung:

$$Z_{\text{gem}} + v_Z = \arccos\left(\frac{\Delta h_0}{D_S}\right) + \frac{D_S \sin Z_{\text{gem}}}{200396} - \frac{D_S \sin Z_{\text{gem}}}{200396} \kappa - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta h_0}{D_S}\right)^2}} \cdot \frac{d(\Delta h_0)}{D_S}$$

mit $d(\Delta h_0) = \Delta H_Z - \Delta H_S$ (Zielpunkt - Standpunkt) und

$$\frac{\rho^{\text{cc}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta h_0}{D_S}\right)^2} \cdot D_S} = \frac{\rho^{\text{cc}}}{\sqrt{D_S^2 - \Delta h_0^2}} = \frac{\rho^{\text{cc}}}{D_S \sin Z_{\text{gem}}}$$

folgt

$$v_Z = \frac{\rho^{\text{cc}}}{\sqrt{D_S^2 - \Delta h_0^2}} \cdot \Delta H_S - \frac{\rho^{\text{cc}}}{\sqrt{D_S^2 - \Delta h_0^2}} \cdot \Delta H_Z - \frac{D_S \sin Z_{\text{gem}}}{20.0396} \kappa - \underbrace{\left(Z_{\text{gem}} - \arccos\left(\frac{\Delta h_0}{D_S}\right) - \frac{D_S \sin Z_{\text{gem}}}{200396} \right)}_{+f} \quad (11.2-5)$$

Korrekturen im Falle der Lotkrümmungen: $\kappa_N = \xi' - \xi$, $\kappa_E = \eta' - \eta$

$$Z_{\text{korrr}} = Z - \cos(\alpha) \cdot \kappa_N - \sin(\alpha) \cdot \kappa_E$$

Im Falle der Lotabweichungen:

$$Z_{\text{korrr}} = Z + \cos(\alpha) \cdot \xi + \sin(\alpha) \cdot \eta$$

ξ' und η' sind die Lotabweichungen auf dem Geoid.

Mit dem Ansatz 11.2-5 wurden die gemessenen Höhenwinkel ausgeglichen. Zuerst ohne Korrekturen, dann mit den berechneten Lotkrümmungen und schliesslich mit den Oberflächenlotabweichungen.

11.2.3.1 Ohne Korrekturen

Eine erste Ausgleichung wurde mit den unkorrigierten Höhenwinkeln durchgeführt. Das Präzisionsnivellement der L+T durfte dafür ebenfalls nicht korrigiert werden. Durch die Höhenanschlüsse an das Nivellement konnten die Höhenwinkelmessungen praktisch auf das Nivellement gezwängt werden. Verwendete mittlere Fehler für die Zenitdistanzen:

$mZ = 20''$ für nur Hin- oder Rückmessung

$mZ = 12''$ für gleichzeitige Hin- und Rückmessung

Neben den Punkthöhen wurden insgesamt 4 Refraktionsunbekannte geschätzt. In einer vorgängigen Ausgleichung war für alle gleichzeitig gegenseitig gemessenen Zenitdistanzen eine eigene Refraktionsunbekannte geschätzt worden. Dies erlaubte, die Zenitdistanzen in 5 Gruppen einzuteilen: die kurzen Strecken erhielten eine Normalrefraktion von $\kappa = 0.13$, der Rest kam je nach berechnetem Refraktionskoeffizienten in eine der 4 übrigen Gruppen. Das Nivellement wurde in eine Folge von Einzelstrecken zerlegt, die alle vom Polygonzug verwendeten Punkte miteinander verband. Der mittlere Fehler einer solchen Einzelstrecke wurde mit

$$1.4 \text{ mm} \cdot \sqrt{L \text{ [km]}}$$

angenommen, wo L die Länge der Strecke in [km] ist. Damit bleibt die gute Genauigkeit der Nachbarpunkte erhalten, und doch wird die Fehlerfortpflanzung über die ganze Strecke von Visp bis Zermatt angewendet.

Die Höhe des Punktes Visp GPS diene mit einem mF von 0.1 mm zur 'stochastischen Lagerung' (Fixpunkt). Als Näherungshöhen dienten die Nivellementshöhen. Die Berücksichtigung der Nivellementsstrecken erfolgt mit folgendem Ansatz:

$$\Delta h_{i,j} + v_{i,j} = H_j^0 + \Delta H_j - H_i^0 - \Delta H_i \quad \text{mit } p_{i,j} \quad (11.2-6)$$

$\Delta h_{i,j}$ = nivellierte Höhendifferenz von Punkt i nach j

$v_{i,j}$ = Verbesserung an dieser nivellierten Höhe

H_j^0 = Näherungshöhe des Punktes j

ΔH_j = Unbekannter verkürzter Parameter der Höhe H_j

$p_{i,j}$ = Gewicht der nivellierten Höhendifferenz $\Delta h_{i,j}$

daraus ergibt sich die Verbesserungsgleichung:

$$v_{i,j} = \Delta H_j - \Delta H_i - (\Delta h_{i,j} - (H_j^0 - H_i^0)) \quad (11.2-7)$$

$(\Delta h_{i,j} - (H_j^0 - H_i^0)) = 0$, da die Näherungshöhen aus $\Delta h_{i,j}$ gebildet wurden und keine Schleifen existieren, die Widersprüche erzeugen könnten.

$$v_{i,j} = \begin{array}{c} \Delta H_j \quad \dots \quad \Delta H_i \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ & A \end{array} \right] \text{ mit } p_{i,j} \end{array}$$

Dies kann direkt in einen Normalgleichungsanteil umgerechnet werden

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \left[\begin{array}{cc} +p_{i,j} & -p_{i,j} \\ -p_{i,j} & +p_{i,j} \end{array} \right] \mathbf{N} \end{array} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}_k = 0, \text{ also kein Anteil der } k\text{-ten Zeile!}$$

Die Resultate der Ausgleichung sind in der Tab. 11.2-4 zusammengestellt. Berechnet wurden je zwei Varianten: einmal mit Berücksichtigung des Nivellements (gezwängt) wie oben angegeben und einmal ohne Nivellement (ungezwängt), also nur über die Höhenwinkel. Die 4 Gruppen von Refraktionskoeffizienten weisen recht unterschiedliche Werte auf, sie bewegen sich zwischen 0.01 und 0.26. Die mF der ausgeglichenen Höhen der gezwängten Variante sind alle $< 9 \text{ mm}$!

$$\kappa_1 = 0.254 \pm 0.026$$

$$\kappa_2 = 0.010 \pm 0.022$$

$$\kappa_3 = 0.087 \pm 0.021$$

$$\kappa_4 = 0.175 \pm 0.022$$

maximale Verbesserungen der gezwängten Variante:

Embd PP	Kalpetran GPS	rück	21.8 ^{cc}
Täsch PP	Wegweiser PP	rück	-17.3 ^{cc}
Embd PP	NF 58	hin	21.6 ^{cc}
Embd PP	NF 58	rück	28.2 ^{cc}
Embd PP	NF 57	hin	23.3 ^{cc}
Embd PP	NF 57	rück	24.7 ^{cc}

11.2.3.2 Orthometrische Höhen aus Nivellement und Schweredaten

Die orthometrischen Höhen aller GPS- und Polygonpunkte wurden nach der Formel 2.5-1 berechnet. Dazu waren zuerst die geopotentiellen Koten C der Punkte zu berechnen, wozu neben den rohen Nivellements-Höhendifferenzen die Schwerewerte gebraucht wurden, die ebenfalls im Diplomvermessungskurs gemessen worden waren. Die Berechnung der mittleren Schwere in der Lotlinie erfolgte nach der Formel 7.2-21 bzw. 7.2-26, welche für die konstante Dichte von 2.65 g/cm^3 der topographischen Massen weiter zu

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + \frac{1}{2} g_{\text{Frei}}^{(P)} - g_{\text{Bpl}}^{(P)} - DG + DGM$$

Für DG und DGM vgl. Formeln (7.2-22) und (7.2-23) in Kapitel 7.2.5.2.

$$\bar{g}^{(P)} = g_{\text{Beob}}^{(P)} + 0.0424 \cdot H^{[\text{m}]} - DG + DGM \quad (11.2-8)$$

vereinfacht werden kann. Die DG und DGM werden mit dem Programm LOST berechnet (vgl. Kap. 7.2.5). Die orthometrische Korrektur für den Punkt Visp GPS wurde zu Null angenommen und wächst dann bis Zermatt auf **14.5 cm** an.

In Abb. 11.2-3 sind diese relativen orthometrischen Korrekturen zum Fixpunkt Visp dargestellt. Die 14.5 cm über 31 km bedeuten eine Neigung von 2.9° , was als mittlere Neigung der Äquipotentialfläche in Stationshöhe gegenüber dem Geoid in Nord-Süd Richtung betrachtet werden kann. In Tab. 11.2-2 sind schliesslich die genauen Zahlenwerte ausgewiesen.

Orthometrische Korrekturen

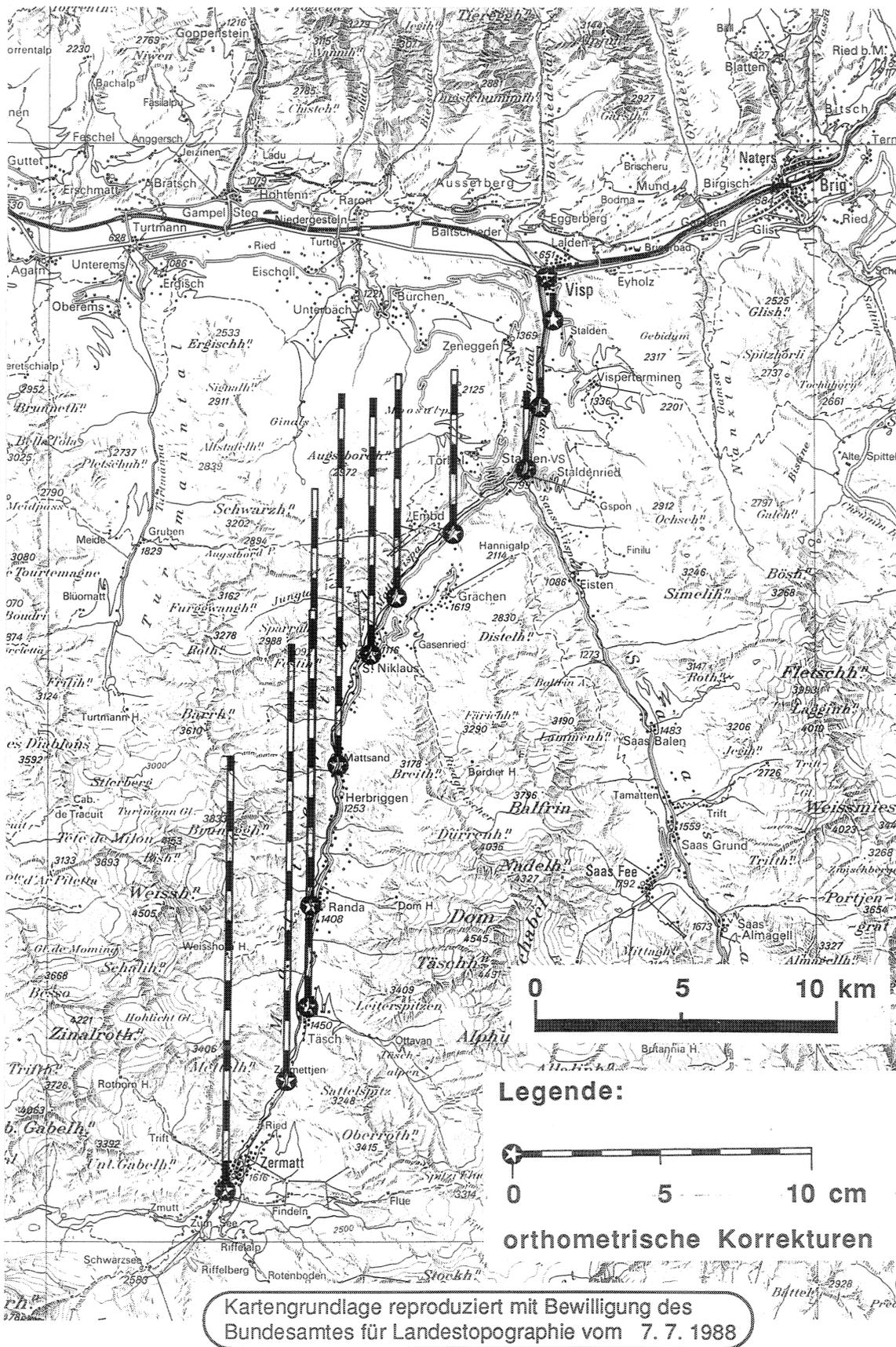


Abb. 11.2-3: Relative orthometrische Korrekturen zu Visp GPS

Punkt	Niv.	g Beob.	\bar{g}	Pot.	O.K.	H ort.
2 Visp GPS	652.408	980406.17	980417.23	639.6320	0.000	652.408
3 Staldbach GPS	662.127	980397.92	980405.57	649.1605	0.008	662.135
4 Neubrück GPS	695.585	980383.12	980389.28	681.9624	0.019	695.604
5 Stalden GPS	822.611	980363.48	980378.64	806.4953	0.026	822.637
6 Sälli GPS	1075.703	980305.23	980323.09	1054.6096	0.075	1075.778
7 St. Niklaus GPS	1093.536	980298.06	980313.01	1072.0914	0.086	1093.622
8 Herbruggen GPS	1232.971	980258.97	980278.03	1208.7766	0.125	1233.096
9 Randa GPS	1404.036	980240.77	980264.61	1376.4630	0.139	1404.175
10 Täsch GPS	1438.729	980243.87	980268.92	1410.4705	0.132	1438.861
11 Schlangengrueb GPS	1527.862	980226.94	980258.37	1497.8418	0.145	1528.007
12 Zermatt GPS	1687.582	980213.18	980255.15	1654.4024	0.144	1687.726
13 Kalpetran GPS	948.699	980327.17	980345.18	930.1056	0.054	948.753
21 Visp PP	653.103	980406.76	980418.40	640.3134	0.000	653.103
22 Visperterminen PP/TP	890.716	980362.98	980391.73	873.2647	0.014	890.730
23 Neubrück PP	696.227	980382.96	980389.41	682.5919	0.019	696.246
24 Stalden PP/TP	824.243	980363.12	980378.89	808.0953	0.025	824.268
25 Liechtbiel PP	924.304	980340.99	980361.38	906.1903	0.039	924.343
26 Embd PP	1409.304	980257.56	980311.86	1381.6331	0.077	1409.381
27 Sälli PP	1072.191	980305.45	980324.00	1051.1668	0.074	1072.265
28 St. Niklaus PP	1110.852	980298.33	980317.09	1089.0663	0.081	1110.933
29 Mätteli PP	1287.057	980255.98	980283.50	1261.7948	0.116	1287.173
30 Herbruggen PP	1273.462	980253.69	980275.86	1248.4681	0.127	1273.589
31 Randa PP	1497.669	980229.39	980262.11	1468.2453	0.140	1497.809
32 Wegweiser PP	1426.019	980240.26	980266.56	1398.0116	0.136	1426.155
33 Täsch PP	1467.537	980236.85	980266.34	1438.7093	0.135	1467.672
34 Schlangengrueb PP	1539.305	980225.43	980258.00	1509.0585	0.145	1539.450
35 Schützenhaus PP	1616.948	980217.76	980254.07	1585.1658	0.149	1617.097
36 Zermatt PP	1688.030	980213.17	980255.44	1654.8415	0.144	1688.174

Tab. 11.2-2: Orthometrische Korrekturen und - Höhen

Damit sind die Voraussetzungen gegeben, um eine Ausgleichung direkt in orthometrischen Höhen durchzuführen.

11.2.3.3 Mit Korrektur der Lotkrümmungen

Durch die Korrektur der Höhenwinkel um die Lotkrümmungen erhalten wir die gesuchten orthometrischen Höhendifferenzen.

Verwendete Genauigkeiten:

$mZ = 10^{\text{cc}}$ für nur Hin- oder Rückmessung

$mZ = 6^{\text{cc}}$ für gleichzeitige Hin- und Rückmessung

Dies kommt einer Halbierung der mittleren Fehler gegenüber der unkorrigierten Version gleich. Als Näherungshöhen wurden die in Tab. 11.2-2 ausgewiesenen **orthometrisch korrigierten Höhen** eingeführt. Diese wurden ebenfalls in ein 'orthometrisches Nivellement' umgerechnet und als 'Beobachtungen' verwendet mit dem mittleren Fehler von

$$2.0 \text{ mm} \cdot \sqrt{L \text{ [km]}}$$

Darin ist neben der Messgenauigkeit des Nivellements die Unsicherheit der *orthometrischen Korrektur* von ca 1.4 mm pro km enthalten.

Es wurde wiederum eine gezwängte und eine ungezwängte Variante berechnet. Für die Details vgl. die Tabelle 11.2-4. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen **orthometrischen Höhen** sind alle < 12.3 mm ! Die Verbesserungen an den Höhenwinkeln werden kleiner als bei der unkorrigierten Version, das Nivellement aber wird etwas ungenauer.

Refraktionsunbekannte:

$$\kappa_1 = 0.196 \pm 0.015$$

$$\kappa_2 = -0.007 \pm 0.013$$

$$\kappa_3 = 0.087 \pm 0.012$$

$$\kappa_4 = 0.137 \pm 0.012$$

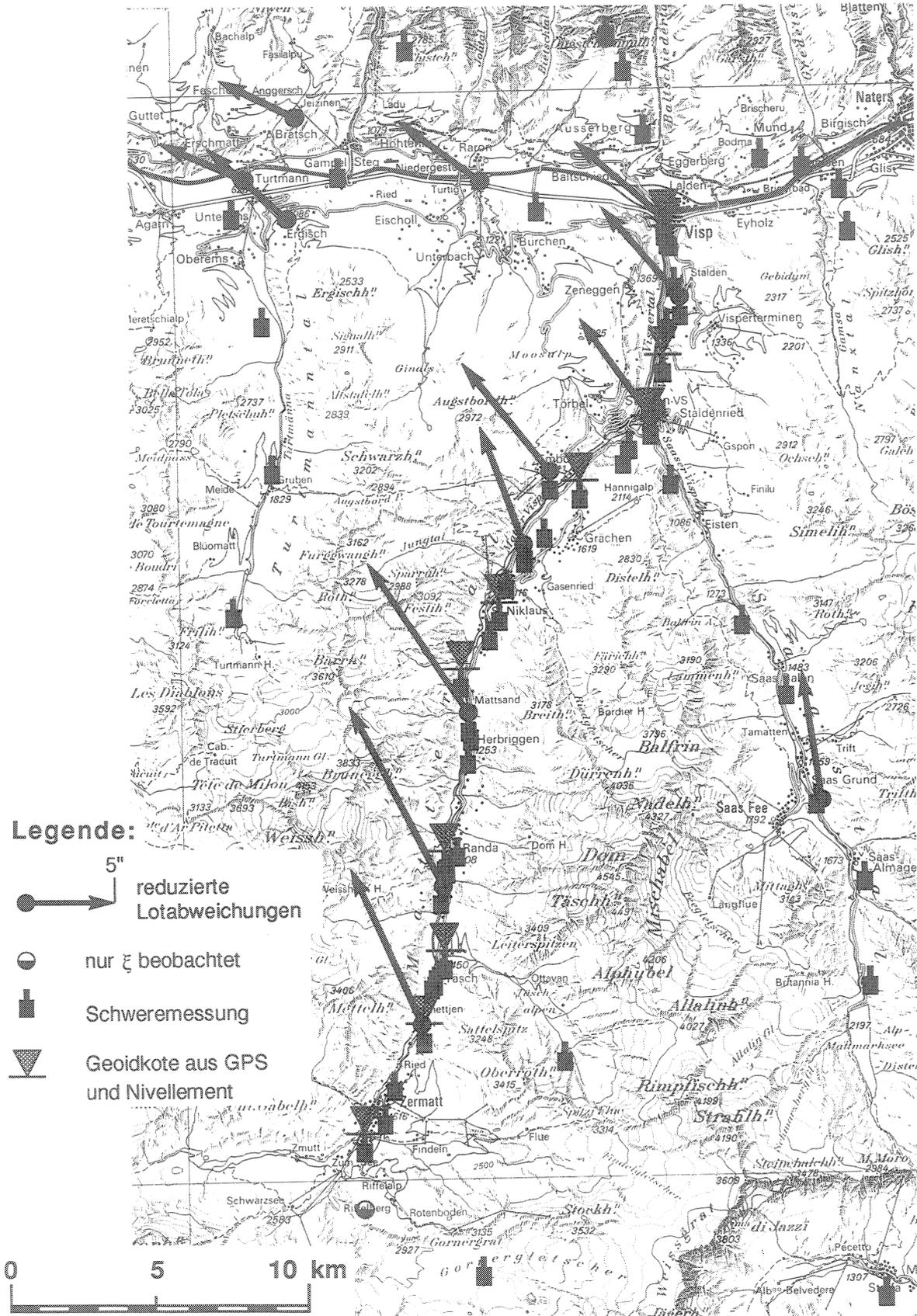
Auffällig ist, dass κ_1 und κ_4 bei den orthometrisch korrigierten Höhenwinkeln kleiner werden, während κ_2 und κ_3 etwa gleich gross bleiben. Die angenommene doppelte Genauigkeit der korrigierten gegenüber den unkorrigierten Höhenwinkel hat sich bei der Ausgleichung bestätigt.

Die maximalen Verbesserungen sind ebenfalls deutlich kleiner als bei der unkorrigierten Version:

Visp PP	Visperterminen PP/TP	hin	11.2 ^{cc}
Sälli PP	St. Niklaus PP	rück	12.5 ^{cc}
Täsch PP	Wegweiser PP	rück	-12.3 ^{cc}

11.2.3.4 Vergleich der GPS- mit den terrestrischen Höhen

Für den Vergleich der GPS-Höhen mit dem Nivellement wurde mit dem Programm HITCOL eine lokale Geoidbestimmung aus Lotabweichungen und Schwereanomalien durchgeführt. Die Verteilung der Messpunkte ist in Abb. 11.2-4 dargestellt, wobei die direkt beobachteten Geoidkoten aus GPS dazu vorerst noch nicht berücksichtigt wurden.



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

Abb. 11.2-4: Art und Verteilung der Beobachtungen zur Störpotentialbestimmung

Neben den im Diplomvermessungskurs durchgeführten Beobachtungen wurden alle in der Umgebung verfügbaren astronomischen und gravimetrischen Messungen miteinbezogen. In die Ausgleichung flossen somit 61 Schweremessungen, 14 ξ - und 13 η -Komponenten, total also 88 Beobachtungen. Diese wurden um die Modellwirkungen der Topographie, der Moho und des Ivreakörpers reduziert und daraus das Cogeoid berechnet.

Verwendetes Modell : E I N S / R

Parameter : B = 10000 m

Varianzen : (a priori)

	Signal	Noise
Undulation:	0.283	0.020 [m]
Xi :	5.834	0.500 ["]
Eta :	5.834	0.700 ["]
Schwere :	39.233	0.500 [mgal]

Offsets zwischen den verschiedenen Datensätzen

Xinull :	4.5 "	Offset zwischen Lotabweichungen
Etanull :	-3.0 "	und Schweren
Nnull :	-2.54 m	Konstanter Offset der Geoidhöhen
Dgnull :	-56.00 mgal	Konstanter Offset der Schwerewerte

Die Prädiktionsgenauigkeiten a posteriori in den Beobachtungspunkten (Maximal- und Mittelwerte) betragen:

Nmax =	0.039	Nmin =	-0.036	Nquer =	0.027
Gmax =	0.723	Gmin =	-0.672	Gquer =	0.239
Xmax =	0.258	Xmin =	-0.274	Xquer =	0.159
Emax =	1.037	Emin =	-1.280	Equer =	0.593

Nr.	Punkt	H ort.	H GPS	N GPS	N ber	Gen.	Diff.
2	Visp GPS	652.408	653.906	1.498	1.498	0.000	0.000
3	Staldbach GPS	662.135	663.734	1.599	1.542	0.002	0.057
4	Neubrück GPS	695.604	697.264	1.660	1.663	0.006	-0.003
5	Stalden GPS	822.637	824.381	1.744	1.774	0.009	-0.030
6	Sälli GPS	1075.778	1077.950	2.172	2.079	0.014	0.093
7	St. Niklaus GPS	1093.622	1095.799	2.177	2.209	0.016	-0.032
8	Herbruggen GPS	1233.096	1235.467	2.371	2.439	0.020	-0.068
9	Randa GPS	1404.175	1406.823	2.648	2.641	0.024	0.007
10	Täsch GPS	1438.861	1441.643	2.782	2.758	0.025	0.024
11	Schlangengrueb GPS	1528.007	1530.851	2.844	2.812	0.026	0.032
12	Zermatt GPS	1687.726	1690.598	2.872	2.829	0.032	0.033
13	Kalpetran GPS	948.753	950.652	1.899	1.927	0.012	-0.028
21	Visp PP	653.103	654.615	1.512	1.493	0.001	0.019
22	Visperterminen PP/TP	890.730	892.215	1.485	1.583	0.004	-0.098
26	Embd PP	1409.381	1411.255	1.874	1.931	0.012	-0.057
29	Mätteli PP	1287.173	1289.513	2.340	2.359	0.019	-0.019
33	Täsch PP	1467.672	1470.475	2.803	2.772	0.026	0.031

Tab. 11.2-3 Vergleich der GPS- mit den astro-gravimetrischen Geoidhöhen

Bemerkungen zur Tabelle 11.2-3: Die orthometrischen Höhen stammen aus der Tabelle 11.2-2 und wurden aus Nivellement und Schweremessungen bestimmt. Die GPS-Höhen der Kolonne 2 wurden bestimmt, indem die geozentrischen kartesischen Koordinaten im WGS-84 System aus [Nebiker, 1988] mit einer Translation (Ansatz 6.5-1) so verschoben wurden, dass der Punkt Visp GPS die geozentrischen kartesischen Koordinaten des schweizerischen Besselsystems erhielt. Anschliessend wurden sie in ellipsoidische Besselkoordinaten umgerechnet. Die Geoidhöhe des Punktes Visp GPS entspricht der mit LAG berechneten. N_{GPS} der dritten Kolonne entsprechen der Differenz der ersten beiden Kolonnen. N_{ber} der vierten Kolonne entspricht den berechneten astro-gravimetrischen Cogeoidhöhen plus Modell - Geoidhöhen plus eine Konstante, die so gewählt wurde, dass die beiden Geoidhöhen in Visp GPS übereinstimmen. Daneben sind die Genauigkeiten der Geoidbestimmung aufgeführt. Die Differenzen der letzten Kolonne sind die Differenzen zwischen GPS-Höhen und terrestrisch bestimmten Höhen (orthometrisch korrigiertes Nivellement plus astro-gravimetrisches Geoid). Es sind alle GPS-Bestimmungen aufgeführt, also auch diejenigen der Stationen Sälli GPS, Herbruggen GPS und Embd PP, für die nicht alle Ambiguities aufgelöst werden konnten. Die Stationen Visperterminen PP/TP und Embd PP befinden sich ca 230 m bzw. ca 430 m über dem Talgrund. Die übrigen Differenzen weisen keine offensichtliche Verkippung auf und widerspiegeln die Genauigkeit der Höhenbestimmung mit GPS (mit der Unsicherheit der Geoidbestimmung).

11.2.3.5 Störpotentialbestimmung

Mit Tab. 11.2-3 ist die Qualität der GPS-Höhen kontrolliert. Wenn wir die schlechten GPS-Lösungen Sälli GPS, Herbruggen GPS und Embd PP weglassen und auch die Punkte mit den grössten Differenzen eliminieren (Staldbach GPS und Visperterminen PP/TP), so bleiben 12 Stationen, die noch eine mittlere Abweichung von **25 mm** aufweisen. Diese 12 direkt beobachteten Geoidhöhen aus GPS wurden nun mit den schon erwähnten Beobachtungen zu einer kombinierten lokalen Störpotentialbestimmung herangezogen. In diese Ausgleichung flossen 11 Geoidkoten, 61 Schweremessungen, 14 ξ - und 13 η -Komponenten, total also 100 Beobachtungen.

Verwendetes Modell : E I N S / R

Parameter : B = 10000 m

Varianzen : (a priori)

	Signal	Noise
Undulation:	0.283	0.020 [m]
Xi :	5.834	0.500 ["]
Eta :	5.834	0.700 ["]
Schwere :	39.233	0.500 [mgal]

Offsets zwischen den verschiedenen Datensätzen

Xinull	:	4.5 "	Offset zwischen Lotabweichungen
Etanull	:	-3.0 "	und Schweren
Dxi	:	0.0 "	Offset zwischen Lotabweichungen
Deta	:	0.0 "	und Geoidhöhen alleine
Nnull	:	-2.54 m	Konstanter Offset der Geoidhöhen
Dgnull	:	-56.00 mgal	Konstanter Offset der Schwerewerte

Umax =	0.023	Umin =	-0.021	Uquer =	0.014
Gmax =	0.726	Gmin =	-0.696	Gquer =	0.300
Xmax =	0.460	Xmin =	-0.359	Xquer =	0.227
Emax =	1.075	Emin =	-1.110	Equer =	0.580

Die mittlere Abweichung der GPS-Koten von den kombinierten Werten verringert sich damit auf 14 mm! In den Abb. 11.2-5 bis 11.2-8 sind die Resultate in Form von Isolinienplänen dargestellt.

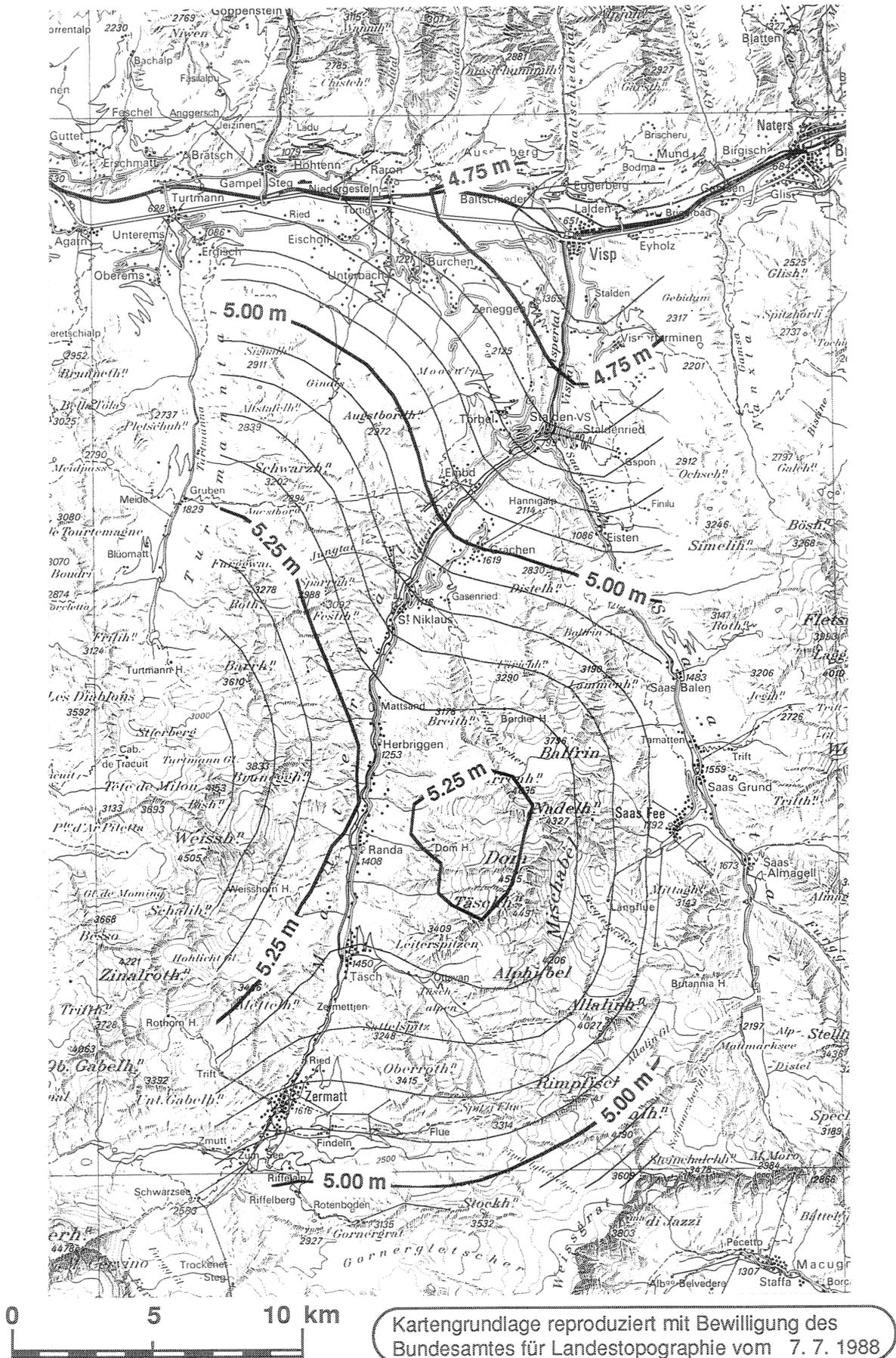


Abb. 11.2-5: Wirkungen der Massenmodelle auf das Geoid

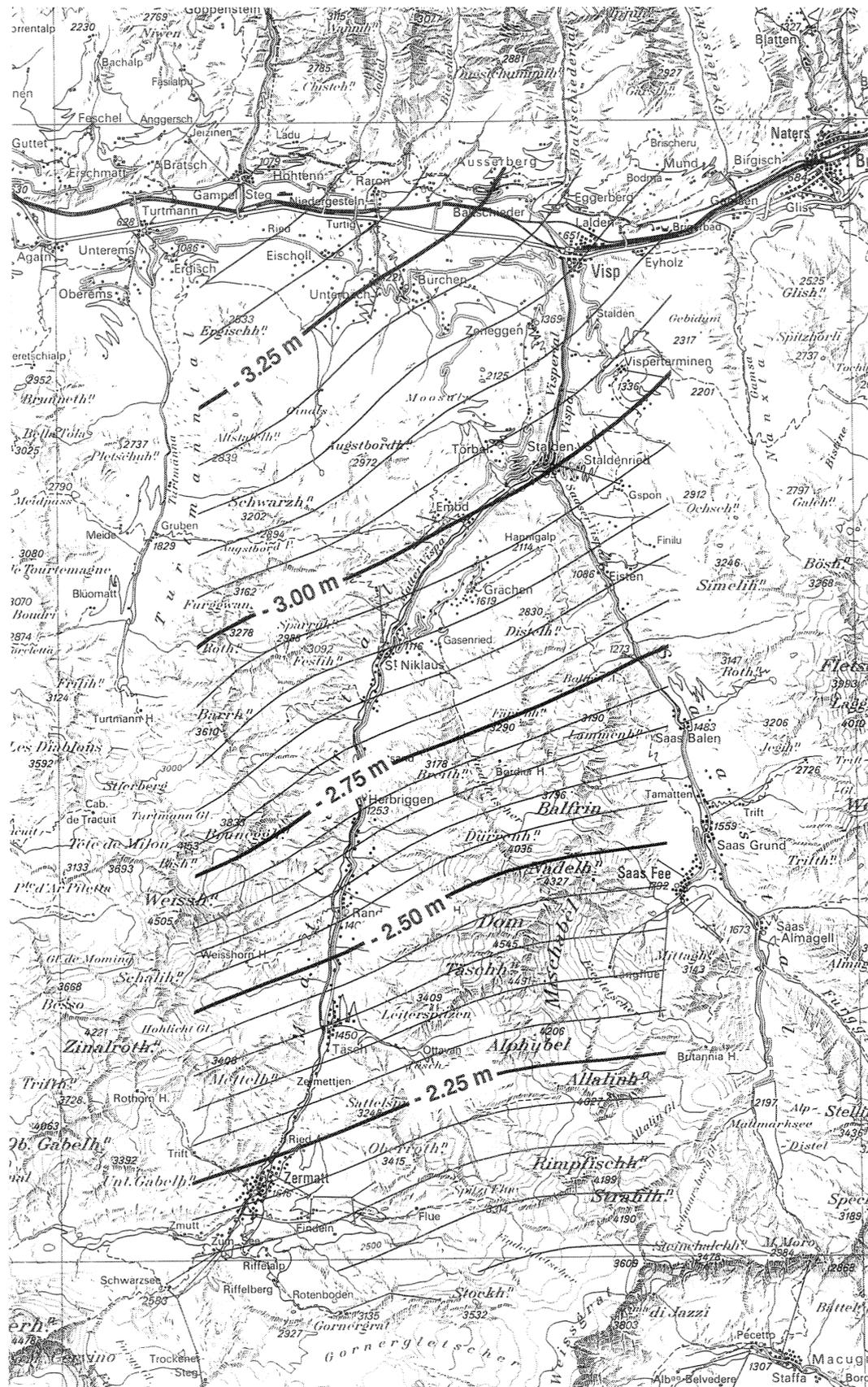


Abb. 11.2-6: Cogeoid der reduzierten Beobachtungen

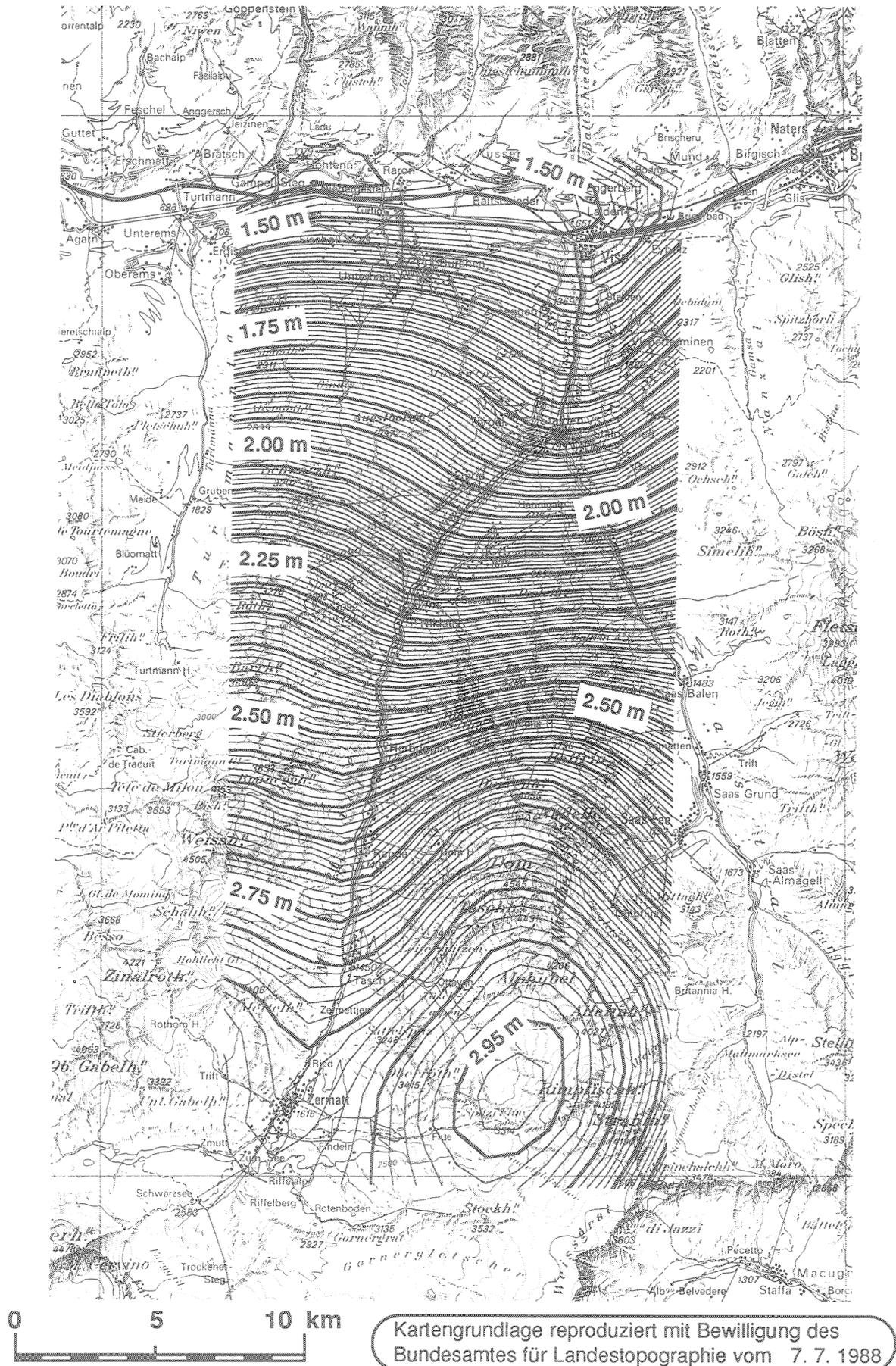


Abb. 11.2-7: Lokales Geoid im Schweizer Datum

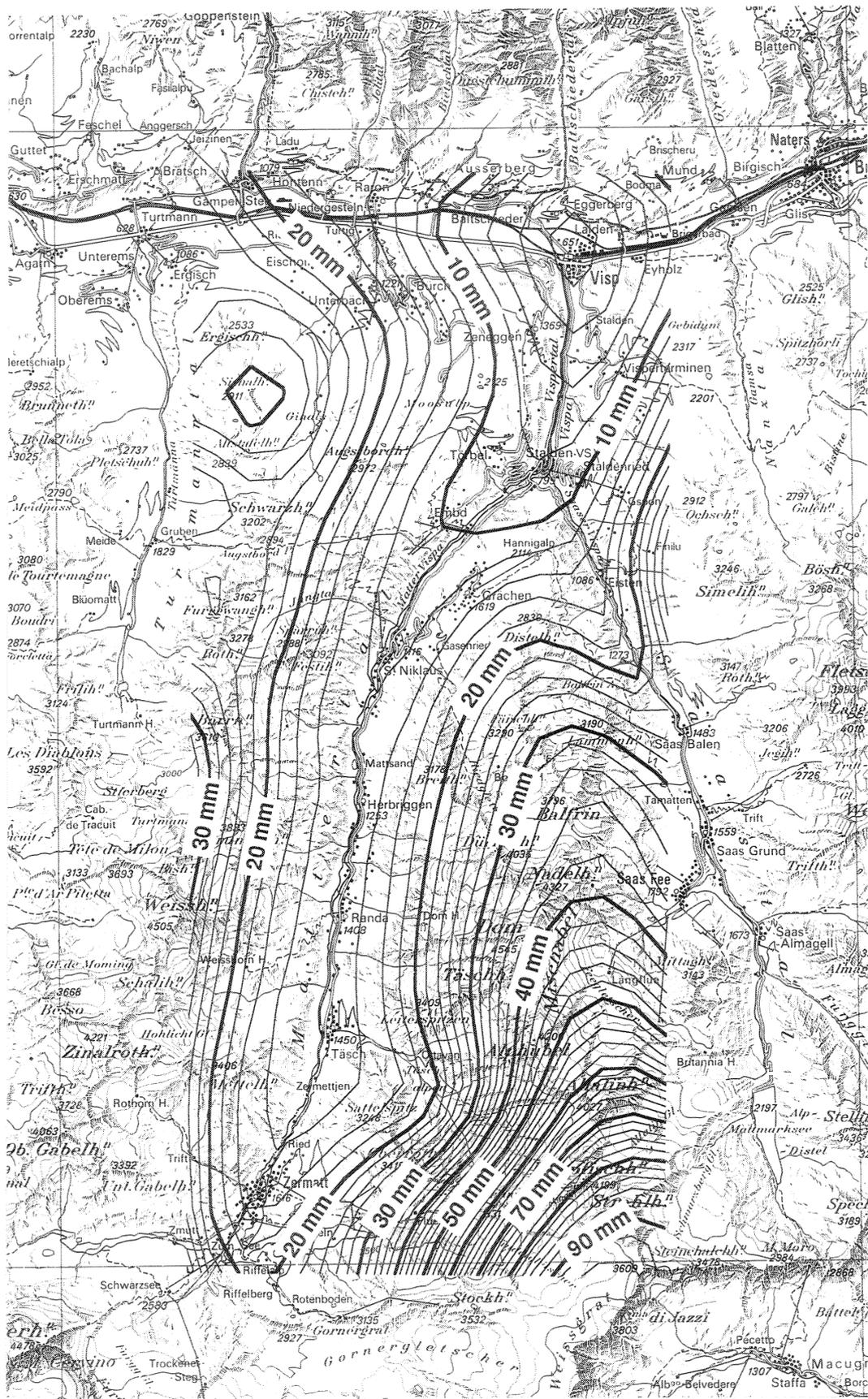


Abb. 11.2-8: Relative Genauigkeit des Geoides zu Visp GPS

11.2.3.6 Mit Korrektur der Lotabweichungen

Die prädierten Lotabweichungen und Geoidhöhen aller Stationspunkte wurden in einem File zusammengestellt und dienten für eine Höhenberechnungsvariante mit Korrektur der Lotabweichungen. Die angenommenen Genauigkeiten waren:

$mZ = 10^{\text{cc}}$ für nur Hin- oder Rückmessung

$mZ = 6^{\text{cc}}$ für gleichzeitige Hin- und Rückmessung

Für die Nivellementsunkte wurden die orthometrischen Höhen der Tabelle 11.2-2 um die Geoidundulationen aus Kapitel 11.2.3.5 korrigiert und als 'Beobachtungen' eingeführt. Der mittlere Fehler am 'Nivellement' wurde mit

$$7.0 \text{ mm} \cdot \sqrt{L \text{ [km]}}$$

angenommen, bestehend aus der Unsicherheit von 1.4 mm vom Nivellement und 1.4" Unsicherheit der prädierten Lotabweichungen (umgerechnet auf einen Kilometer).

$$\kappa_1 = 0.139 \pm 0.015$$

$$\kappa_2 = 0.005 \pm 0.013$$

$$\kappa_3 = 0.111 \pm 0.012$$

$$\kappa_4 = 0.119 \pm 0.012$$

Die Refraktionen verändern sich nochmals. κ_1 verkleinert sich auf 0.14, κ_3 steigt auf 0.11 und wird etwa gleich gross wie κ_4 . Nur κ_2 bleibt auf 0.0. Es kommt also wesentlich darauf an, mit welchen Korrekturen die Zenitdistanzen versehen sind, aus denen Refraktionskoeffizienten gerechnet werden. In [Zeger, 1985] wird erwähnt, dass in Österreich im neuen Höhensystem Höhenwinkelmessungen für Triangulationspunkte grundsätzlich *im System der ellipsoidischen Höhen* ausgeglichen werden sollen, da damit eine bessere Berücksichtigung der Refraktionseinflüsse ermöglicht ist. Durch Berücksichtigung der Geoidhöhen können diese ellipsoidischen Höhen anschliessend in orthometrische Höhen umgerechnet werden.

Maximale Verbesserungen:

Visperterminen PP/TP	Visp PP	rück	-12.4 ^{cc}
Sälli PP	St. Niklaus PP	rück	12.3 ^{cc}
St. Niklaus PP	St. Niklaus Exz.	hin	-10.4 ^{cc}
St. Niklaus PP	St. Niklaus Exz.	rück	-10.5 ^{cc}

Punkt	rohe Höhen		Orthometrische Höhen				Ellipsoidische Höhen			
	ungezwängt	gezwängt	ungezwängt	gezwängt	ungezwängt	gezwängt	ungezwängt	gezwängt	ungezwängt	gezwängt
2 Visp GPS	652.408	0	652.408	0	652.408	0	653.906	0	653.906	0
3 Staldbach GPS	662.126	24	662.127	2	662.138	13	662.135	2	663.668	14
4 Neubrücke GPS	695.567	27	695.585	3	695.593	14	695.603	4	697.242	16
5 Stalden GPS	822.595	34	822.611	4	822.630	19	822.635	5	824.381	20
6 Sälli GPS	1075.695	46	1075.703	5	1075.790	25	1075.777	7	1077.834	27
7 St.Niklaus GPS	1093.524	47	1093.536	5	1093.632	25	1093.621	7	1095.801	27
8 Herbriggen GPS	1232.967	56	1232.971	6	1233.120	30	1233.096	8	1235.520	33
9 Randa GPS	1404.045	64	1404.036	7	1404.222	34	1404.177	9	1406.853	37
10 Täsch GPS	1438.691	69	1438.729	7	1438.878	37	1438.862	10	1441.631	40
11 Schlangengrueb GPS	1527.821	70	1527.861	8	1528.030	38	1528.008	10	1530.838	40
12 Zermatt GPS	1687.544	73	1687.581	8	1687.768	39	1687.728	11	1690.617	43
13 Kalpetran GPS	948.663	43	948.699	5	948.744	23	948.752	6	950.639	25
21 Visp PP	653.091	7	653.091	7	653.089	4	653.089	4	654.584	5
22 Visperterminen PP-TP	890.709	22	890.717	5	890.728	12	890.729	5	892.298	13
23 Neubrücke PP	696.210	27	696.228	3	696.237	14	696.246	4	697.884	16
24 Stalden PP-TP	824.227	34	824.243	4	824.262	19	824.267	5	826.015	20
25 Liechtbiel PP	924.284	37	924.304	4	924.333	20	924.342	5	926.143	21
26 Embd PP	1409.269	41	1409.300	7	1409.366	22	1409.370	8	1411.265	24
27 Sälli PP	1072.183	45	1072.193	6	1072.277	25	1072.265	7	1074.313	27
28 St.Niklaus PP	1110.837	46	1110.852	6	1110.940	25	1110.928	8	1113.044	27
29 Mätteli PP	1287.050	54	1287.057	8	1287.198	29	1287.177	11	1289.515	31
30 Herbriggen PP	1273.456	56	1273.461	7	1273.613	30	1273.588	8	1276.032	33
31 Randa PP	1497.679	63	1497.670	8	1497.856	34	1497.813	10	1500.474	37
32 Wegweiser PP	1426.017	64	1426.018	7	1426.197	35	1426.161	12	1428.876	38
33 Täsch PP	1467.499	68	1467.536	8	1467.690	37	1467.671	11	1470.460	40
34 Schlangengrueb PP	1539.263	70	1539.304	8	1539.473	38	1539.451	10	1542.282	40
35 Schützenhaus PP	1616.916	71	1616.951	8	1617.134	38	1617.105	12	1619.965	41
36 Zermatt PP	1687.992	73	1688.030	8	1688.216	39	1688.177	11	1691.065	43
37 Staldbach Exz.	659.899	24	659.900	2	659.911	13	659.908	2	661.441	14
38 St.Niklaus Exz.	1128.529	47	1128.543	7	1128.633	25	1128.622	8	1130.774	27
39 Randa Exz.	1403.221	64	1403.212	7	1403.398	34	1403.353	9	1406.026	37
40 Liechtbiel TP	995.622	37	995.642	9	995.676	20	995.685	7	997.499	22
41 Schlangengrueb TP	1524.769	70	1524.809	8	1524.978	38	1524.956	10	1527.787	40
42 Zermatt TP	1689.489	73	1689.527	8	1689.714	39	1689.674	11	1692.563	43
50 NF21Ex (Vterm)	664.955	23	664.965	2						
51 NF58Ex (Embd)	980.149	43	980.186	5						
52 NF57 (Embd)	962.085	43	962.118	5						
53 NF67EX (St.N.)	1071.255	47	1071.272	5						
54 NF81EX (Mätteli)	1244.751	54	1244.759	6						
55 NF86EX (Herbr)	1247.335	56	1247.340	6						
56 NF99 (Randa)	1416.744	63	1416.733	7						
57 NF104 (Wegw)	1427.685	64	1427.686	7						
58 NF115 (Täsch)	1440.077	68	1440.114	7						
59 NF126 (Schütz)	1581.703	71	1581.738	8						
60 NF50 (Liechtb)	924.284	37	924.304	4						

Tab. 11.2-4: Höhenzusammenstellung mit m.F. in mm

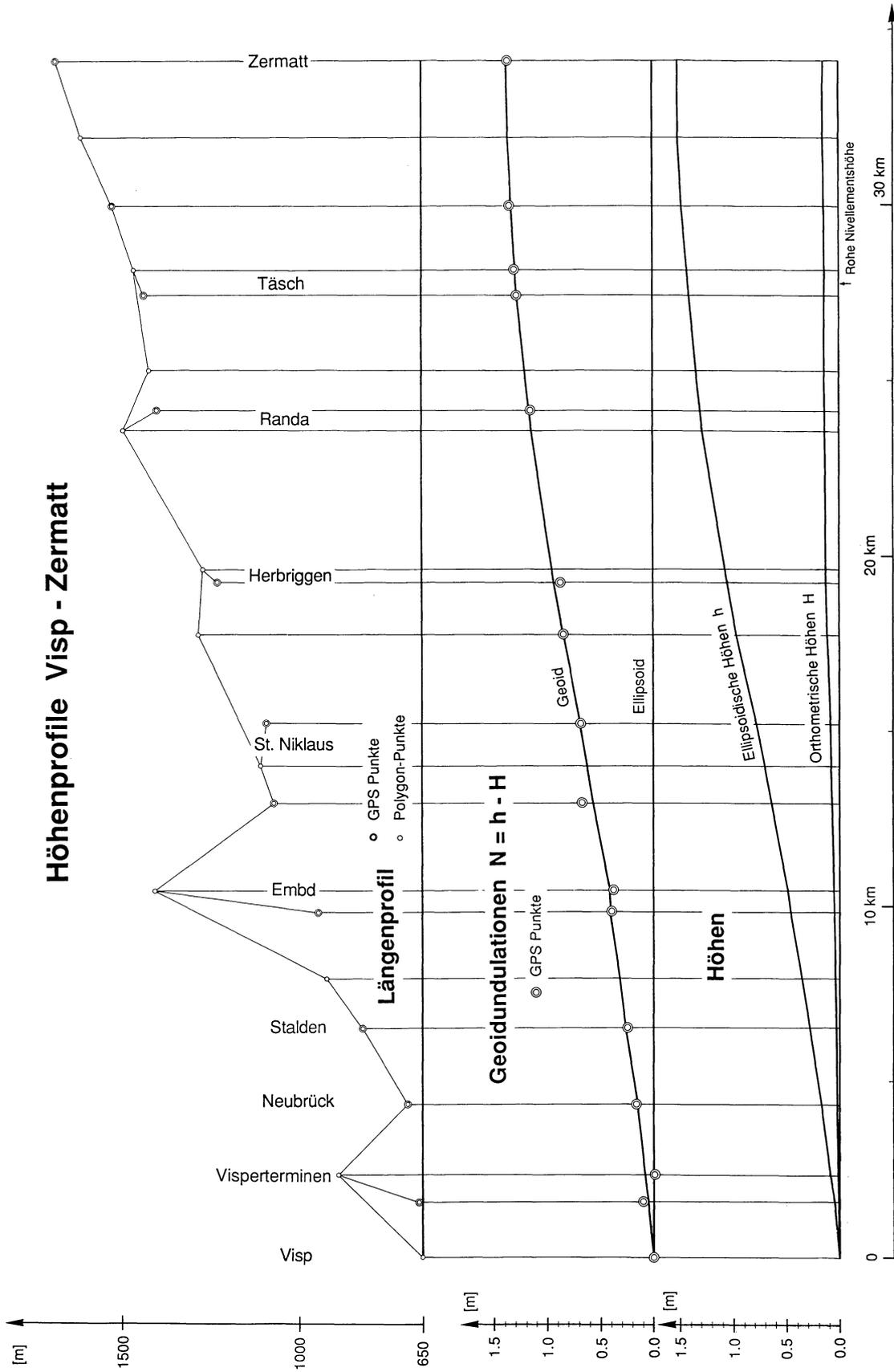


Abb. 11.2-9: Höhenprofile Visp - Zermatt

11.2.4 Lageausgleichung

Die aufbereiteten Distanzen aus [Wirth, 1989, Anhang 5.2] mussten für eine gesonderte Lageberechnung zuerst auf die Sehne auf der Höhe 0 und ins Landeskoordinatensystem reduziert werden. Dazu wurden die im Kapitel 11.2.3.6 berechneten ellipsoidischen Höhen verwendet.

$$\text{Die Formel } s_0 = \sqrt{\frac{D_S^2 - (h_A - h_B)^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R_E}\right)\left(1 + \frac{h_B}{R_E}\right)}} \quad (11.2-9)$$

mit D_S = Schrägdistanz
 h_A, h_B = ellipsoidische Höhen von A bzw. B
 R_E = Erdradius = 6378.816 km

liefert direkt streng auf Höhe 0 korrigierte Distanzen, die dann noch ins Projektionssystem mit

$$d = s_0 \cdot \left(1 + \frac{X_M^2}{2 R_E^2}\right) \quad \begin{array}{l} X_M : \text{mittlere X - Koordinate} \\ R_E : \text{Erdradius} \end{array} \quad (11.2-10)$$

reduziert werden müssen.

Für die Lageausgleichung, die im zweiten Teil der Diplomarbeit von S. Nebiker durchgeführt wurde, wurde ein bestehendes Lageausgleichsprogramm in TurboPascal auf dem Macintosh Plus verwendet und ausgebaut. Die aus den aufbereiteten Messdaten resultierenden Messgenauigkeiten sind:

ME 5000 : $M_D = 0.3 \text{ mm} + 0.8 \text{ ppm}$
 E2, T2000 : $M_R = 2''$ (dazu 0.5 mm Zentriefehler)

Die beobachteten Richtungen wurden mit Formel 11.2-11 um die Einflüsse der Lotabweichungen korrigiert:

$$R_{\text{ell}} = R_{\text{gem}} - (\xi \sin Az - \eta \cos Az) \operatorname{tg} h_A \quad (11.2-11)$$

- mit R_{ell} = auf das Ellipsoid reduzierte Richtung
 R_{gem} = gemessene Richtung
 ξ = Nord-Süd Komponente der Lotabweichung
 η = Ost-West Komponente der Lotabweichung
 Az = Azimut
 h_A = Höhenwinkel

Für die Berücksichtigung der GPS - Daten mussten diese vorerst ins Landeskoordinatensystem umgerechnet werden. Dazu wurden die geozentrischen kartesischen WGS-84 Koordinaten wie in Kap. 11.2.3.4 beschrieben so transliert, dass der Punkt Visp GPS die geozentrischen kartesischen Besselkoordinaten des CH-Systems erhielt und anschliessend in schweizerische Projektionskoordinaten umgerechnet (Tab. 11.2-5). Damit wurden an den GPS-Resultaten weder Rotationen um die Koordinatenachsen angebracht noch eine Massstabsänderung durchgeführt.

Nr.	Punktbezeichnung	Y	X	h
2	Visp GPS	634005.828	126709.371	653.906
3	Staldbach GPS	634241.007	125275.791	663.734
4	Neubrück GPS	633829.478	122359.728	697.264
5	Stalden GPS	633395.104	120284.382	824.381
6	Sälli GPS	629152.039	115937.407	1077.950
7	St. Niklaus GPS	628310.951	113993.265	1095.799
8	Herbruggen GPS	627263.780	110249.521	1235.467
9	Randa GPS	626416.943	105561.244	1406.823
10	Täsch GPS	626384.228	102168.629	1441.643
11	Schlangengrueb GPS	625693.669	99723.681	1530.851
12	Zermatt GPS	623706.385	96020.440	1690.598
13	Kalpetran GPS	631018.613	118094.274	950.652
21	Visp PP	633916.823	127000.370	654.615
22	Visperterminen PP/TP	634417.248	124309.332	892.215
26	Embd PP	630055.367	118403.412	1411.255
29	Mätteli PP	627026.356	111744.913	1289.513
33	Täsch PP	625953.815	101503.129	1470.475

Tab. 11.2-5: Landeskoordinaten und ellipsoidische Höhen aus GPS-Messungen

Diese GPS-Daten wurden als "Beobachtungen" herangezogen, indem die Koordinaten mit einem Gewicht als Beobachtung eingeführt werden. Dies entspricht der stochastischen Lagerung auf direkt beobachteten unbekanntem Parametern. Als mittlerer Fehler einer

solchen Koordinate wurden $6 \text{ mm} + 0.6\text{mm}\cdot D[\text{km}]$ eingeführt, wo D die Entfernung zum Fixpunkt Visp GPS ist. Die 6mm konstanter Anteil sind sicherheitshalber etwas höher als die 4 mm in [Cocard et al., 1988] ausgewiesenen, es wurden aber zum Beispiel auch keine Antennenoffsets berücksichtigt.

Bei den GPS-Auswertungen [Nebiker, 1988] zeigte sich, dass die Punkte Sälli GPS, Herbriggen GPS und Embd PP schlechte Lagekoordinaten aufwiesen. Sie wurden deshalb nicht in die definitive Berechnung eingeführt. Bei Sälli und Embd konnten nicht alle Mehrdeutigkeiten gelöst werden, weshalb hier mit gewissen Differenzen gerechnet werden muss. Der Punkt Herbriggen sah jedoch bei der Berechnung gut aus, erst bei einer andern Version trat diese Differenz zu Tage.

Insgesamt wurden 4 Lageausgleichsvarianten berechnet, deren Resultate in der Tabelle 11.2-6 ausgewiesen sind.

- Die strengste Variante 1 geht von oben erwähnten Genauigkeiten aus, bringt die Richtungskorrekturen der Lotabweichungen an und verwendet die GPS-Beobachtungen.

Die grössten Richtungskorrekturen durch die Lotabweichungen betragen:

Von Liechtbiel PP nach Embd PP Korr.	=	8.9 ^{cc}
Von Liechtbiel PP nach Liechtbiel TP Korr.	=	8.9 ^{cc}
Von Embd PP nach Kalpetran GPS Korr.	=	10.9 ^{cc}

Resultate der Lageausgleichung Variante 1 des Polygonzuges Visp - Zermatt:

Anzahl unbekannter Parameter	=	88
Anzahl Beobachtungen	=	102
Anzahl "Lagerungsbeobachtungen"	=	28

Sigma0	=	1.00000
S0	=	0.88636

In Tab. 11.2-6 sind neben den Koordinaten die mittleren Fehler sY und sX derselben in [mm] angegeben. Die mittleren Lagefehlerellipsen dieser Lösung sind in Abb. 11.2-11 dargestellt.

Die Differenzen in den drei nicht berücksichtigten GPS-Stationen betragen:

6	Sälli GPS	629'152.039	115'937.407	mit GPS
		<u>629'151.904</u>	<u>115'937.351</u>	terrestrisch
	Differenz	+ 13.5 cm	+ 5.6 cm	
		=====	=====	
8	Herbriggen GPS	627'263.780	110'249.521	mit GPS
		<u>627'263.576</u>	<u>110'249.331</u>	terrestrisch
	Differenz	+ 20.4 cm	+ 19.0 cm	
		=====	=====	
26	Embd PP	630'055.367	118'403.412	mit GPS
		<u>630'055.252</u>	<u>118'403.216</u>	terrestrisch
	Differenz	+ 11.5 cm	+ 19.6 cm	
		=====	=====	

Dies bedeutet also, dass GPS Messungen, bei denen die Ambiguities nicht alle aufgelöst werden können, nicht den von GPS erwarteten Genauigkeiten entsprechen und somit nicht verwendet werden können.

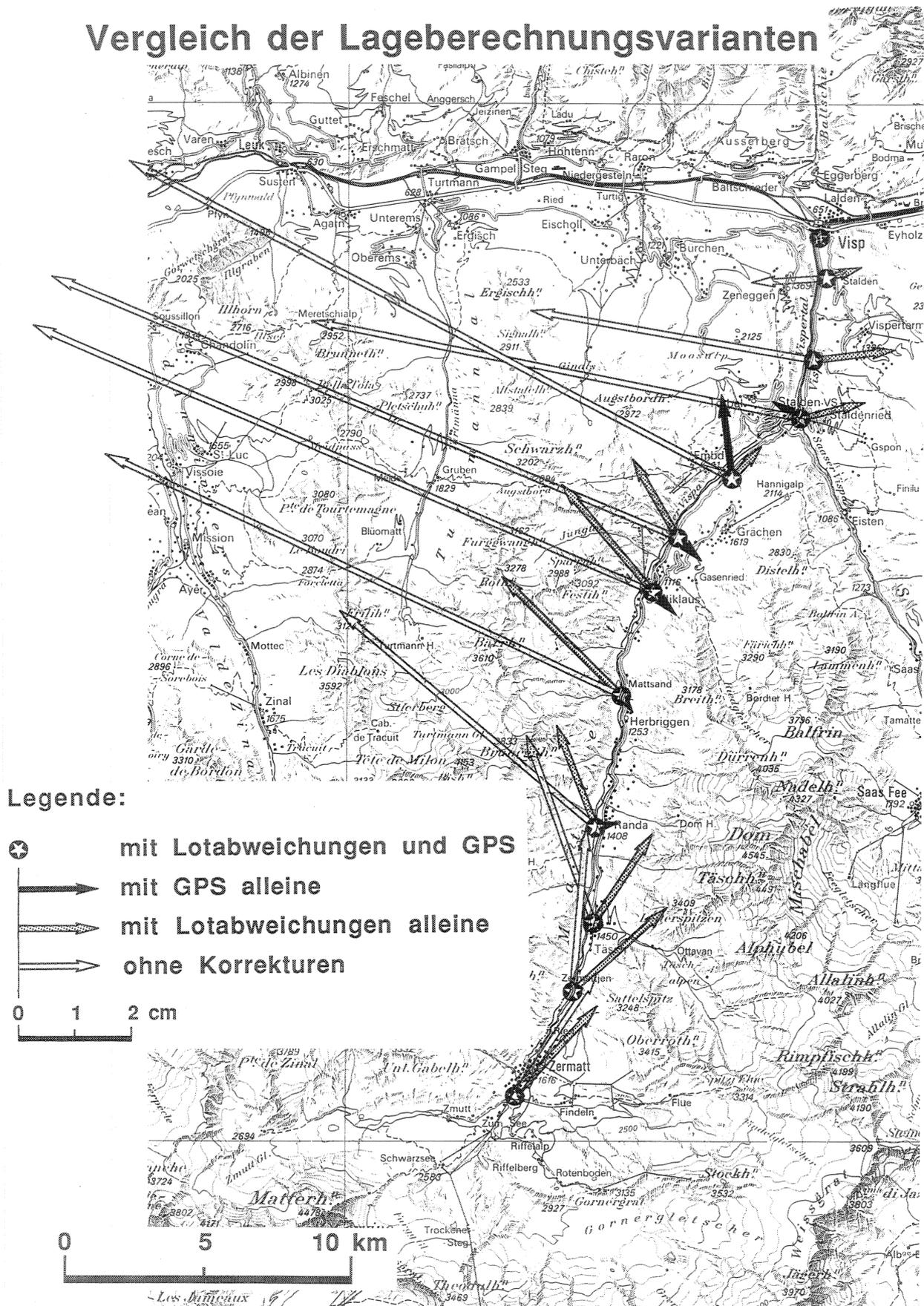
- Bei der Variante 2 wurden die Einflüsse der Lotabweichungen nicht berücksichtigt, wohl aber die GPS-Beobachtungen. Die Differenzen zur Variante 1 sind in der Tabelle 11.2-6 ausgewiesen und bleiben überall unter dem cm bis auf den Punkt Kalpetran GPS, der eine Differenz in X von 15 mm aufweist. (Dieser wurde terrestrisch vom Hangpunkt Embd PP aus eingemessen!).
- Die Version 3 berücksichtigt die Lotabweichungen wieder, benutzt aber bei den GPS-Beobachtungen nur gerade den Fixpunkt Visp GPS und die Y-Komponente des Punktes Zermatt GPS (mit der GPS-Genauigkeit, damit der terrestrische Zug ohne gemessene Azimute überhaupt gelagert werden kann). Die Differenzen zur Variante 1 betragen nun maximal 21 mm an beiden Komponenten, was immer noch erstaunlich wenig ist.
- Die Variante 4 schliesslich berücksichtigt keine Lotabweichungen und benutzt von den GPS-Beobachtungen nur gerade die Minimalvariante zur Lagerung wie Variante 3. Da der Zug sich seitlich einigermaßen frei bewegen kann, treten hier Differenzen zu Variante 1 bis 11 cm in Y und 5.5 cm in X auf.

Punkt	Variante ①				②		③		④	
	GPS-gestützt, mit LA				+ GPS - LA		- GPS + LA		- GPS - LA	
	Y	sY	X	sX	ΔY	ΔX	ΔY	ΔX	ΔY	ΔX
2 Visp GPS	634005.819	0.0	126709.348	0.0	0	0	0	0	0	0
3 Staldbach GPS	634241.003	3.9	125275.785	1.8	-1	-1	6	2	-13	-1
4 Neubrück GPS	633829.516	4.6	122359.723	2.2	-1	2	14	2	-49	8
5 Stalden GPS	633395.163	5.4	120284.376	2.7	-5	3	11	3	-85	16
6 Sälli GPS	629152.025	7.6	115937.314	6.1	4	-4	-8	14	-109	45
7 St. Niklaus GPS	628311.085	7.8	113993.234	5.8	4	-4	-16	19	-108	46
8 Herbruggen GPS	627263.763	10.2	110249.293	5.8	2	-3	-21	21	-90	42
9 Randa GPS	626417.166	11.0	105561.214	5.8	4	1	-7	18	-45	38
10 Täsch GPS	626384.518	9.7	102168.599	6.1	1	-2	10	16	-12	33
11 Schlangengrueb GPS	625693.973	10.8	99723.648	5.9	-1	-1	16	15	2	29
12 Zermatt GPS	623706.720	17.9	96020.417	9.5	-2	-1	14	16	14	22
13 Kalpetran GPS	631018.708	6.3	118094.245	5.6	-2	15	5	6	-105	55
21 Visp PP	633916.809	1.4	127000.347	0.6	-1	0	-2	0	2	1
22 Visperterminen PP/TP	634417.274	3.7	124309.330	1.6	5	0	12	3	-15	-2
23 Neubrück PP	633807.358	4.6	122387.055	2.2	0	2	14	2	-48	9
24 Stalden PP/TP	633400.419	5.4	120256.254	2.7	-5	2	11	2	-86	15
25 Liechtbiel PP	632481.383	6.2	119263.771	3.6	-8	6	9	4	-102	31
26 Embd PP	630055.344	6.2	118403.180	5.6	-7	0	6	10	-108	45
27 Sälli PP	629187.696	7.5	116079.904	6.1	3	-4	-7	15	-109	46
28 St. Niklaus PP	628555.936	7.5	115071.554	5.9	5	-5	-12	17	-108	45
29 Mätteli PP	627026.517	8.7	111744.861	5.8	2	-3	-20	21	-100	41
30 Herbruggen PP	627327.287	10.2	109929.107	5.8	2	-3	-21	21	-88	43
31 Randa PP	626849.207	10.8	106005.149	5.7	8	-4	-10	19	-46	37
32 Wegweiser PP	626282.625	10.6	104388.961	5.7	4	-2	-2	17	-33	33
33 Täsch PP	625954.116	9.6	101503.102	5.8	0	-2	12	15	-8	29
34 Schlangengrueb PP	625694.164	10.9	99683.949	5.9	-2	-2	16	14	2	28
35 Schützenhaus PP	624722.735	13.0	98083.930	7.0	-2	-1	16	14	8	25
36 Zermatt PP	623719.691	17.8	96037.829	9.5	-2	-1	14	16	14	22
37 Staldbach Exz.	634218.846	3.9	125280.458	1.7	-2	-1	6	2	-14	-1
38 St. Niklaus Exz.	628558.255	7.4	114419.229	5.9	4	-5	-15	18	-108	45
39 Randa Exz.	626385.321	10.9	105626.724	5.8	4	1	-8	18	-46	38
40 Liechtbiel TP	632252.893	6.3	119078.855	3.9	-8	5	8	5	-103	32
41 Schlangengrueb TP	625622.201	10.9	99695.109	6.0	-2	-1	16	14	1	28
42 Zermatt TP	623706.473	17.8	96034.762	9.5	-3	-1	14	16	14	22

Tab. 11.2-6: Lageberechnungsvarianten; Differenzen der Varianten 2 bis 4 zu 1 in mm.

In Variante 1 sind die Landeskoordinaten ausgewiesen, die nach einer nachträglichen Helmerttransformation der berechneten Lösung auf fünf miteingemessene Triangulationspunkte erhalten wurden. Bei mittleren Restklaffen von 4.6 cm wurde ein Massstab von $-3.42 \text{ ppm} \pm 1.66 \text{ ppm}$ und eine Verdrehung von $-6.71^{\text{cc}} \pm 1.06^{\text{cc}}$ erhalten.

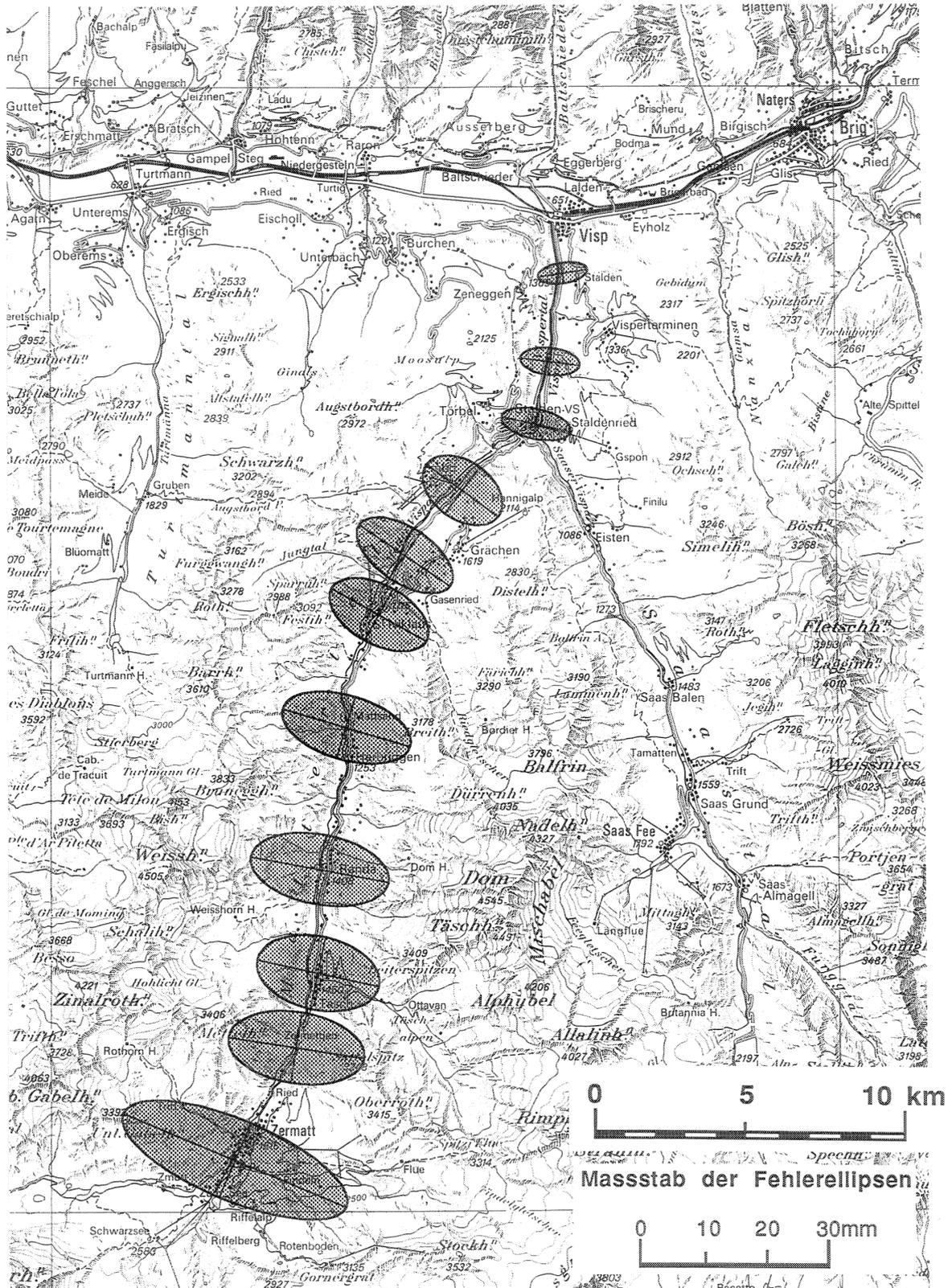
Vergleich der Lageberechnungsvarianten



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

Abb. 11.2-10: Vergleich der Lageberechnungsvarianten

Mittlere Lage - Fehlerellipsen



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

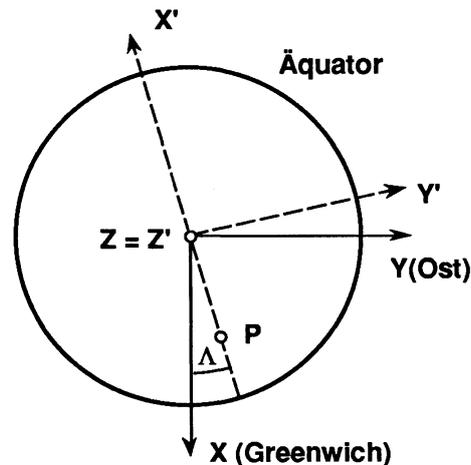
Abb. 11.2-11: Mittlere Fehlerellipsen zu Fixpunkt Visp GPS

11.2.5 Dreidimensionale Ausgleichung

Für die Beschreibung des Programmes RAUMTRI, das für die dreidimensionale Ausgleichung verwendet wurde, sei auf [Schneider, Wunderlin, 1981] verwiesen. Um den späteren Einbau der GPS-Beobachtungen verständlicher zu machen und die Wirkungsweise des Programmes zu verstehen, soll hier eine kurze Herleitung der verwendeten Formeln gegeben werden, die mit Hilfe der Skizzen und der Abbildung 11.2-12 verifiziert werden können. Die Formeln werden in **geozentrischen kartesischen Koordinaten** ausgedrückt.

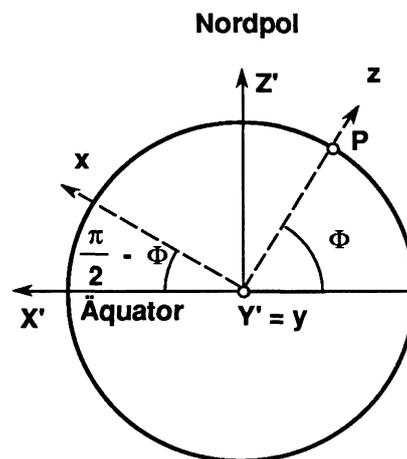
$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Lambda & -\sin\Lambda & 0 \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

(Drehung und
Übergang auf
Linkssystem)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\Phi & 0 & \sin\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\Phi & 0 & \sin\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\Lambda & -\sin\Lambda & 0 \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

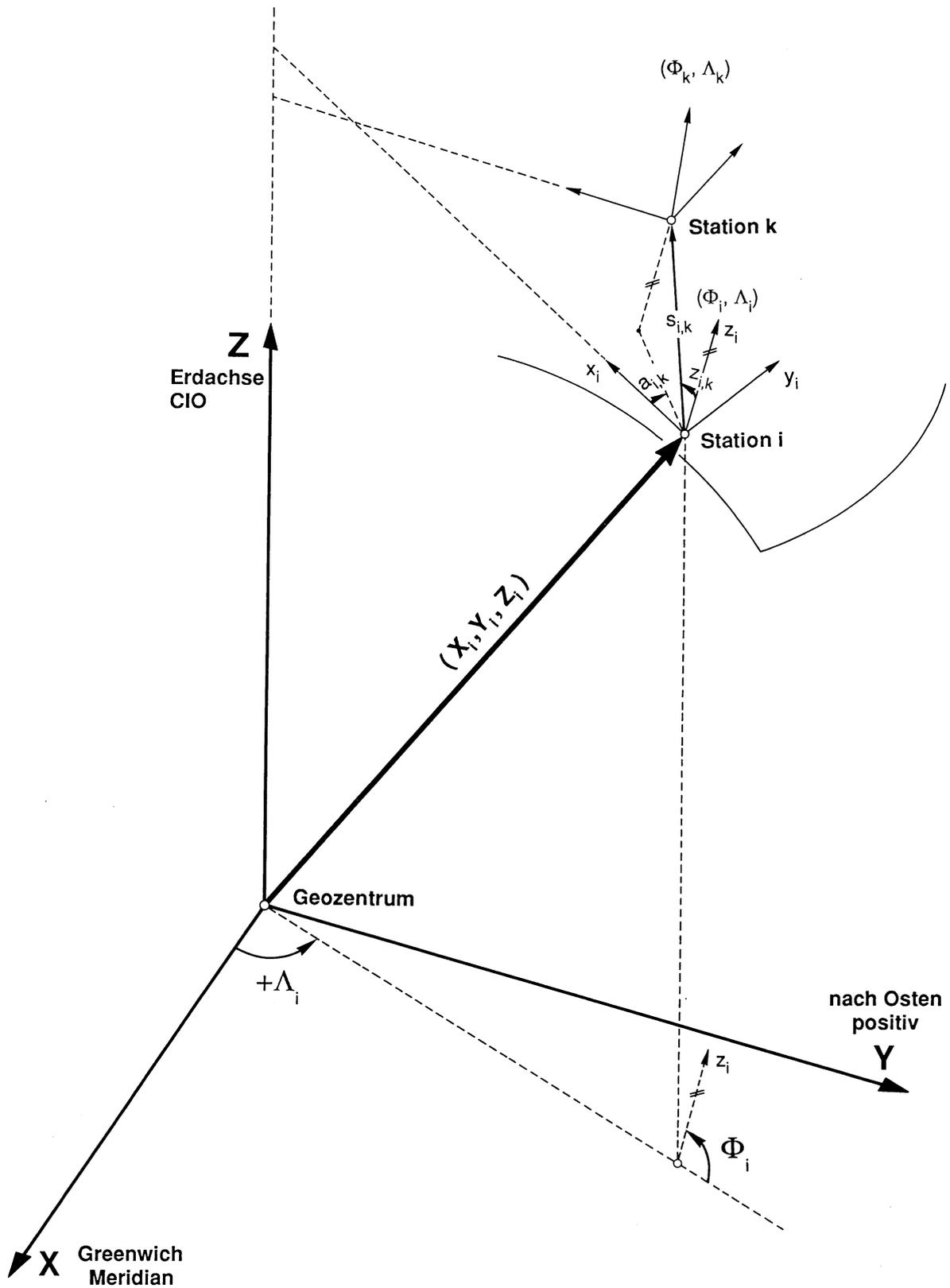


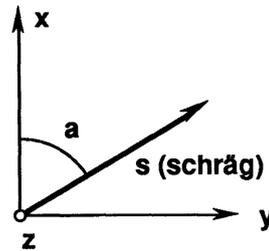
Abb. 11.2-12: Bezug der topozentrischen zu den geozentrischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\Phi \cos\Lambda & -\sin\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ \cos\Phi \cos\Lambda & \cos\Phi \sin\Lambda & \sin\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (11.2-12)$$

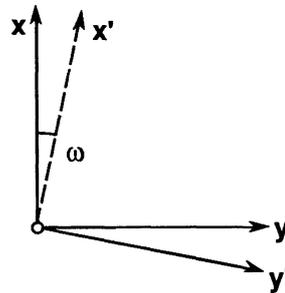
A_i

Dies ist der Zusammenhang zwischen den lokalen (astronomisch im Schwerfeld orientierten) und den globalen geozentrischen kartesischen Koordinaten. Der Zusammenhang zwischen den lokalen kartesischen Koordinaten und den Beobachtungsgrößen s (Distanz), z (Zenitdistanz) und a (Azimut) ist einfach:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin z \cos a \\ s \sin z \sin a \\ s \cos z \end{pmatrix} \quad (11.2-13)$$



Wenn wir noch die Orientierung ω für Satzmessungen berücksichtigen, so ergeben sich



die **Beobachtungsgleichungen** (für ausgeglichene Beobachtungen)

$$\begin{pmatrix} s \sin z \cos a \\ s \sin z \sin a \\ s \cos z \end{pmatrix}_{i \rightarrow k} - \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\Omega_i} \begin{pmatrix} -\sin\Phi \cos\Lambda & -\sin\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ \cos\Phi \cos\Lambda & \cos\Phi \sin\Lambda & \sin\Phi \end{pmatrix}_{A_i} \begin{pmatrix} X_k - X_i \\ Y_k - Y_i \\ Z_k - Z_i \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (11.2-14)$$

Orientierungsmatrix

(11.2-14)

Links vom Minuszeichen sind die Beobachtungen (ausgedrückt im Horizontsystem) enthalten, rechts davon die unbekannt Parameter (die geozentrischen Koordinaten der Punkte i und k, die via die Drehmatrizen Ω_i und A_i , die die Astronomische Position Φ und Λ sowie die Orientierung ω des Punktes i enthalten, ebenfalls im Horizontsystem vorliegen). Für die Orientierungsmatrix Ω wird die Voraussetzung gemacht, dass die Richtungen vororientiert werden, d.h. für die weiteren Ableitungen, dass in 11.2-14 mit $\omega \ll 1$ $\cos \omega$ durch 1 und $\sin \omega$ durch ω ersetzt werden darf:

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} 1 & \omega & 0 \\ -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \mathbf{d}\Omega \quad (11.2-15)$$

Nun bilden wir das totale Differential der Gleichung 11.2-14 und beginnen mit dem linken Teil oder der Gleichung 11.2-13:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} s \cos z \cos a & -s \sin z \sin a & \sin z \cos a \\ s \cos z \sin a & s \sin z \cos a & \sin z \sin a \\ -s \sin z & 0 & \cos z \end{pmatrix}}_{(\mathbf{CB})_{i \rightarrow k}^{-1}} \begin{pmatrix} dz \\ dr \\ ds \end{pmatrix} \quad (11.2-16)$$

dr = Richtungsänderung

Für die Beobachtungsgleichungen benötigen wir die Inverse $(\mathbf{CB})_{i \rightarrow k}$:

$$(\mathbf{CB})_{i \rightarrow k}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos z \cos a & -\sin a & \sin z \cos a \\ \cos z \sin a & \cos a & \sin z \sin a \\ -\sin z & 0 & \cos z \end{pmatrix}}_{\text{orthogonal !}} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s \sin z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{CB})_{i \rightarrow k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s \sin z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos z \cos a & \cos z \sin a & -\sin z \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ \sin z \cos a & \sin z \sin a & \cos z \end{pmatrix}_{i \rightarrow k} \quad (11.2-17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Omega_i A_i)}{\partial \Phi} &= \frac{\partial (\mathbf{E} A_i)}{\partial \Phi} = \frac{\partial A_i}{\partial \Phi} = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\Phi \cos\Lambda & -\cos\Phi \sin\Lambda & -\sin\Phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\Phi \cos\Lambda & -\sin\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_i \end{aligned} \quad (11.2-18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Omega_i A_i)}{\partial \Lambda} &= \frac{\partial (\mathbf{E} A_i)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial A_i}{\partial \Lambda} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin\Phi \sin\Lambda & -\sin\Phi \cos\Lambda & 0 \\ -\cos\Lambda & -\sin\Lambda & 0 \\ -\cos\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \cos\Lambda & 0 \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.2-19)$$

$$\frac{\partial (\Omega_i A_i)}{\partial \omega} = \frac{\partial (\mathbf{d}\Omega_i A_i)}{\partial \omega} = \frac{\partial (\mathbf{d}\Omega_i)}{\partial \omega} A_i, \text{ mit 11.2-15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_i \quad (11.2-20)$$

Mit diesen Ableitungen kann das totale Differential der Beobachtungsgleichungen 11.2-14 geschrieben werden, was den linearisierten Zusammenhang zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen s , z und a zwischen Punkt i und k und den Unbekannten $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, $\delta\omega$ des Punktes i und δX , δY und δZ der Punkte i und k darstellt.

$$\boxed{(\mathbf{CB})_{i \rightarrow k}^{-1} \begin{pmatrix} dz \\ dr \\ ds \end{pmatrix} - A_i \begin{pmatrix} \delta X_k - \delta X_i \\ \delta Y_k - \delta Y_i \\ \delta Z_k - \delta Z_i \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial A_i}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial A_i}{\partial \Lambda} \delta\Lambda + \frac{\partial (\mathbf{d}\Omega_i)}{\partial \omega} A_i \delta\omega \right) \begin{pmatrix} X_k - X_i \\ Y_k - Y_i \\ Z_k - Z_i \end{pmatrix} = 0} \quad (11.2-21)$$

Masstabsfaktor

Die *Ablesung* s kann um einen Masstab m verfälscht sein. Die masstabsfreie gemessene Distanz kann geschrieben werden als:

$$s_{mf} = \frac{s}{m}$$

Die *ausgeglichene* masstabsfreie Distanz ist dann:

$$\bar{s}_{mf} = \frac{s}{m} + v = \frac{s}{\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{m_0 + \delta m}} + v = \frac{s}{1 + \delta m} + v$$

$$\bar{s}_{mf} \approx s(1 - \delta m) + v \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{s}_{mf}}{\partial m} = -s} \quad (11.2-22)$$

Für $-s \text{ [m]} \cdot 10^{-3}$ wird δm zu $(\text{Dim}(v) / \text{[km]})$. Falls $\text{Dim}(v)$ (Dimension der Verbesserungen der Distanzen) in [mm] angesetzt wird, erhält man δm in $(\text{[mm]} / \text{[km]})$ oder in ppm.

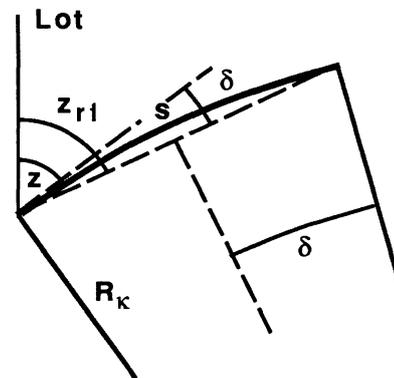
Refraktionsunbekannte (vgl. auch Kapitel 11.2-3)

Die Ablesung z kann um eine unbekannte Refraktion verfälscht sein. Für die refraktionskorrigierte ausgeglichene Zenitdistanz gilt:

$$\bar{z}_{rf} = z_{beob} - \delta + v, \quad \delta = \frac{s}{2 R_{\kappa}}$$

$$R_{\kappa} = \text{Krümmungsradius der Lichtkurve} = \frac{R_E}{\kappa \sin(z)}$$

R_E = Erdradius



$$\text{also } \delta = \frac{s \sin(z) \cdot \kappa}{2 R_E} \quad \text{oder} \quad \bar{z}_{rf} = z_{beob} - \frac{s \sin(z) \cdot \kappa}{2 R_E} + v$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{z}_{rf}}{\partial \kappa} [\text{cc}] = -\frac{s \sin(z)}{2 R_E} \rho^{cc} \approx -s \sin(z) \cdot \frac{636620}{2 \cdot 6378800} = -0.05 \cdot s \sin(z) [\text{m}]}$$

(11.2-23)

Die **vollständigen Verbesserungsgleichungen** für die z, r, s ergeben sich daraus wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v_z \\ v_r \\ v_s \end{pmatrix} &= \mathbf{CB}_{i \rightarrow k} \cdot \mathbf{A}_i \begin{pmatrix} \delta X_k - \delta X_i \\ \delta Y_k - \delta Y_i \\ \delta Z_k - \delta Z_i \end{pmatrix} && \text{Koordinaten - Unbekannte} \\
 &+ \mathbf{CB}_{i \rightarrow k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{d}\Omega_i}{\partial \omega} \right) \mathbf{A}_i (\vec{\mathbf{X}}_k - \vec{\mathbf{X}}_i) \cdot \delta \omega \\
 &+ \mathbf{CB}_{i \rightarrow k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \Phi} \right) (\vec{\mathbf{X}}_k - \vec{\mathbf{X}}_i) \cdot \delta \Phi && \text{Rotations - Unbekannte} \\
 &+ \mathbf{CB}_{i \rightarrow k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \Lambda} \right) (\vec{\mathbf{X}}_k - \vec{\mathbf{X}}_i) \cdot \delta \Lambda \\
 &+ \begin{pmatrix} \dots & -0.05 \cdot s \sin(z)_{i,k} & \dots \\ & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \delta \kappa_{i \rightarrow k} \\ \vdots \end{pmatrix} && \text{Refraktions - Unbekannte} \\
 &&& \text{(für } z \text{ angebracht)} \\
 &+ \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ & 0 & \\ & -10^{-3} \cdot s_{i,k} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \delta m_{i \rightarrow k} \\ \vdots \end{pmatrix} && \text{Massstabs - Unbekannte} \\
 &&& \text{(für } s \text{ angebracht)} \\
 &- \begin{pmatrix} z_{\text{beob}} - z^0 \\ r_{\text{beob}} - r^0 \\ s_{\text{beob}} - s^0 \end{pmatrix} && \text{Absolutglieder}
 \end{aligned}$$

(11.2-24)

Die Berechnung der Näherungswerte erfolgt mit 11.2-12 und 13 im lokalen Horizontsystem:

$$\begin{pmatrix} x_k^0 - x_i^0 \\ y_k^0 - y_i^0 \\ z_k^0 - z_i^0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_i \underbrace{\begin{pmatrix} X_k^0 - X_i^0 \\ Y_k^0 - Y_i^0 \\ Z_k^0 - Z_i^0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{geozentrisches} \\ \text{System} \\ \text{Näherungskordinaten}}} = \begin{pmatrix} s^0 \sin z^0 \cos a^0 \\ s^0 \sin z^0 \sin a^0 \\ s^0 \cos z^0 \end{pmatrix}$$

lokal

daraus

$$\begin{aligned} s_{i,k}^0 &= \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2 + (z_k^0 - z_i^0)^2} \\ z_{i,k}^0 &= \arccos \left(\frac{z_k^0 - z_i^0}{s_{i,k}^0} \right) \\ a_{i,k}^0 &= \arctg \left(\frac{y_k^0 - y_i^0}{x_k^0 - x_i^0} \right) \quad ; \quad r_{i,k}^0 = \arctg \left(\frac{y_k^0 - y_i^0}{x_k^0 - x_i^0} \right) \end{aligned} \quad (11.2-25)$$

Jetzt müssen noch die Verbesserungsgleichungen für die astronomischen Beobachtungen a , Φ , Λ und ellipsoidische Höhendifferenzen bestimmt werden:

- Die Verbesserungsgleichungen für astronomische Azimute α sehen gleich aus wie diejenigen für Richtungsbeobachtungen, nur ohne Orientierungs - Unbekannte.
- Verbesserungsgleichungen für astronomische Breitenbeobachtungen:

$$v_{\Phi} = \delta\Phi_i - (\Phi_{\text{beob}} - \Phi^0) \quad (11.2-26)$$

- Verbesserungsgleichungen für astronomische Längenbeobachtungen:

$$v_{\Lambda} = \delta\Lambda_i - (\Lambda_{\text{beob}} - \Lambda^0) \quad (11.2-27)$$

- Verbesserungsgleichungen für Beobachtungen ellipsoidischer Höhen h :

Als Näherungskordinaten der Netzkpunkte werden in RAUMTRI Landeskoordinaten Y, X, h mit ellipsoidischen Höhen gegeben. Diese werden in geozentrische kartesische Koordinaten X, Y, Z umgerechnet. Es ist also eine Näherungshöhe h_i^0 durch die Eingabe vorhanden. Liegt für Punkt i eine ellipsoidische Höhenbeobachtung h_i vor, so wird die Differenz $h_i - h_i^0$ entlang der physikalischen Lotrichtung als Beobachtung (Komponente z der lokalen topozentrischen Koordinaten) eingeführt, die die Koordinaten X_i, Y_i, Z_i beeinflussen.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix}
 (A_i)_{3. \text{ Zeile}} \cdot \begin{pmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{pmatrix} \\
 \uparrow \\
 \text{Koordinaten - Unbekannte} \\
 \text{des Punktes } i
 \end{matrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Entspricht der (lokalen) z-Änderung (also Höhenänderung)} \\
 \text{von Punkt } i, \text{ infolge von Änderungen der geozentrischen} \\
 \text{Koordinaten des Punktes } i.
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\boxed{v_h = (A_i)_{3. \text{ Zeile}} \cdot \begin{pmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{pmatrix} - (h_{i \text{ beob}} - h_i^0)} \quad (11.2-28)$$

Voraussetzung ist selbstverständlich, dass die 'beobachteten' h_i auf dasselbe geodätische Datum bezogen sind wie die Näherungskordinaten (mit den ellipsoidischen Höhen).

Soweit war das Programm RAUMTRI schon vorhanden. Als zusätzliche Beobachtungen sollen nun noch die GPS - Beobachtungen eingeführt werden:

Einführung von GPS - Beobachtungen

Für die Berücksichtigung von GPS - Beobachtungen ist es von grossem Vorteil, dass die Ausgleichung der terrestrischen Beobachtungen in einem geozentrischen kartesischen Koordinatensystem angesetzt wurden. Auch die GPS - Auswertungen fallen in geozentrischen Koordinaten an. Beide Systeme (astronomisches und GPS) sind so gut wie möglich identisch, bei beiden muss die Bewegung der Erde im raumfesten System bekannt sein und wird gleich berücksichtigt. Trotzdem muss infolge der Realisierung des erdfesten

Referenzsystems bei GPS (vgl. Kap. 5) mit geringfügigen Differenzen gerechnet werden. Strenggenommen muss für die (räumliche) Transformation von einem System ins andere eine 7 - Parameter Transformation angesetzt werden (Ursprungsdifferenz der beiden Systeme ΔX , ΔY und ΔZ , drei Verdrehungen der Achsen α , β und γ sowie eine Massstabsdifferenz). Da aber die Koordinaten des Fixpunktes bei der terrestrischen Ausgleichung einigermassen willkürlich festgelegt werden und ebenso die Absolutkoordinaten bei GPS sehr unsicher sind (einige m), schien es uns nicht sinnvoll, 3 Unbekannte ΔX , ΔY und ΔZ anzusetzen, um diese Differenzen zu berücksichtigen. Die Stärken sowohl der terrestrischen wie auch der GPS - Beobachtungen liegen in den relativen Beziehungen zwischen zwei Punkten (Beobachtung von Punkt zu Punkt bzw. Baselines bei GPS). Für solche relativen Positionen müssen also nur noch 3 Verdrehungen und ein Massstab berücksichtigt werden, wie aus der folgenden Herleitung hervorgeht:

$$\boxed{\vec{X}_i^{\text{terr}} = m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_i^{\text{GPS}} + \overrightarrow{\Delta X}^{\text{terr}}} \quad (11.2-29)$$

(7 - Parameter-Ansatz für Koordinaten)

mit

\vec{X}_i^{terr} = Vektor der geozentrischen terrestrischen Koordinaten

m = Massstabsfaktor (Skalar)

\mathbf{D} = 3 x 3 Drehmatrix

\vec{X}_i^{GPS} = Vektor der geozentrischen GPS - Koordinaten

$\overrightarrow{\Delta X}^{\text{terr}}$ = Ortsvektor des Ursprungs des GPS-Koordinatensystems im terrestrischen System ausgedrückt

Für Koordinatendifferenzen gilt:

$$\begin{aligned} \vec{X}_k^{\text{terr}} - \vec{X}_i^{\text{terr}} &= m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_k^{\text{GPS}} - m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_i^{\text{GPS}} + \overrightarrow{\Delta X}^{\text{terr}} - \overrightarrow{\Delta X}^{\text{terr}} \\ &= m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_k^{\text{GPS}} - m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_i^{\text{GPS}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\vec{X}_k^{\text{terr}} - \vec{X}_i^{\text{terr}} \right) = m \cdot \mathbf{D} \cdot \left(\vec{X}_k^{\text{GPS}} - \vec{X}_i^{\text{GPS}} \right)} \quad (11.2-30)$$

(4 - Parameter-Ansatz für Koordinatendifferenzen)

wenn wir für $\left(\vec{X}_k^{\text{terr}} - \vec{X}_i^{\text{terr}}\right)$ einfacher $\vec{X}_{i,k}^{\text{terr}}$ schreiben, ergibt sich

$$\vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} = m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}} + \vec{v}, \quad \text{also} \quad \vec{v} = \vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} - m \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}}$$

$$m = 1 + dm$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + d\mathbf{D}$$

dm und $d\mathbf{D}$ enthalten kleine Grössen

$$\vec{v} = \vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} - (1 + dm) \cdot (\mathbf{E} + d\mathbf{D}) \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}} = \vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} - (\mathbf{E} + dm \cdot \mathbf{E} + d\mathbf{D} + \underbrace{dm \cdot d\mathbf{D}}_{\substack{\uparrow \\ 0}}) \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}}$$

$$\vec{v} = \vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} - \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}} - dm \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}} - d\mathbf{D} \cdot \vec{X}_{i,k}^{\text{GPS}}$$

Im ausgeglichenen $\vec{X}_{i,k}^{\text{terr}}$ stecken die Näherungskoodinaten und die Unbekannten verkürzten Parameter der Koordinaten.

$$\vec{X}_{i,k}^{\text{terr}} = \begin{pmatrix} X_{i,k}^{\text{terr}} + \delta X_k - \delta X_i \\ Y_{i,k}^{\text{terr}} + \delta Y_k - \delta Y_i \\ Z_{i,k}^{\text{terr}} + \delta Z_k - \delta Z_i \end{pmatrix}$$

Damit können die Verbesserungsgleichungen ausgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta X_k & 0 & 0 \\ 0 & \delta Y_k & 0 \\ 0 & 0 & \delta Z_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta X_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta Y_i & 0 \\ 0 & 0 & \delta Z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dm \cdot X_{i,k}^{\text{GPS}} \\ dm \cdot Y_{i,k}^{\text{GPS}} \\ dm \cdot Z_{i,k}^{\text{GPS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i,k}^{\text{GPS}} \\ Y_{i,k}^{\text{GPS}} \\ Z_{i,k}^{\text{GPS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{i,k}^{\text{GPS}} - X_{i,k}^{\text{terr}} \\ Y_{i,k}^{\text{GPS}} - Y_{i,k}^{\text{terr}} \\ Z_{i,k}^{\text{GPS}} - Z_{i,k}^{\text{terr}} \end{pmatrix} \quad (\text{Absolutglied})$$

(11.2-31)

Die Gewichte der GPS - Beobachtungen sollten wenigstens die Korrelationen der Komponenten (X, Y, Z) eines Punktes untereinander widerspiegeln, weshalb beschlossen wurde, aus der K_{XX} der GPS - Auswertung 3 x 3 Submatrizen herauszugreifen und zu invertieren, so dass 3 x 3 gefüllte Gewichtsmatrizen daraus entstehen. Die Schwierigkeit liegt dann darin, von den zu optimistischen inneren Koordinatengenauigkeiten weg zu kommen und ein s_0 zu wählen, das der tatsächlichen äusseren Genauigkeit der GPS - Beobachtungen besser entspricht. Erste Berechnungen zeigten, dass die so erhaltenen Genauigkeiten zu unterschiedlich waren. Punkte, auf denen zwei oder drei mal eine Session à 3 Stunden beobachtet worden war, erhielten trotz der s_0 - Anpassung noch zu optimistische Genauigkeiten (2 bis 3 mm). Deshalb wurde aus den GPS-Auswertungen eine aus allen Punkten gemittelte 3x3 - Gewichtsmatrix ausgewählt, die die Charakteristik der Genauigkeiten enthält. Diese wurde dann in Eigenwerte und Eigenvektoren zerlegt. Ein Eigenwert ist deutlich kleiner als die beiden anderen etwa gleich grossen, und sein zugehöriger Eigenvektor zeigt im lokalen Horizontsystem in Richtung der Höhe. Diese mittlere Gewichtsmatrix wurde danach so mit einem Skalar multipliziert, dass die beiden grösseren daraus berechneten Eigenwerte ca 1 betragen (dies entspricht einem mittleren Lagefehler von ca 1 cm).

'Einheits-Gewichtsmatrix' P (symmetrisch)

0.4677	-0.1631	-0.3789
	0.9995	-0.2444
		0.6315

Eigenwerte aus P

0.0760	1.1228	0.8999
--------	--------	--------

Eigenvektoren aus P

0.7249	0.0613	-0.6861
0.2930	0.8740	0.3877
0.6234	-0.4821	0.6156

Der erste Eigenwert von 0.0760 zusammen mit seinem Eigenvektor (erste Spalte der Eigenvektoren) stellen die geometrisch schwächer bestimmte Höhe dar.

Aus den GPS-Auswertungen wurden nun Basislinien zum Fixpunkt Visp GPS gewählt und deren Distanz gerechnet. Daraus wurde ein mittlerer Lagefehler m_1 von $6\text{mm} + 0.6$ ppm abgeleitet und in das Gewicht $p_1 = 1 / m_1^2$ umgerechnet und damit die 'Einheits-Gewichtsmatrix' \mathbf{P} skalar multipliziert. Dies wird als Genauigkeit der Basislinie betrachtet.

Resultate der Ausgleichung:

Summe pvv	=	65.27307	(aus den Verbesserungen berechnet)
Sigma0	=	1.00000	(Gewichtseinheit a priori)
S0	=	0.88680	(Gewichtseinheit a posteriori)
S0 ² / Sigma0 ²	=	0.78642	(Testgrösse)
Freiheitsgrad	=	83	(Anzahl überschüssiger Beobachtungen)

Gegenüber der Ausgleichung in [Wirth, 1989] sind die GPS-Messungen des Punktes Täsch PP dazugekommen. Durch die lokale Schwerefeldbestimmung des Kapitels 11.2.3.5 konnte in allen Stationen, in denen keine astronomische Position gemessen wurde, diese aus den berechneten Lotabweichungen neu berechnet werden. Ebenfalls die aus dem astro-gravimetrisch korrigierten Nivellement erhaltenen ellipsoidischen Höhen der GPS-Stationen haben sich damit geändert. Die ellipsoidische Höhe des Punktes Zermatt GPS ist 7.3 cm höher als bei der letzten Ausgleichung. Diese Änderungen bewirkten eine Reduktion von s_0 um 10%!

In Tabelle 11.2-7 sind von der Neuausgleichung nur noch die dreidimensionalen Koordinaten mit ellipsoidischen Höhen, die Refraktionsunbekannten und die Transformationsparameter der GPS-Beobachtungen aufgeführt. Anders als in [Wirth, 1989] wurden diese Transformationsparameter nicht mehr entweder völlig offen gelassen oder starr auf Null geklemmt, sondern mit den Genauigkeitsangaben des Kapitels 5 als Unbekannte belassen, gleichzeitig aber als Beobachtung mit Wert Null und einem mittleren Fehler von 0.2^{cc} für die Orientierungen und 0.2 ppm für den Massstab eingeführt. Die ausgewiesenen Werte für diese Grössen belegen, dass keine signifikanten Verkippungen und kein Massstab vorhanden ist.

Die ausgeglichenen Koordinaten und ihre mittleren Fehler

PUNKT		DX M	SIGMAX M	SX M	X0 M	X0 + DX M	H/B/L M/G			
2	VISP GPS	X	0.0000	0.0000	0.0000	4373119.940	4373119.940			653.906
2	VISP GPS	Y	0.0000	0.0000	0.0000	605337.248	605337.248	51	43	57.555
2	VISP GPS	Z	0.0000	0.0000	0.0000	4587757.171	4587757.171	8	75	65.916
21	VISP PP	X	-0.0012	0.0021	0.0019	4372923.647	4372923.646			654.584
21	VISP PP	Y	-0.0001	0.0018	0.0016	605221.872	605221.872	51	43	86.694
21	VISP PP	Z	0.0001	0.0022	0.0019	4587959.083	4587959.083	8	75	53.317
23	NEUBR PP	X	0.0188	0.0058	0.0051	4376273.823	4376273.842			697.902
23	NEUBR PP	Y	0.0119	0.0065	0.0057	605548.840	605548.852	51	39	25.602
23	NEUBR PP	Z	-0.0040	0.0057	0.0051	4584801.987	4584801.983	8	75	33.805
25	LIECHT PP	X	0.0267	0.0075	0.0067	4378843.486	4378843.513			926.168
25	LIECHT PP	Y	0.0452	0.0082	0.0073	604548.031	604548.076	51	36	14.121
25	LIECHT PP	Z	-0.0053	0.0079	0.0070	4582811.589	4582811.584	8	73	40.309
26	EMBD PP	X	0.0188	0.0092	0.0081	4380114.383	4380114.402			1411.287
26	EMBD PP	Y	0.0536	0.0085	0.0075	602269.441	602269.495	51	35	29.350
26	EMBD PP	Z	-0.0019	0.0090	0.0079	4582575.071	4582575.069	8	69	90.276
24	STALDEN PP/TP	X	0.0487	0.0067	0.0060	4377941.923	4377941.972			826.037
24	STALDEN PP/TP	Y	0.0575	0.0071	0.0063	605356.731	605356.788	51	37	12.830
24	STALDEN PP/TP	Z	-0.0305	0.0070	0.0062	4583422.440	4583422.409	8	74	73.466
28	STNIK PP	X	0.0414	0.0100	0.0089	4382493.519	4382493.561			1113.061
28	STNIK PP	Y	0.0186	0.0105	0.0093	601066.235	601066.254	51	31	97.041
28	STNIK PP	Z	-0.0068	0.0097	0.0086	4580058.765	4580058.758	8	67	72.082
27	SÄLLI PP	X	0.0417	0.0097	0.0086	4381661.575	4381661.616			1074.330
27	SÄLLI PP	Y	0.0290	0.0105	0.0093	601594.656	601594.685	51	32	97.536
27	SÄLLI PP	Z	-0.0086	0.0095	0.0084	4580726.799	4580726.791	8	68	63.711
36	ZERMATT PP	X	0.1071	0.0164	0.0145	4397131.797	4397131.904			1691.040
36	ZERMATT PP	Y	-0.2755	0.0237	0.0210	598101.201	598100.926	51	12	96.491
36	ZERMATT PP	Z	0.0805	0.0170	0.0150	4567290.800	4567290.880	8	60	65.273
22	VISP PERT PP/TP	X	-0.0360	0.0045	0.0040	4374948.553	4374948.517			892.308
22	VISP PERT PP/TP	Y	0.0467	0.0061	0.0054	605992.056	605992.103	51	41	17.412
22	VISP PERT PP/TP	Z	0.0385	0.0052	0.0046	4586269.062	4586269.101	8	76	23.276
29	MÄTTELI PP	X	0.0323	0.0120	0.0106	4385197.205	4385197.238			1289.526
29	MÄTTELI PP	Y	-0.0188	0.0122	0.0108	599877.317	599877.298	51	28	65.202
29	MÄTTELI PP	Z	0.0114	0.0120	0.0106	4577887.036	4577887.047	8	65	49.813

PUNKT			DX	SIGMAX	SX	X0	X0 + DX	H/B/L		
			M	M	M	M	M	M/G		
30	HERBRI PP	X	0.0463	0.0121	0.0107	4386446.701	4386446.748			1276.037
30	HERBRI PP	Y	-0.0454	0.0142	0.0125	600343.669	600343.623	51	26	83.561
30	HERBRI PP	Z	0.0051	0.0122	0.0108	4576618.344	4576618.349	8	65	91.897
31	RANDA PP	X	0.0765	0.0125	0.0111	4389469.188	4389469.264			1500.463
31	RANDA PP	Y	-0.1184	0.0151	0.0134	600256.905	600256.787	51	22	91.530
31	RANDA PP	Z	0.0414	0.0129	0.0114	4574061.577	4574061.618	8	65	20.640
32	WEGGWEI PP	X	0.0827	0.0129	0.0114	4390649.843	4390649.926			1428.868
32	WEGGWEI PP	Y	-0.1504	0.0151	0.0134	599839.230	599839.079	51	21	30.222
32	WEGGWEI PP	Z	0.0500	0.0131	0.0116	4572890.893	4572890.943	8	64	38.205
33	TÄSCH PP	X	0.0916	0.0127	0.0112	4392783.310	4392783.402			1470.449
33	TÄSCH PP	Y	-0.2042	0.0144	0.0128	599786.494	599786.290	51	18	41.889
33	TÄSCH PP	Z	0.0491	0.0128	0.0113	4570919.787	4570919.836	8	63	89.227
34	SCHLANG PP	X	0.0940	0.0132	0.0117	4394166.071	4394166.165			1542.265
34	SCHLANG PP	Y	-0.2293	0.0160	0.0142	599705.051	599704.822	51	16	60.155
34	SCHLANG PP	Z	0.0491	0.0134	0.0119	4569709.754	4569709.804	8	63	50.787
35	SCHÜTZ PP	X	0.0991	0.0144	0.0128	4395490.123	4395490.222			1619.944
35	SCHÜTZ PP	Y	-0.2491	0.0184	0.0163	598898.368	598898.119	51	15	0.620
35	SCHÜTZ PP	Z	0.0643	0.0149	0.0132	4568657.718	4568657.783	8	62	10.387
37	STALDB EX	X	0.0045	0.0044	0.0039	4374120.916	4374120.921			661.449
37	STALDB EX	Y	0.0003	0.0066	0.0058	605682.731	605682.731	51	42	14.600
37	STALDB EX	Z	0.0033	0.0052	0.0046	4586774.313	4586774.317	8	75	95.466
39	RANDA EX	X	0.0764	0.0127	0.0113	4389736.121	4389736.197			1406.016
39	RANDA EX	Y	-0.1248	0.0153	0.0135	599823.465	599823.340	51	22	53.906
39	RANDA EX	Z	0.0442	0.0130	0.0115	4573732.523	4573732.567	8	64	53.736
6	SÄLLI GPS	X	0.0413	0.0098	0.0087	4381770.773	4381770.815			1077.852
6	SÄLLI GPS	Y	0.0279	0.0107	0.0094	601572.946	601572.974	51	32	83.300
6	SÄLLI GPS	Z	-0.0097	0.0096	0.0085	4580630.754	4580630.744	8	68	58.477
8	HERBRI GPS	X	0.0416	0.0121	0.0107	4386198.344	4386198.386			1235.526
8	HERBRI GPS	Y	-0.0393	0.0141	0.0125	600247.011	600246.972	51	27	15.596
8	HERBRI GPS	Z	0.0006	0.0122	0.0108	4576811.201	4576811.201	8	65	82.969
13	KALPETR GPS	X	0.0247	0.0094	0.0083	4379891.959	4379891.984			950.664
13	KALPETR GPS	Y	0.0449	0.0087	0.0077	603209.797	603209.842	51	34	97.982
13	KALPETR GPS	Z	-0.0184	0.0091	0.0081	4582025.383	4582025.364	8	71	28.778
3	STALDB GPS	X	0.0039	0.0044	0.0039	4374122.843	4374122.847			663.677
3	STALDB GPS	Y	-0.0003	0.0066	0.0059	605705.340	605705.340	51	42	14.120
3	STALDB GPS	Z	0.0021	0.0052	0.0046	4586772.607	4586772.609	8	75	98.657

PUNKT		DX M	SIGMAX M	SX M	X0 M	X0 + DX M	H/B/L M/G		
4	NEUBR GPS	X 0.0148	0.0058	0.0051	4376290.018	4376290.033			697.260
4	NEUBR GPS	Y 0.0110	0.0065	0.0057	605573.297	605573.308	51	39	22.858
4	NEUBR GPS	Z -0.0071	0.0058	0.0051	4584782.541	4584782.534	8	75	36.976
5	STALDEN GPS	X 0.0181	0.0068	0.0060	4377921.394	4377921.412			824.403
5	STALDEN GPS	Y 0.0324	0.0071	0.0063	605348.764	605348.797	51	37	15.644
5	STALDEN GPS	Z -0.0059	0.0071	0.0063	4583440.709	4583440.703	8	74	72.731
7	STNIK GPS	X 0.0395	0.0103	0.0091	4383285.734	4383285.773			1095.816
7	STNIK GPS	Y 0.0072	0.0108	0.0096	600922.592	600922.600	51	30	89.366
7	STNIK GPS	Z -0.0164	0.0099	0.0087	4579300.489	4579300.473	8	67	36.113
9	RANDA GPS	X 0.0782	0.0128	0.0113	4389779.289	4389779.367			1406.842
9	RANDA GPS	Y -0.1252	0.0153	0.0136	599861.221	599861.096	51	22	47.343
9	RANDA GPS	Z 0.0450	0.0130	0.0115	4573687.594	4573687.639	8	64	58.271
10	TÄSCH GPS	X 0.0886	0.0129	0.0114	4392231.270	4392231.358			1441.621
10	TÄSCH GPS	Y -0.1935	0.0145	0.0128	600148.430	600148.236	51	19	8.227
10	TÄSCH GPS	Z 0.0398	0.0130	0.0115	4571359.509	4571359.549	8	64	51.453
11	SCHLANG GPS	X 0.0918	0.0132	0.0117	4394129.885	4394129.976			1530.821
11	SCHLANG GPS	Y -0.2292	0.0160	0.0142	599700.089	599699.860	51	16	64.124
11	SCHLANG GPS	Z 0.0475	0.0134	0.0119	4569729.074	4569729.121	8	63	50.784
12	ZERMATT GPS	X 0.1098	0.0165	0.0146	4397145.623	4397145.732			1690.592
12	ZERMATT GPS	Y -0.2754	0.0238	0.0211	598089.921	598089.646	51	12	94.756
12	ZERMATT GPS	Z 0.0835	0.0170	0.0151	4567278.417	4567278.501	8	60	63.403
40	LIECHTB TP	X 0.0596	0.0079	0.0070	4379055.134	4379055.194			997.524
40	LIECHTB TP	Y -0.0016	0.0085	0.0075	604345.625	604345.624	51	35	95.758
40	LIECHTB TP	Z -0.0301	0.0084	0.0074	4582736.046	4582736.016	8	73	7.258
41	SCHLANG TP	X 0.1026	0.0132	0.0117	4394157.640	4394157.743			1527.769
41	SCHLANG TP	Y -0.1871	0.0160	0.0142	599631.269	599631.082	51	16	61.301
41	SCHLANG TP	Z 0.0363	0.0135	0.0119	4569707.290	4569707.326	8	63	40.463
42	ZERMATT TP	X 0.0890	0.0164	0.0146	4397136.779	4397136.868			1692.538
42	ZERMATT TP	Y -0.2926	0.0238	0.0211	598088.540	598088.247	51	12	96.190
42	ZERMATT TP	Z 0.0998	0.0170	0.0151	4567289.765	4567289.864	8	60	63.375
38	STNIK EX	X 0.0407	0.0102	0.0090	4382972.165	4382972.206			1130.790
38	STNIK EX	Y 0.0128	0.0103	0.0091	601131.115	601131.128	51	31	31.833
38	STNIK EX	Z -0.0089	0.0098	0.0087	4579619.890	4579619.881	8	67	71.971

	DX	SIGMAX	SX	X0	X0 + DX	ART
REFR	2.35	1.51	1.34	0.125	0.148	Refraktion 1
REFR	-8.16	1.24	1.10	0.125	0.043	Refraktion 2
REFR	-2.10	1.23	1.09	0.125	0.104	Refraktion 3
REFR	-1.09	1.33	1.18	0.125	0.114	Refraktion 4
ALPHA	0.00	0.20	0.18	0.000	0.000	GPS-Verdrehung in cc
BETA	0.01	0.19	0.17	0.000	0.005	GPS-Verdrehung in cc
GAMMA	0.00	0.20	0.18	0.000	-0.001	GPS-Verdrehung in cc
GMST	0.00	0.19	0.17	0.000	0.002	GPS-Massstab in ppm

Tab. 11.2-7: Die Koordinaten- und zusätzlichen Unbekannten

Von den Verbesserungen an den Beobachtungen interessieren hier besonders die **Verbesserungen an den GPS-Koordinaten**, die nachfolgend geozentrisch und im Landeskoordinatensystem dargestellt sind.

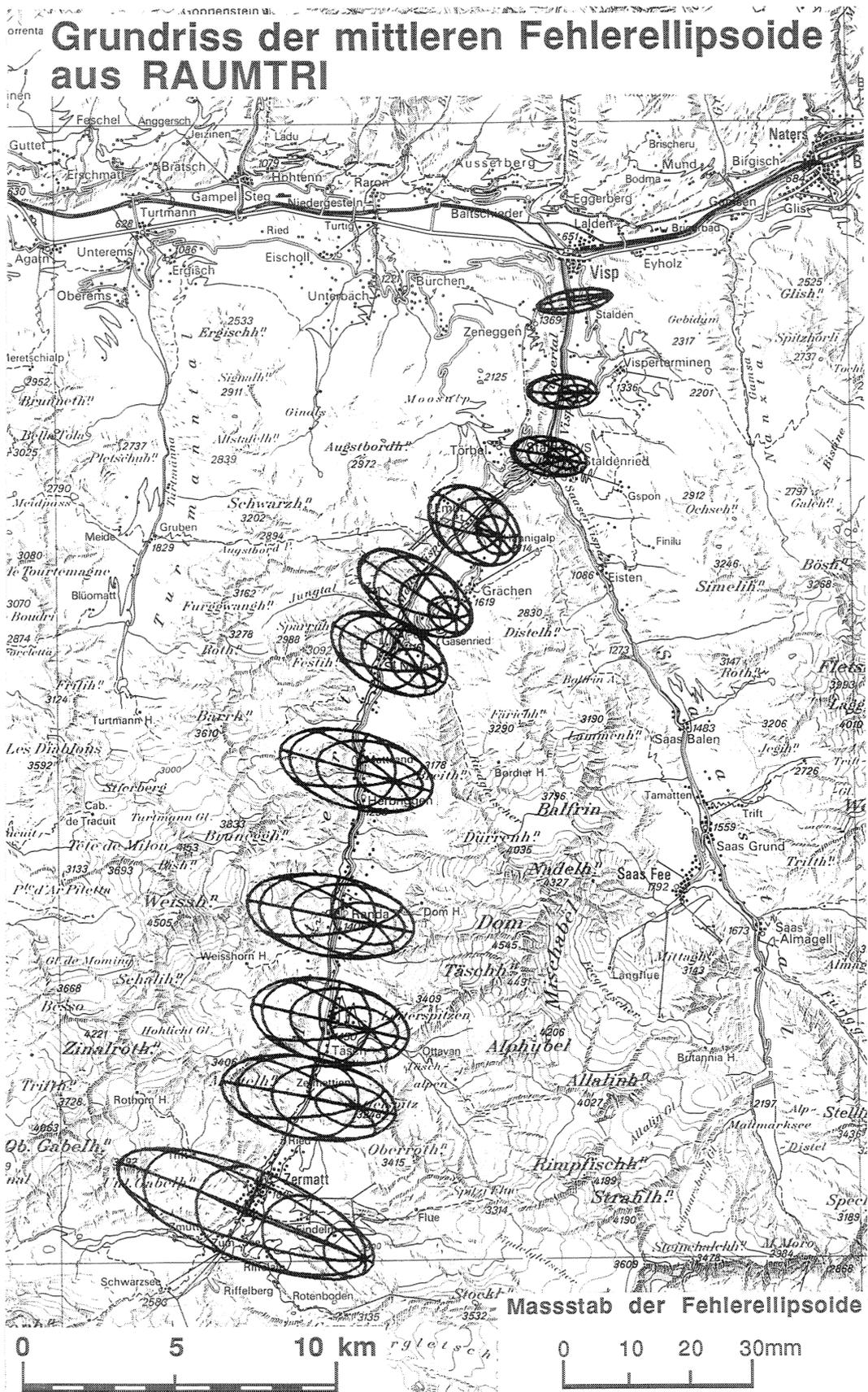
Name	geozentrisch		Landeskoordinaten	
	vX	vY	vx	vy
KALPETRAN GPS	0.96	0.86	-0.35	0.72
	0.60		1.17	
STNIK GPS	0.80	-0.04	0.56	-0.15
	1.63		1.72	
RANDA GPS	1.28	-1.22	0.34	-1.38
	1.64		1.94	
TÄSCH GPS	-1.20	0.91	-0.65	1.07
	-2.06		-2.22	
SCHLANG GPS	-1.39	-0.58	-0.90	-0.39
	-2.82		-3.05	
ZERMATT GPS	-0.99	-1.92	0.92	-1.77
	0.03		-0.84	
NEUBR GPS	-0.80	0.26	0.65	0.37
	0.16		-0.41	
STALDEN GPS	1.26	0.58	0.31	0.40
	1.83		2.24	
VISP PP	-2.19	-0.61	0.22	-0.31
	-2.03		-3.03	

VISPERT PP/TP	vX = 5.41	vx = 1.05
	vY = 2.30	vy = 1.54
	vZ = 7.43	vh = 9.29
MÄTTELI PP	vX = 1.54	vx = -0.82
	vY = -0.33	vy = -0.54
	vZ = 0.36	vh = 1.29
STALDB GPS	vX = -4.45	vx = 0.98
	vY = -1.69	vy = -1.07
	vZ = -3.41	vh = -5.67
TASCH PP	vX = -1.95	vx = 0.01
	vY = 0.98	vy = 1.24
	vZ = -1.86	vh = -2.59

Tab. 11.2-8: Die Verbesserungen an den GPS-Beobachtungen geo- und topozentrisch.

Die grossen Verbesserungen treten, wie zu erwarten ist, vor allem an den Höhen auf. Die beiden nahe bei Visp gelegenen Punkte Visperterminen und Staldbach werden um 9.29 bzw. -5.67 cm verbessert. Bei der reinen Lageberechnung fielen diese beiden Punkte nicht auf. Im Mittel betragen die Verbesserungen an x (Nord-Süd) **0.68 cm**, an y (Ost-West) **0.99 cm** und an den Höhen (ohne den Punkt Visperterminen) **2.45 cm**. Die 4 Refraktionen sind dieselben wie bei der ellipsoidischen gezwängten Höhenausgleichung, ebenso in etwa die Verbesserungen. Die Abweichungen der ellipsoidischen Höhen von der gezwängten Variante der ellipsoidischen Höhen der Tabelle 11.2-4 erreichen maximal 19 mm, was noch unter dem einfachen mittleren Fehler dieser Höhen liegt.

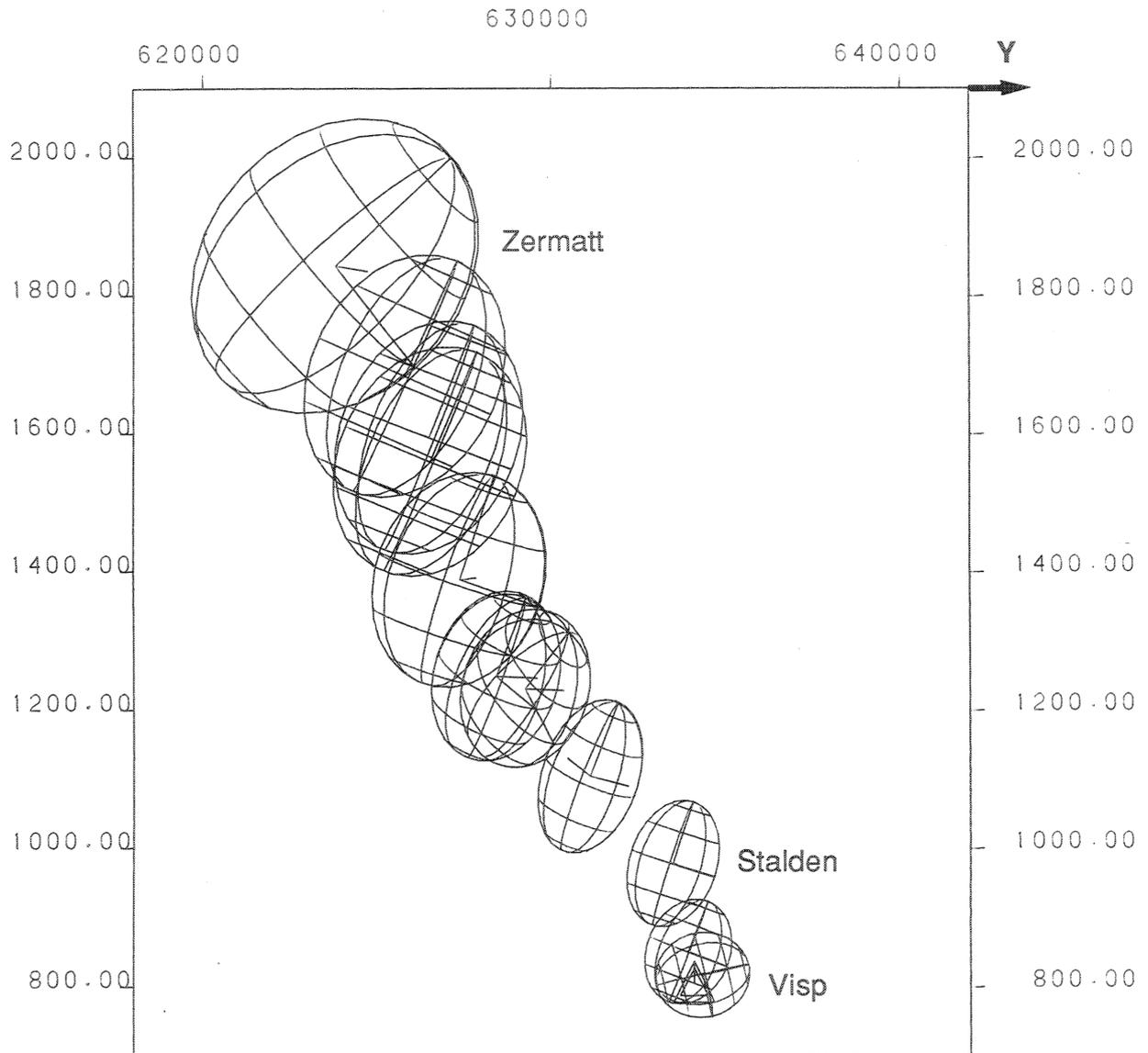
Bei der Kombination von Messdaten verschiedener Art (hier z.B. GPS Basislinien mit terrestrischen Daten) in einer gemeinsamen Ausgleichung ist darauf zu achten, dass zutreffende funktionale und stochastische Modelle verwendet werden. [Welsch et al., 1987] führte mit den Daten des CERN-LEP Netzes, in dem Terrameter-Distanzen mit ± 1.8 mm für die Lagebestimmung und Präzisionsnivelements mit ± 2.7 mm für die Höhenbestimmung (orthometrische Höhen), die mit aus Zenitkamera-Messungen abgeleiteten Geoidhöhen in ellipsoidische Höhen mit $\pm 4..5$ mm umgerechnet wurden, sowie GPS Macrometer Messungen mit ± 1.3 mm in X, ± 0.8 mm in Y und ± 1.7 mm in h, eine Varianz-Kovarianz Komponenten Schätzung durch, um insbesondere die Genauigkeitsangaben der GPS-Auswertung im Vergleich mit terrestrischen Daten zu überprüfen. Die korrekten a priori Standardabweichungen für die GPS-Basislinien betragen für die kombinierte Ausgleichung *8 mm in X, 5 mm in Y und 11 mm in h*. Dies bedeutet, dass bei Welsch die GPS-Standardabweichungen um etwa einen Faktor 6 überschätzt sind. Die Netzausdehnung beträgt ca 10 x 10 km².



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

Abb. 11.2-13: Grundriss der mittleren Fehlerellipse aus RAUMTRI

Aufriss der mittleren Fehlerellipse aus RAUMTRI

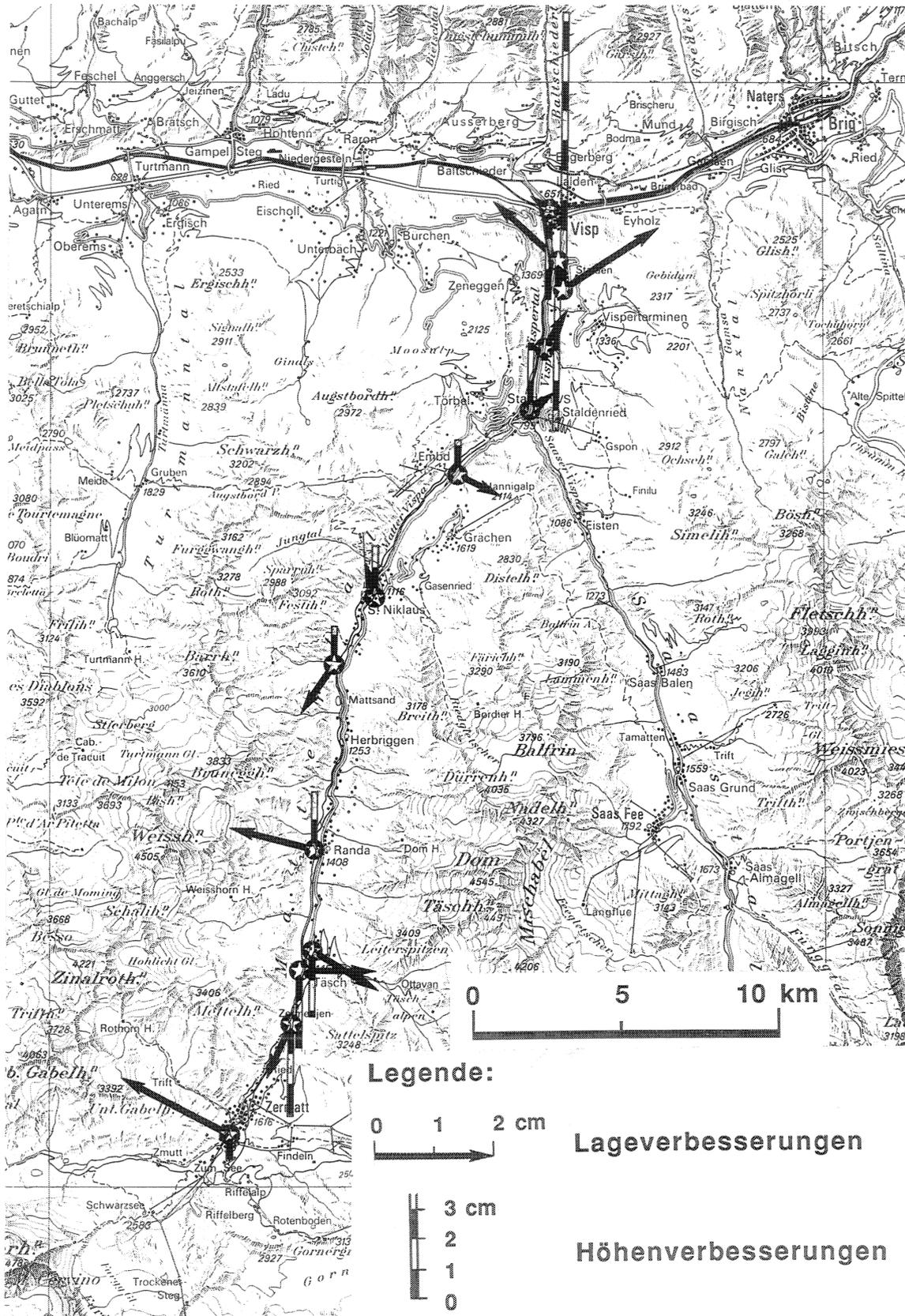


Massstab der Fehlerellipse



Abb. 11.2-14: Aufriss der mittleren Fehlerellipse aus RAUMTRI

Verbesserungen der GPS-Beobachtungen



Kartengrundlage reproduziert mit Bewilligung des Bundesamtes für Landestopographie vom 7. 7. 1988

Abb. 11.2-15: Verbesserungen der GPS-Beobachtungen in Lage und Höhe

11.3 Direkter Übergang von WGS84- in Benutzerkoordinaten

11.3.1 Einleitung

Praktisch wird man nicht überall in der Lage sein, eine aufwendige und teure Geoidbestimmung durchzuführen, bevor Neupunkte in Lage und Höhe bestimmt werden können. Manchmal wird man auch das Projektionssystem eines Landes nicht kennen, in dem man einige Punkte bestimmen soll, oder dann sind die Transformationsbeziehungen dieser Systeme zum WGS-84 GPS System nicht oder nicht genügend genau bekannt. Häufig wird man die GPS-Genauigkeit nicht voll ausschöpfen können, weil ein Netz von bestehenden Punkten mit Koordinaten vorgegeben ist, an dem man festhalten will, so dass die Neupunkte möglichst optimal in dieses bestehende Netz eingezwängt werden müssen. Aus diesen Gründen wurde als praktische Anwendung der Theorien der Kapitel 6 und 10 ein Programm zur direkten Überführung von WGS-84- (aus GPS-Messungen) in Benutzerkoordinaten geschrieben. Das Programm ist in dem Sinne äusserst benutzerfreundlich, als es ohne weitere Information über das Projektionssystem der Benutzerkoordinaten auskommt, ohne Lagerungsparameter des Benutzer-Referenzellipsoides gegenüber dem GPS-System und ohne Schwerefeldvorgaben (insbesondere Geoid und orthometrische Korrektur) und erst noch die GPS-Messungen optimal in das bestehende Netz von Passpunktkoordinaten einpasst, also auch noch die Verzerrungseigenschaften des lokalen Netzes abfängt und Restklaffen ausinterpoliert. Selbstverständlich kann das nur in einem sehr beschränkten Gebiet von maximal 10 mal 10 km² beim Vorhandensein von genügend Passpunkten im Benutzersystem funktionieren, die ebenfalls mit GPS zu vermessen sind. Für das Programm kommt ein Transformationsansatz in Frage, der für die Lage bereits die grössten Netzverzerrungen der Projektion abfängt. Dies können unterschiedliche Massstäbe in den beiden Achsrichtungen sein, aber auch Nichtorthogonalität der lokalen Koordinatenachsen. Praktisch erfüllt werden diese Bedingungen durch eine **Affintransformation** (Kap. 6.1), der Ansatz wird allerdings spezieller gewählt (vgl. 11.3-1). In den verbleibenden Restklaffen sind für die Lage immer noch nichterfasste Systematiken der Projektion, für die Höhe das lokale Geoid und für beides zusammen Netzverzerrungen sowie die Passpunktfehler enthalten. Diese Restdifferenzen werden mit einem isotropen **Kollokationsansatz** interpoliert. Der Ansatz wird für die Lage genau gleich angewendet wie für die Höhe. Eine mittlere Neigung des Geoides über das ganze Gebiet wird mit der Affinität bereits abgefangen. Die lokalen Geoidänderungen innerhalb des interessierenden Gebietes werden durch den Kollokationsansatz am flexibelsten erfasst, unter spezieller Berücksichtigung der sehr knappen Anzahl und unregelmässigen Verteilung der Stützpunkte.

11.3.2 Ansatz für die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ H \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ h_{\text{Ell}} \end{bmatrix}}_{\text{Translation}} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ H_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_x(x,y) \\ s_y(x,y) \\ s_H(x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_H \end{bmatrix} \quad (11.3-1)$$

- x, y, H : lokale Landeskoordinaten im Benutzersystem. (2. System).
 a_{11}, \dots, a_{32} : 6 Parameter der Affintransformation. Bestandteile der A-Matrix.
 X^*, Y^*, h_{Ell} : GPS- Messungen, um Gebietsschwerpunkt in Horizontsystem gedreht, mit ellipsoidischer Höhe. (1. System).
 x_0, y_0, H_0 : 3 Translationsparameter der Affintransformation
 s_x, s_y, s_H : Signale an den einzelnen Komponenten, abhängig nur von der Lage !
 n_x, n_y, n_H : Verbesserungen (Noise) an den Passpunktkoordinaten

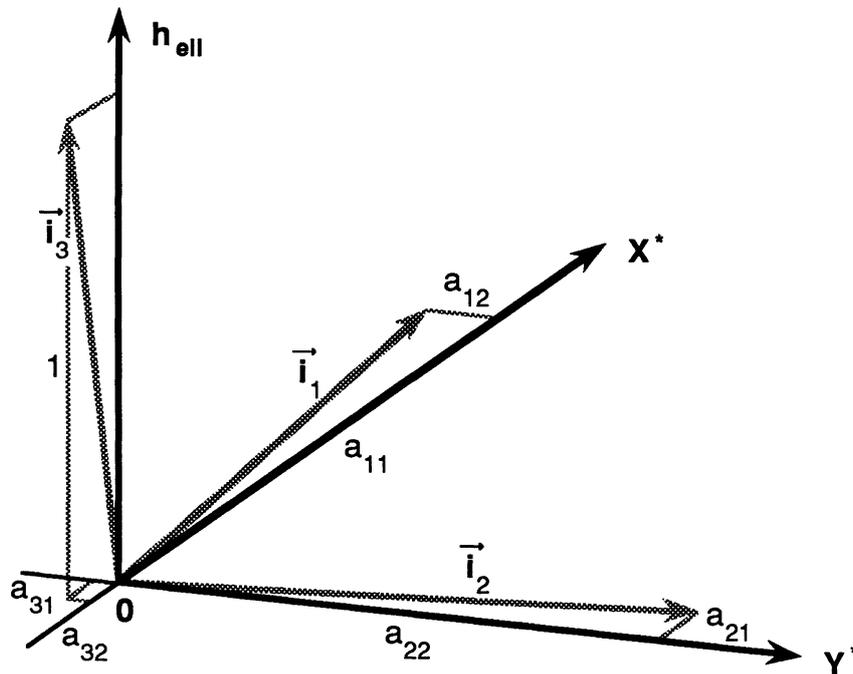


Abb. 11.3-1: Interpretation der Elemente der A-Matrix des Ansatzes 11.3-1.

In Abb. 11.3-1 sind die Zeilenvektoren \vec{i}_k der Matrix \mathbf{A} im GPS- oder 1. System dargestellt. Die lokalen Koordinaten im Benutzersystem oder 2. System (ohne Translation) ergeben sich durch Skalarproduktbildung eines Vektors X^* (GPS) mit dem entsprechenden Zeilenvektor \vec{i}_k . Achtung: die \vec{i}_k sind nicht die Achsrichtungen des 2. Systems! Damit wird

der spezielle Ansatz von 11.3-1 sichtbar: die beiden Vektoren X^* und Y^* spannen die Tangentialebene an das Ellipsoid im Punkt 0 auf. i_1 und i_2 liegen in derselben Ebene, was bedeutet, dass sich die Lagekomponenten des 2. Systems auf die Tangentialebene an das Ellipsoid beziehen, wie das sein soll. Dort können sie eine mittlere Verzerrung und zwei unterschiedliche Massstäbe auffangen. i_3 kann sich frei in die mittlere physikalische Lotrichtung ausrichten, also eine mittlere Neigung des lokalen Geoides gegenüber dem Ellipsoid aufnehmen. Der Höhenmassstab ist auf 1 fixiert (bei maximalen mittleren Lotabweichungen von 30" über das interessierende Gebiet ändert der Massstab über a_{31} und a_{32} um weniger als $5 \cdot 10^{-8}$). In der Matrix A sind 6 Parameter zu bestimmen, für die Translation kommen 3 weitere dazu, so dass total 9 Unbekannte auftreten, welche durch mindestens drei Transformationspunkte bestimmt werden können.

11.3.3 Die Kovarianzfunktion Φ

Für unsere Restklaffen verwenden wir komponentenweise folgenden einfachen Ansatz für die Kovarianzfunktion (Ansatz der Gauss'schen Glockenkurve):

$$\begin{aligned} \text{für die x-Komponenten: } \Phi &= \sigma_{x,y}^2 \cdot e^{-\left(\frac{r}{d_{\text{char}}}\right)^2} \\ \text{für die y-Komponenten: } \Phi &= \sigma_{x,y}^2 \cdot e^{-\left(\frac{r}{d_{\text{char}}}\right)^2} \\ \text{für die H-Komponenten: } \Phi &= \sigma_H^2 \cdot e^{-\left(\frac{r}{d_{\text{char}}}\right)^2} \end{aligned}$$

mit	$\sigma_{x,y}$: Varianz des Signales einer Lagekomponente.
	σ_H	: Varianz des Signales einer Höhenkomponente.
	r	: ebener Abstand der beiden betreffenden Punkte.
	d_{char}	: Konstante in der Kovarianzfunktion, die der Situation angepasst wird.
	e	: Basis der natürlichen Logarithmen.

Zwischen den verschiedenen Komponenten bestehen keine Korrelationen!

11.3.4 Genauigkeitsuntersuchungen

Mit dem Programm wurden umfangreiche Genauigkeitsuntersuchungen durchgeführt. Ziel dieser Berechnungen war einerseits, die oben erwähnten Varianzen der Signale vernünftig angeben zu können und andererseits, um Angaben der äusseren

Transformationsgenauigkeit für einige Passpunktanordnungen und für diese als Funktion des mittleren Abstandes derselben angeben zu können. Auf den nächsten drei Seiten sind die Ergebnisse graphisch dargestellt. Für 3, 4 bzw. 5 Passpunkte in der jeweils rechts oben angegebenen Anordnung innerhalb des 6 x 6 - Punkte Rasters wurden für verschiedene Rasterabstände die äusseren Genauigkeiten bestimmt. Es zeigte sich bei den Berechnungen, dass die Lagegenauigkeit unabhängig vom gewählten Bezugssystem sind, also für das untersuchte Schweizer System, das Gauss-Krüger und das Lambert-System praktisch identisch sind, falls das Netz im selben Abstand vom 'Nullkreis' der Abbildung erzeugt wird (Meridian oder Längenkreis). Die Berechnungen wurden für drei verschiedene solche 'Nullpunktsabstände' durchgeführt (einmal 100 km, dann 300 km und schliesslich 500 km, was etwa 5^0 entspricht und eine obere Grenze für eine festgehaltene Referenzfläche darstellt). Diese Abstände wurden sowohl nach Osten als auch nach Norden eingeführt. Mit drei Passpunkten können gerade die zu schätzenden Parameter abgedeckt werden, es erfolgt keine Signalberechnung mehr. Dies entspricht der Minimalvariante für Transformationsberechnungen. Mit wachsender Anzahl Stützpunkte wächst auch die Transformationsgenauigkeit. Bei 5 Stützpunkten kann bei einem Abstand A bis zu 3500 m mit Genauigkeiten unter dem Zentimeter gerechnet werden.

Die Höhengenaugigkeit ist unabhängig von der Lage, das Projektionssystem spielt dafür keine Rolle. Es wurden für dieselbe Passpunktverteilung wie für die Lageberechnungen in je vier verschiedenen Flachlandregionen (Burgdorf, Zürich, Wil und Genf) und in vier alpinen Regionen (St. Imier, Glarus, Airolo und Zermatt) die Höhengenaugigkeiten als Funktion des Passpunktabstandes berechnet und je die ungenauesten Fälle aufgezeichnet. Überraschenderweise zeigt sich, dass die Höhengenaugigkeit gleich gut, wenn nicht besser, wie die Lagegenauigkeit ist. In diesem lokalen Rahmen ist das Geoid also nicht stärker störend als die nicht erfassten Verzerrungen der Lageabbildung.

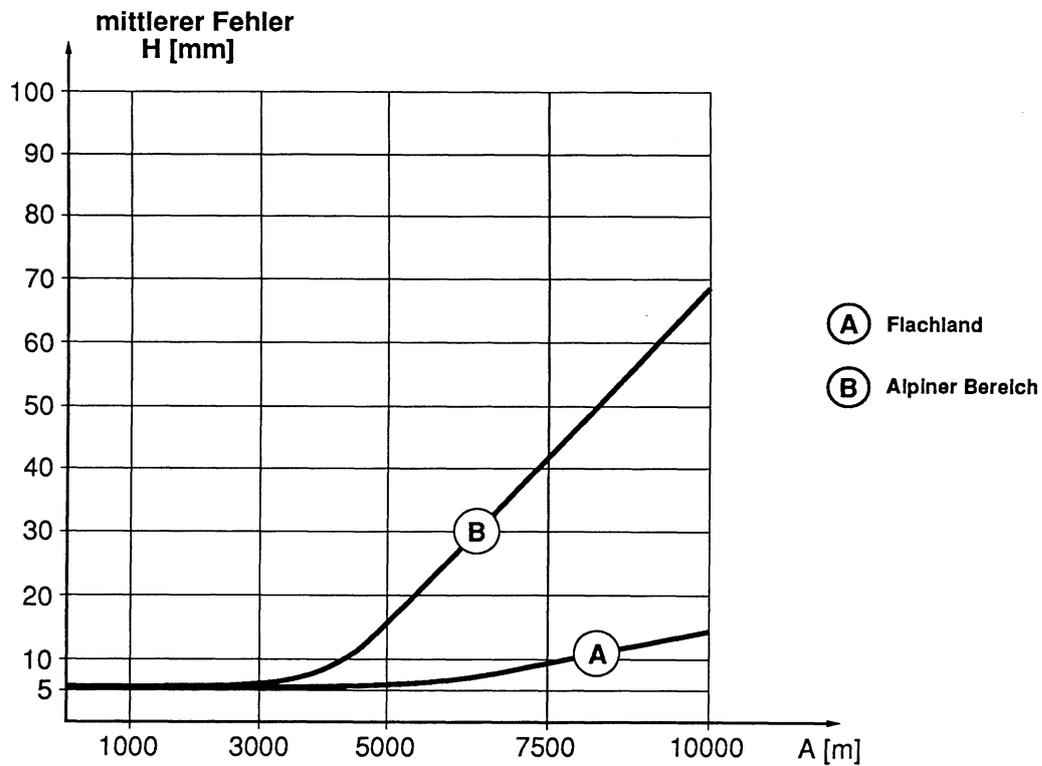
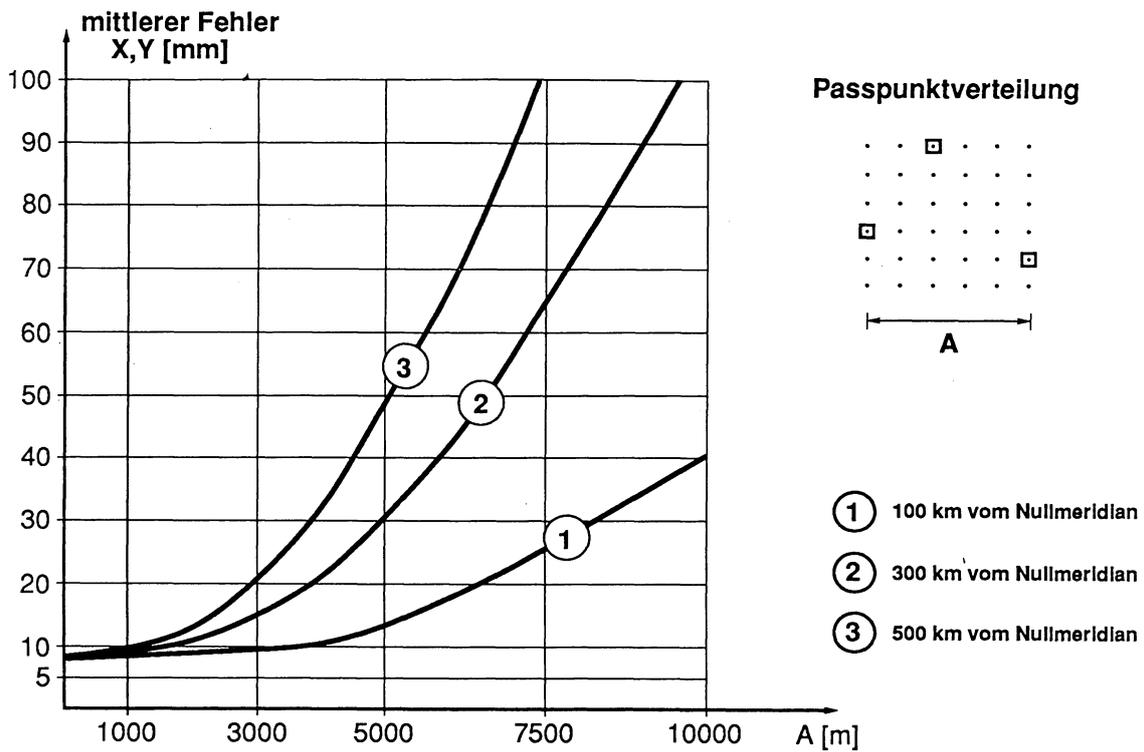


Abb. 11.3-2: Erreichbare Transformations-Genauigkeiten bei 3 Passpunkten

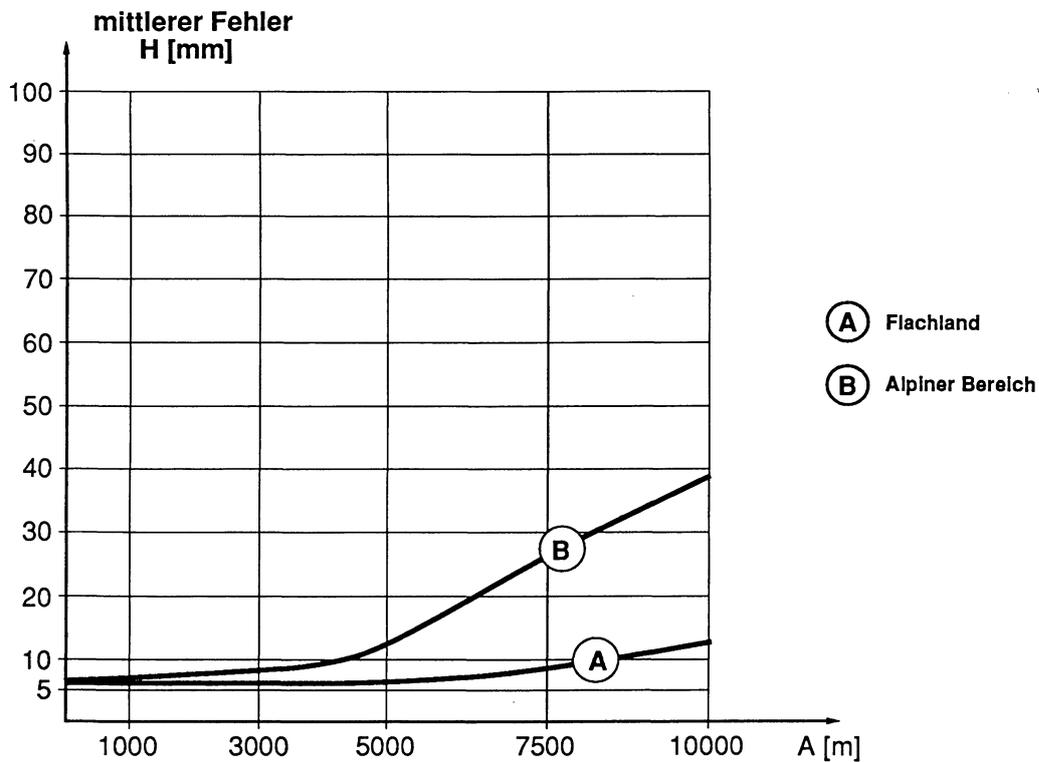
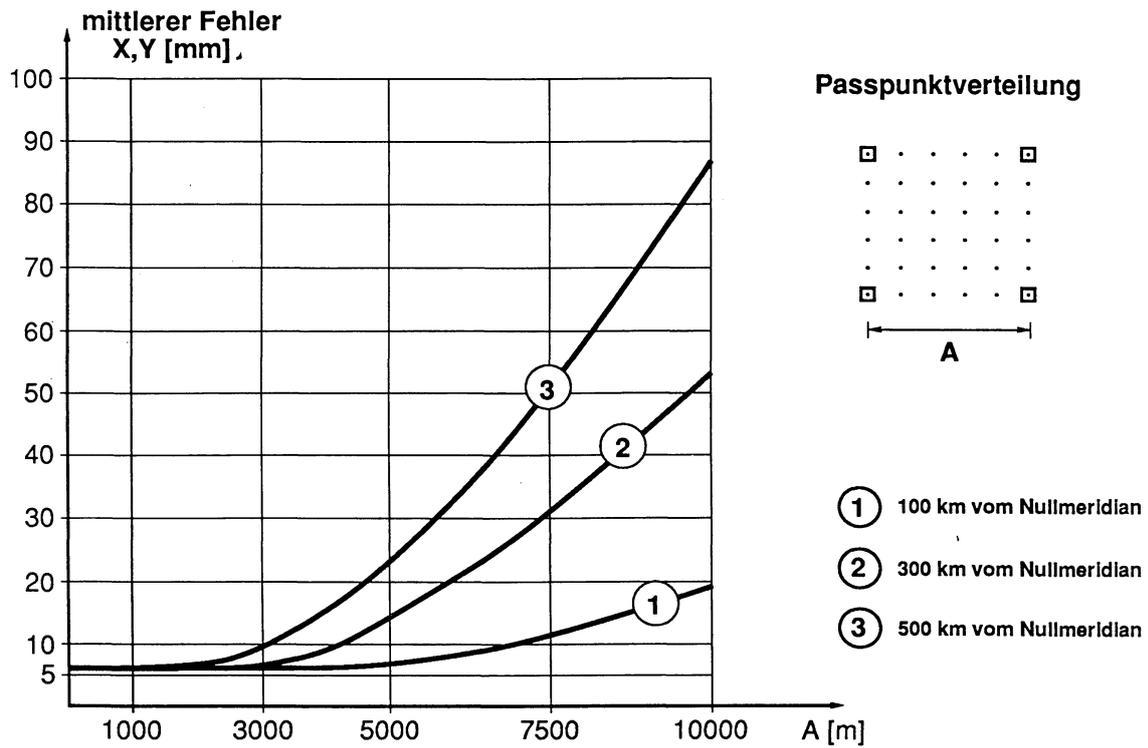


Abb. 11.3-3: Erreichbare Transformations-Genauigkeiten bei 4 Passpunkten

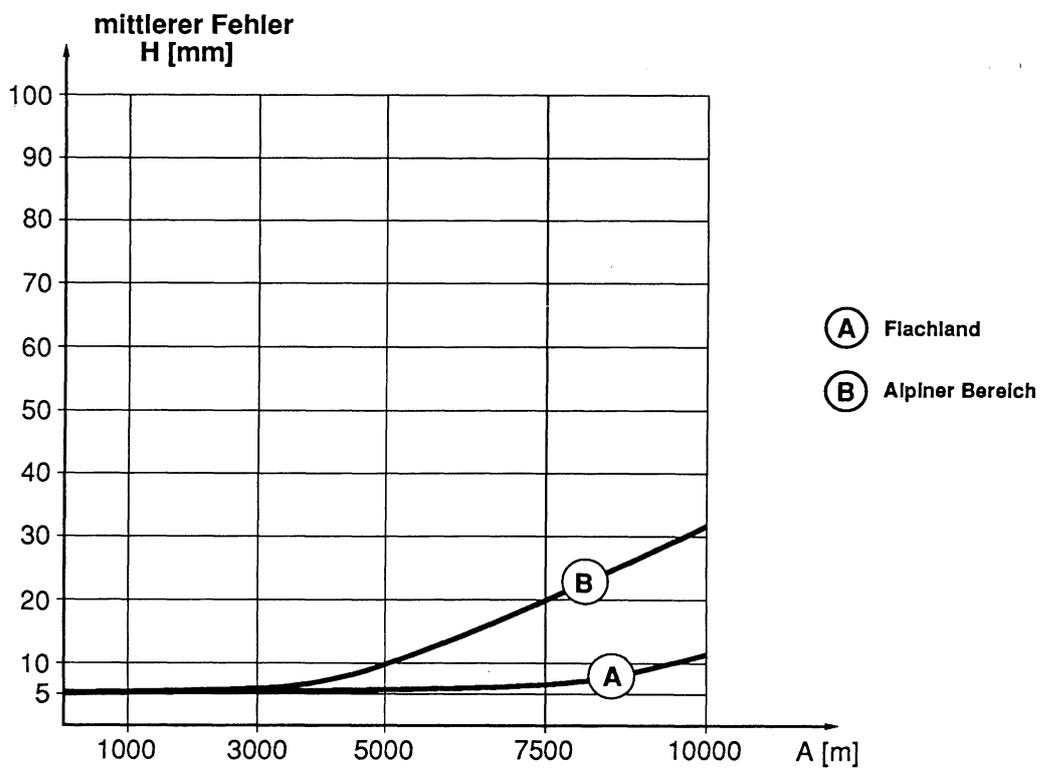
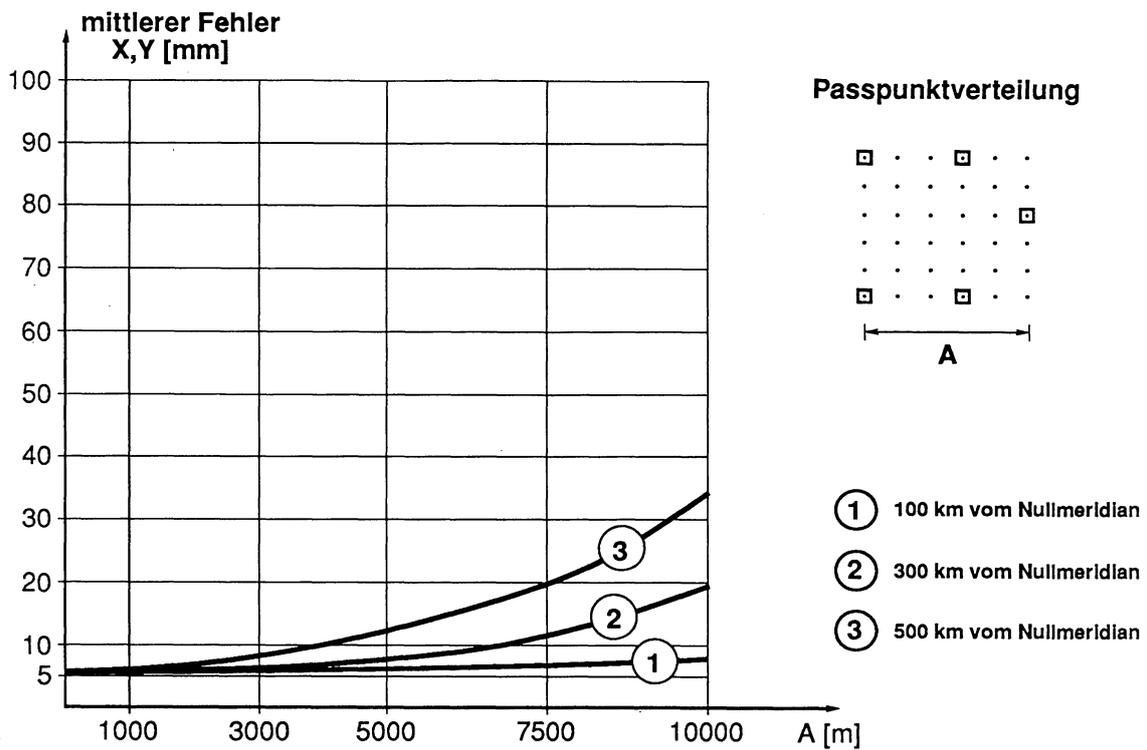


Abb. 11.3-4: Erreichbare Transformations-Genauigkeiten bei 5 Passpunkten

11.3.5 Anwendungsbeispiel

Im Vertiefungsblock E8 des IGP der ETH Zürich unter der Leitung von Dr. A. Geiger wurde im Sommersemester 1988 eine Geoidbestimmung mit GPS in einem Gebiet von 12 x 14 km² des linken Zürichseeufers durchgeführt. Die Stationen wurden auf Triangulationspunkte des Kantons Zürich gelegt, die meist erst kürzlich kontrolliert worden waren. Insgesamt wurden 31 Stationen vermessen (vgl. Abb. 11.3-5). Die (meist nivellierten) Gebrauchshöhen wurden genähert orthometrisch korrigiert und um die mit LAG berechneten Geoidhöhen in ellipsoidische Höhen umgerechnet. Die geozentrischen GPS-Koordinaten wurden mit dem Programm TRAFO von dipl. Ing. M.V. Müller in Landeskoordinaten mit ellipsoidischen Höhen umgerechnet und anschliessend mit dem Programm ATRA [Schmid, Heggli, 1978] mit einer räumlichen Helmerttransformation mit zwei Massstabsfaktoren (einer für die Lage, der Zweite für die Höhe) auf die Triangulationspunkt-Koordinaten transformiert. Der Lagemassstab betrug +1.6 ppm, der Höhenmassstab +30.2 ppm. Die verbleibenden mittleren Restklaffen für die X-Komponenten (Nord-Süd) betragen **2.2 cm**, für die Y-Komponenten **2.7 cm** und für die Höhe **2.9 cm**.

Diese Daten wurden verwendet, um den Ansatz 11.3-1 für die Direkttransformation zu testen. 13 über das ganze Gebiet regelmässig verteilte Punkte wurden als Passpunkte ausgewählt und damit die Berechnung durchgeführt.

Charakteristische Distanz = 12271.293 m

Signal-Varianzen

S Lage = 0.105 m

S Hoehe = 0.153 m

Parameter der Affintransformation

Lageparameter		Translation		Genauigkeiten	
-0.01362771	1.00004163	680558.355	0.00000715	0.00000662	0.164
1.00005209	0.01362774	257497.139	0.00000715	0.00000662	0.164

Mst in X-Richtung: 1.00013448 = 134.478 ppm

Mst in Y-Richtung: 1.00014494 = 144.939 ppm

Verzerrung des 100-g Winkels: 0.000007 g

Höhenparameter			Genauigkeiten		
0.00000791	0.00000741	-756.017	0.00001155	0.00001054	0.262

Neigung der Höhen-Referenzebene in X-Richtung: 0.00050 g

Neigung der Höhen-Referenzebene in Y-Richtung: 0.00047 g

Mit den so bestimmten Transformationsparameter und Signalen wurden schliesslich alle gemessenen Punkte auf die Landeskoordinaten (diesmal mit Gebrauchshöhen) transformiert und die mittleren Restklaffen bestimmt: $dX_m = 3.2 \text{ cm}$ $dY_m = 2.4 \text{ cm}$ $dH_m = 3.4 \text{ cm}$. Die einzelnen verbleibenden Differenzen sind in Abb. 11.3-5 dargestellt. Diese Werte sind nur unbedeutend grösser als die 'nach bestem Wissen' erhaltenen Restklaffen, insbesondere wenn man bedenkt, dass hier nur aus 13 Punkten die Transformationsparameter und die Signale bestimmt wurden, während bei der strengen Variante alle Stationen zur Helmerttransformation hinzugezogen wurden.

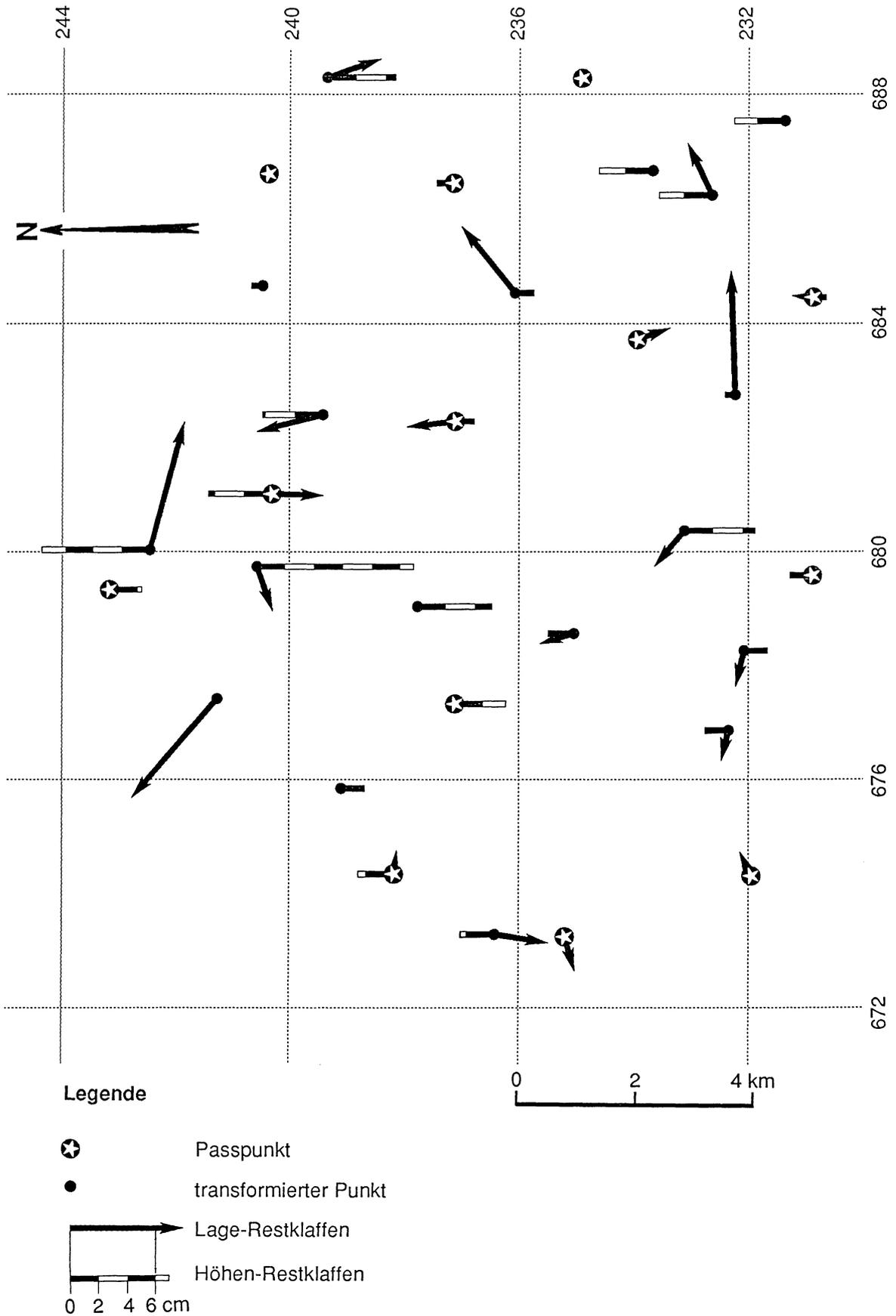


Abb. 11.3-5: Punkteverteilung mit Restklaffen nach der Transformation

12. Schlussbemerkungen, Ausblick und Dank

Schlussbemerkungen

Die Arbeit hatte ursprünglich zum Ziel, "strenge" orthometrische Höhen längs der Orthogonaltrajektorien zu den Äquipotentialflächen im Alpenraum zu berechnen. Die rasche Entwicklung in der Satellitengeodäsie stellte schon bald die zusätzliche Aufgabe, GPS-Messungen neben der Lage- auch für die Höhenbestimmung einzubeziehen. Dies erforderte intensive Untersuchungen zur präzisen Geoidbestimmung. Beide Themenkreise bilden die ersten Teile der vorliegenden Arbeit. Sie werden anschliessend durch einen dritten Teil ergänzt, in dem praktische Anwendungen an konkreten Beispielen getestet und hinsichtlich der Genauigkeiten analysiert werden.

Im Teil I werden die gebräuchlichen Höhensysteme definiert und Messverfahren zur Höhenbestimmung aufgezeigt. Dabei zeigt sich, dass das Geodätische Datum für eine eindeutige Beziehung zum weltweiten System mit sechs statt fünf Parametern festgelegt werden müsste: In der Fünf-Parameter-Version fehlt ein Höhenparameter. Grundlagen der verschiedenen Höhensysteme sind die entsprechenden Bezugsflächen: Das Geoid, das Quasigeoid und das Ellipsoid. Die Differenzen zwischen ellipsoidischen und orthometrischen Höhen entsprechen den sogenannten Geoidundulationen.

Mit dem Aufkommen der Satellitengeodäsie haben die ellipsoidischen Höhen stark an Bedeutung gewonnen. Damit ist zugleich auch der Bedarf nach einer präzisen Geoidbestimmung gestiegen. Eine analysierende Zusammenstellung der Geoidbestimmungs-Methoden ist im Kapitel 4 enthalten.

In zwei weiteren Kapiteln habe ich zunächst die Realisierung des GPS-Referenzsystemes dargestellt, um einen Einblick in mögliche Fehlerquellen und deren Grössenordnung zu gewinnen. Danach werden die in der Geodäsie verwendeten linearen Abbildungen (Transformationen) mit ihren Eigenschaften systematisch zusammengestellt und für die räumliche Helmerttransformation eine algebraische Lösung zur Untersuchung der Genauigkeiten der Transformationsparameter angegeben.

Kapitel 7 zeigt das Nivellement als bisher genaueste Methode zur Höhenbestimmung sowie deren Korrektur um den theoretischen Schleifenschlussfehler. Anschliessend folgt die Herleitung der mittleren Schwere in der Lotlinie zur Bestimmung von orthometrischen Höhen aus Nivellement und Schweremessungen.

Vorarbeiten haben gezeigt, dass die gebräuchlichen Näherungsverfahren für orthometrische Höhenbestimmungen in der Schweiz nicht genau genug sind, nicht zuletzt auch um den hohen Genauigkeiten des GPS-Verfahrens entsprechen zu können. Infolgedessen ergab sich die Notwendigkeit nach einer gezielten Untersuchung zur Bestimmung von "strengen" orthometrischen Höhen. Dabei fand ich eine neue Formel, die die Berücksichtigung von Massenmodellen mit vergleichsweise geringem Aufwand exakt ermöglicht. Diese Erkenntnisse wurden in einem Fortran-Programm realisiert.

Trotz der modernen Theorien zum allgemeinen geodätischen Randwertproblem mit Quasigeoid und Telluroid bin ich der Auffassung, dass heute orthometrische Höhen mit vernünftiger Genauigkeit (trotz Hypothesen über die Massenverteilung) berechnet werden können und sollen. In gebirgigen Gegenden kommt man sowieso nicht um ein Topographiemodell herum, da die Oberflächenmessungen damit reduziert werden müssen. Erst diese Regularisierung bringt die erforderliche Genauigkeit bei den Folgerechnungen. Die Differenz zwischen Geoid und Quasigeoid wird über diese Massenmodelle erfasst, auf die besonderes Gewicht gelegt werden muss. Die Messungen an der Erdoberfläche sind auf jeden Fall von der nahen Umgebung mit ihrer inhomogenen Dichteverteilung beeinflusst. Damit ein solch lokaler Einfluss nicht mit dem Verfahren der Kollokation über die charakteristische Distanz fälschlicherweise in seine Umgebung übertragen wird, müssen entweder genügend dicht Messungen des Schwerefeldes ausgeführt oder der lokale Einfluss modelliert werden. Das Erhöhen der Anzahl Beobachtungen hat drei Nachteile: Die Beobachtungen sind teuer, der Rechenaufwand der Kollokation steigt enorm an und stösst bald einmal an seine Grenzen. Die charakteristische Distanz bei der Kovarianzfunktion muss dann verkleinert werden, was andererseits schlechtere Schätzgenauigkeiten ergibt.

Ein Kapitel mit Genauigkeitsabschätzungen der verschiedenen Höhen schliesst sich an. Dort wird gezeigt, dass die Messgenauigkeit beim Nivellement der limitierende Faktor darstellt. Vereinfacht gesagt sind alle Höhenarten gleich genau, mit Ausnahme der orthometrischen Höhe, bei der ein höhenabhängiger Anteil wegen der Unsicherheit der Dichteverteilung der Krustengesteine und oberflächennahen Sedimente hinzukommt.

Im Teil II der Arbeit wird detailliert auf die Methode der Kollokation und Prädiktion zur kombinierten Geoidbestimmung eingegangen. Nach der Darstellung des Formelapparates zur Kollokation mit unbekanntem Parametern mit Genauigkeitsangaben habe ich die verwendeten Kovarianzfunktionen genauer analysiert und schliesslich einen Satz von einfachen Formeln für die Störpotentialbestimmung in der Ebene hergeleitet. Im Vergleich zum Markov Modell dritter Ordnung sind in der Anwendung keine systematischen Differenzen festzustellen. Die dargestellten Funktionen weisen auch formal auffallende Ähnlichkeiten auf. Beide Modelle sind in einem TurboPascal Programm realisiert worden.

Die Ergebnisse der ersten beiden Teile der Arbeit werden schliesslich im Teil III an zwei praktischen Beispielen angewendet. In beiden Fällen wird eine hochpräzise lokale kombinierte Geoidbestimmung durchgeführt. Im zweiten Beispiel werden in einem 30 km langen Präzisionspolygonzug zusätzlich terrestrische Höhen (Präzisionsnivellement und Höhenwinkelbeobachtungen) mit GPS-Höhen verglichen und gemeinsam ausgeglichen. Danach folgt ein Abschnitt über die Möglichkeit zur direkten Transformation von GPS-Beobachtungen in Landeskoordinaten mit Gebrauchshöhen, bei dem die Restklaffen mit Kollokation interpoliert werden. Diese Transformation vereinigt in sich eine Reihe von

Problemen, die im Zusammenhang mit der Überführung von GPS-Koordinaten in Landeskoordinaten mit Gebrauchshöhen auftauchen: Lagerungsprobleme, Geoid, Transformation und Restklaffeninterpolation. Sie werden in einem Ansatz gleichzeitig gelöst, wenn auch etwas weniger genau, als wenn die Umrechnung so gut wie möglich durchgeführt wird.

Im Europäischen Rahmen werden die Höhen schon seit längerem in Form von geopotentiellen Knoten bestimmt und ausgeglichen. Dies setzt voraus, dass die Hauptlinien in allen beteiligten Ländern mit Nivellement und Schweremessungen erhoben werden. Es ist geplant, GPS in das zukünftige Europäische Höhensystem zu integrieren, was ein gutes Europäisches Geoid voraussetzt. Ausgehend von diesen Geopotentiellen Knoten kann jedes Land dasjenige Höhensystem ableiten, das es für passend findet. Die dynamische Höhe, die Normalhöhe und die Helmert'sche orthometrische Höhe können daraus mit geringem Aufwand, die beiden ersteren sogar hypothesenfrei, berechnet werden. Die Berechnung von "strengen" orthometrischen Höhen stellt heute ein bewältigbares Problem dar, die entsprechenden Modelle vorausgesetzt. Die gegenwärtigen offiziellen Höhen der BRD sind Helmert'sche orthometrische Höhen. Es wird einzig an Stelle der beobachteten Schwere an der Oberfläche die Normalschwere verwendet. Österreich, von seiner Topographie her am ehesten mit der Schweiz zu vergleichen, setzt für sein neues offizielles Höhensystem auf die "strengen" orthometrischen Höhen. Die Landesvermessungen Osteuropas verwenden häufig Normalhöhen. Direkt von dieser Wahl betroffen ist die Frage, ob ein Land das Geoid oder das Quasigeoid bestimmt. Wenn vereinfachte Verfahren gewählt wurden, so erfolgte dies aus praktischen und weniger aus theoretischen Gründen.

Ausblick

Mit der Vollendung der Erhebung des 25m Höhenrasters ab Landeskarten 1:25'000 durch die L+T wird in der Schweiz ein Topographiemodell von einmaliger Güte bestehen. Wenn dieses für die Modellrechnungen zur Verfügung steht, werden die Reduktionsrechnungen nur noch zu einem Aufwand für den Computer. Da die Auswirkungen von falschen Dichteannahmen des Topomodells auf die orthometrischen Höhen bescheiden sind (bescheidener als Höhenfehler im Topographiemodell in unmittelbarer Punktumgebung), schlage ich vor, für die Schweiz orthometrische Höhen zu berechnen. Als nächstes sollte untersucht werden, wie weit es von Vorteil ist, neben den Massenmodellen die reduzierten Werte mit Kollokation über dreidimensionale Ansätze für die Kovarianzfunktionen zu erfassen und deren Anteil zur mittleren Schwere in der Lotlinie zu berechnen.

Eine Arbeitsgruppe der Schweizerischen Geodätischen Kommission zur Neuberechnung des Schweizer Geoides ist bereits aktiv geworden. Dies wird nicht mehr ein rein astrogeodätisches Geoid sein, obwohl die astronomischen Beobachtungen nach wie vor eine wichtige Rolle spielen. Diese müssten über die Schweiz noch verdichtet und homogenisiert werden. In Gebieten mit zu geringer Punktdichte können auch

Schweremessungen herangezogen werden. Das Ganze wird durch GPS-Messungen gestützt, wozu die ALGESTAR-Messungen des IGP und die Messungen der L+T für das neue Landesnetz herangezogen werden können.

Nicht zuletzt werden hochpräzise Höhenbestimmungen in aktuellen internationalen Projekten durchgeführt, mit dem Ziel, regionale plattentektonische Bewegungsvorgänge zu erfassen. Schon seit vielen Jahren ist aus wiederholten Präzisionsnivellements der L+T bekannt, dass in der Schweiz rezente relative Höhenänderungen des Alpenraumes gegenüber dem Mittelland von bis zu 1.5 mm / Jahr auftreten. Der Aufwand für solche Nachmessungen ist allerdings beträchtlich, dauern sie doch für alle Schweizer Linien schon bald 40 Jahre. Die Beträge machen deutlich, dass ein modernes Höhensystem kinematisch angelegt werden muss. Andere Länder haben insgesamt ein bedeutend längeres Nivellementsnetz und können das mit klassischen terrestrischen Verfahren gar nicht innert nützlicher Frist nachmessen. Deshalb wird GPS sicher in den zukünftigen Höhennetzen eine wichtige Rolle spielen, da damit über längere Distanzen in viel kürzerer Zeit Höhenbestimmungen durchgeführt werden können. Dies wirft allerdings eine Reihe neuer Probleme auf. Die Geoidbestimmung zur Überbrückung der unterschiedlichen Systeme ist das Eine, systematische Fehlereinflüsse auf GPS-Höhen wie Troposphäre, Ionosphäre und die Bahndaten das Andere.

Dank

Danken möchte ich allen an dieser Arbeit Beteiligten bzw. von ihr Betroffenen. Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. H.-G. Kahle, für die Ermöglichung und Konzipierung dieser Dissertation, seine stete Unterstützung und die nötige Freiheit, die er mir für die Arbeit gewährte. Herrn Prof. F. Chaperon für die Übernahme des Korreferates und den damit verbundenen Aufwand wie auch für sein grosses Interesse und seine wertvollen Hinweise. Herrn dipl. Phys. R. Köchle für die genaue Durchsicht der Arbeit und seine kompetenten Korrekturhinweise und Verbesserungsvorschläge. Allen Kollegen, Hilfsassistenten und Diplomanden, ohne die die erforderlichen Messungen für den dritten Teil der Arbeit nicht hätten ausgeführt werden können: Dr. A. Geiger, Dr. B. Bürki, dipl. Ing. U. Marti, M. Cocard, M.V. Müller und A. Wiget sowie Y. Chopard, St. Nebiker, F. Walser, D. Zen-Ruffinen, A. Möckli und E. Rüttener. Den Assistentenkollegen sowie Frau J. Gantenbein danke ich auch für viele wertvolle Diskussionen und ihre Unterstützung durch Entlastungen. Dem Bundesamt für Landestopographie danke ich für die grosszügige Unterstützung in allen Bereichen der Arbeit und den Kollegen dipl. Ing. E. Gubler, Dr. D. Schneider und dipl. Ing. A. Wiget für ihre persönlichen Hilfestellungen. Schliesslich möchte ich auch meinen Eltern für ihre dauernde Unterstützung und meiner Freundin dipl. Natw. Katharina Mathis für ihre Aufmunterung, die knapper gewordene Freizeit und nicht zuletzt auch für ihre eigenen Macintosh Programme herzlich danken, mit denen alle Höhenkurven-Zeichnungen sowie die dreidimensionalen Darstellungen erstellt wurden.

Literaturverzeichnis

Abkürzungen:

AVN	Allgemeine Vermessungs-Nachrichten
DGK	Deutsche Geodätische Kommission
IERS	International Earth Rotation Service
IGP	Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich
JGR	Journal of Geophysical Research
L+T	Bundesamt für Landestopographie
ÖKIE	Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung
OSU	Ohio State University
ÖZfVuPh	Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie
SGK	Schweizerische Geodätische Kommission
VPK	Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik
ZfG	Zeitschrift für Geophysik
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen

- Badekas, J. (1969): Investigations related to the Establishment of a World Geodetic System. *OSU Rep. N° 124, p181.*
- Bäschlin, C.F. (1948): Lehrbuch der Geodäsie. *Orell Füssli, p 892.*
- Bäschlin, C.F. (1955): Ergänzung zur Berechnung der mittleren Schwere in einer Lotlinie nach Th. Niethammer, unter Berücksichtigung der Isostasie. *Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München: 109 - 122.*
- Becker, J.-M. (1987): The Experiences with new Levelling Techniques ML and MTL. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 159 - 174.*
- Bernauer, I., A. Geiger (1986): Lokale Schwerefeldbestimmung und gravimetrische Modellrechnungen im Satelliten(GPS)-Testnetz 'Turtmann' (Wallis). *Geodätisch - geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, SGK; Bd 38, p108.*
- Beutler, G., W. Gurtner, M. Rotacher und U. Wild (1989): The Swiss 1987 GPS Campaign. Experiences in Medium Size Networks. *Paper presented at the First International Workshop: On the Geodesy for the Europe-Africa Fixed Link Feasibility Studies in the Strait of Gibraltar, Madrid (Spain), 8. - 10. March, p 17.*
- Bloss, S. (1987): Applicability of numerical Models to Hydrodynamic Levelling. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 289-297.*
- Bretterbauer, K. (1986): Das Höhenproblem der Geodäsie. *ÖZfVuPh, 74. Jahrgang, Heft 4: 205-215.*
- Bursa, M. (1962): Theorie der Bestimmung der Unparallelität der Nebenachsen des Referenzellipsoides mit der Rotationsachse der Erde und der Ebene des astronomischen und geodätischen Ausgangsmeridians aus den Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten. *Studia Geophysica et Geodaetica, Vol. 6: 209 - 214.*

- Bürki, B. (1979): Die Anwendung der Kollokation bei Teilkreisuntersuchungen. *IGP, Bericht Nr. 24, p 48.*
- Bürki, B. (1985): Die operationelle Bestimmung von Lotabweichungen. *IGP, Bericht Nr. 91, p 33.*
- Bürki, B. (1988): Integrale Schwerefeldbestimmung in der Ivrea- Zone und deren geophysikalische Interpretation. *Dissertation ETH Nr. 8621. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, SGK; Bd 38, p 186.*
- Chaperon, F. (1990): Vermessungskunde I und II. *Skript zur Vorlesung, IGP, ETH Zürich.*
- Chaperon, F. und A. Elmiger (1989): Landesvermessung Teil III : Höhennetze. *Skript zur Vorlesung, IGP, ETH Zürich.*
- Cocard, M.(1987): Geodätische Auswertungen von GPS-Messungen im GPS-Testnetz 'Turtmann'. *IGP, Bericht Nr. 129, p 111.*
- Cocard, M., Geiger, A., Wirth, B. und B. Bürki (1988): Versuche zur Kalibration von WM 101 - Antennen. *IGP, Bericht Nr. 142, p 33.*
- Denker, H. (1987): The use of GPS for Improving local Geoid Determinations. Simulation Studies and Test Results. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmeler, Bonn: 245-257.*
- Ehrnsperger, W. und J. J. Kok (1987): Status and Results of the 1986 Adjustment of the United European Levelling Network - UELN - 73. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmeler, Bonn.*
- Elmiger, A. (1969): Studien über die Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. *Dissertation ETH Nr. 4210, ETH Zürich.*
- Elmiger, A., Gurtner, W. (1983): Astrogeodätische Geoidbestimmung und Lotabweichungsinterpolation in der Schweiz. *IGP, Bericht Nr. 74, p 24.*
- Engi, P., E. Hunziker (1944): Das Geoidprofil im Parallelkreis der Eidgenössischen Sternwarte zu Zürich. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, SGK, Band 22.*
- Erker, E. (1987): Das österreichische Geoid - Die vollständige Lösung 1987. *ÖZfVuPh, 75. Jahrgang, Heft 4: 202-206.*
- Feissel, M., D. McCarthy (1989): Explanatory Supplement to IERS Bulletins A und B. *IERS Information, p 8.*
- Geiger, A. und A. Wiget (1986): Dopplermessungen für das Projekt ALGEDOP in der Schweiz. Messungen und Stationsprotokolle. *IGP, Bericht Nr. 101, p 20.*
- Geiger, A., H.-G. Kahle (1986): Gravimetrisches Geoid der Schweiz. *VPK 8/86: 311 - 323.*
- Geiger, A. (1989): Gravimetrisches Geoid der Schweiz: Potentialtheoretische Untersuchungen im Alpenraum. *Dissertation ETH Nr. 9009, ETH Zürich.*

- Gotthardt, E. (1978): Einführung in die Ausgleichsrechnung. *Wichmann Verlag, Karlsruhe, p 310.*
- Gubler, E., H.-G. Kahle, E. Klingelé, St. Mueller und R. Olivier (1981): Recent crustal movements in Switzerland and their geophysical interpretation. *Tectonophysics, 71, p. 125-152.*
- Gurtner, W. (1978): Das Geoid in der Schweiz. *IGP, Mitteilung Nr. 20, ETH Zürich, p 110.*
- Hein, G. (1987): Height Determination and Monitoring with Time using GPS Observations and Gravity Data. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmeler, Bonn: 349 - 360.*
- Heiskanen, W., H. Moritz (1967): Physical Geodesy. *Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University Graz, Austria, p 364.*
- Hirvonen, R.A. (1962): The Reformation of Geodesy. *Bulletin Géodésique N° 62: 197 - 214.*
- Höggerl, N. (1987): Die Bestimmung von Gebrauchshöhen aus GPS-Messungen. *ÖZfVuPh, 75. Jahrgang, Heft 4, p 193 - 201.*
- Jeanrichard, Fr. (1962): Diskussion über theoretische Schleifenschlüsse mit Berücksichtigung der Schwere. *Vortrag gehalten am 27. Feb. 1962 an der L+T. L+T, Bibliothek Ab 169, p15.*
- Jordan, S. (1972): Self-Consistent Statistical Models for the Gravity Anomaly, Vertical Deflections, and Undulation of the Geoid. *JGR, Vol. 77, No. 20: 3660 - 3670.*
- Jung, K. (1956): Figur der Erde. *Handbuch der Physik, Vol. 47, Springer Verlag, Berlin: 534 - 639.*
- Kahle, H.-G. and M. Talwani (1973): Gravimetric Indian Ocean Geoid. *ZfG, 39: 167 - 187.*
- Kahle, H.-G., Chapman, M. and M. Talwani (1978): Detailed 1 x 1° gravimetric Indian Ocean geoid and comparison with GEOS-3 radar altimeter geoid profiles. *Geophys. J. R. astr. Soc. 55: 703 - 720.*
- Kahle, H.-G. (1989): Physikalische Geodäsie. *Skript zur Vorlesung, IGP, ETH Zürich.*
- Kasper, J. (1971): A Second-Order Markov Gravity Anomaly Model. *JGR, Vol. 76, No. 32: 7844 - 7849.*
- Klingelé, E. und Kissling, E. (1982): Schwereanomalien und isostatische Modelle in der Schweiz. I. Zum Konzept der isostatischen Modelle in Gebirgen am Beispiel der Schweizer Alpen. *35. Band Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Herausg.: SGK.*
- King, R.W., E.G. Masters, C. Rizos, A. Stolz und J. Collins (1985): Surveying with GPS. *Monograph 9. School of Surveying, the University of New South Wales, Australia, p 128.*
- Kissling, E. (1980): Krustenaufbau und Isostasie in der Schweiz. *Dissertation ETH Nr. 6655, ETH Zürich, p 165.*

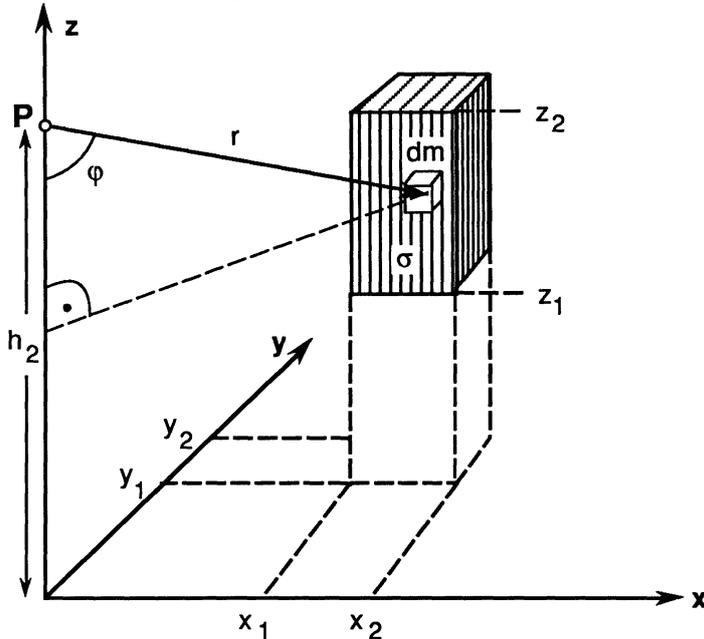
- Kissling, E. (1982): Schwereanomalien und isostatische Modelle in der Schweiz. II. Aufbau der Kruste und des oberen Mantels in der Schweiz. 35. Band *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz*, Herausg.: SGK: 37 - 126.
- L+T (1980): Formeln für die Reduktion schief gemessener Distanzen in das Projektionssystem und die Berechnung der Höhenunterschiede. *L+T, Sektion Triangulation*.
- Mader, K. (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. *Sonderheft 11 ÖZfVuPh, Wien, p 74*.
- Marti, U. (1988): Astrogeodätische Geoidbestimmung in der Ivrea-Zone. *IGP, Bericht Nr. 153. p 51*.
- Marti, U. (1990): ALGESTAR: Satellitengestützte Geoidbestimmung in der Schweiz mit GPS. *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, SGK, Band 41 (im Druck), p61*.
- Moritz, H. (1973): Least-Squares Collocation. *DGK, Bayrische Akademie der Wissenschaften. Reihe A: Theoretische Geodäsie, Heft Nr. 75, p 91*.
- Moritz, H. (1980a): Advanced Physical Geodesy. *H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, p 500*.
- Moritz, H. (1980b): Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Géodésique, The Geodesist's Handbook, Vol 54 N° 3: 395 - 405*.
- Moritz, H. (1983): Theorie der lokalen Geoidbestimmung. *Das Geoid in Österreich; Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, neue Folge, Band III. ÖKIE, Graz: 21 - 45*.
- Nebiker, St. (1988): Auswertung der GPS-Messungen im Polygonzug Visp-Zermatt. *IGP, Bericht Nr. 146. p 59*.
- Niemeier, W. (1987): Observation Techniques for Height Determination and their Relation to usual Height Systems. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 85 - 108*.
- Niethammer, Th. (1932): Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. *SGK, Band 20 (1939) der Astronomisch geodätischen Arbeiten in der Schweiz, Kap. 3b*.
- Niethammer, Th. (1939): Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. *Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, SGK, Band 20*.
- Niethammer, Th. (1945): Das Problem der Bestimmung wahrer Meereshöhen und seine Schweizerische Lösung. *Separatum EXPERIENTIA Vol. I/5, p 22*.
- Pelzer, H. und W. Niemeier (1987): Determination of Heights and Height Changes, *Dümmlerbuch 7862, Bonn, p 762*.
- Remmer, O. (1987): The United European Levelling Network - Present State and future Plans. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 3 - 5*.

- Rummel, R. (1984): From the Observational Model to Gravity Parameter Estimation. In: Schwarz, K.P. (ed.) *Proceedings, Beijing Int. Summer School, Aug. 21. - Sep. 4., Beijing: 67 - 106.*
- Schmid, HH. (1977): Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. *IGP, Mitteilung Nr. 22, ETH Zürich, p 45.*
- Schmid, HH. und S. Heggli (1978): Räumliche Koordinatentransformation. Eine pseudolineare Formulierung als Annäherungslösung und eine strenge Ausgleichung mit entsprechendem Fortran-Programm. *IGP, Mitteilung Nr. 23, ETH Zürich, p 59.*
- Schneider, D. und N. Wunderlin (1981): RAUMTRI Dreidimensionale Netzausgleichung in einem geozentrischen kartesischen Koordinatensystem. Programmbeschreibung / Benutzeranleitung. *IGP, Bericht Nr. 45, p 101.*
- Schneider, D. und A. Geiger (1986): Geodäsie: Nivellementslinie, Astro-geodätisches Profil und GPS-Satelliten: Vermessung zwischen Visp und Zermatt. *NFP 20 Bulletin Nr. 2, Herausg.: Programmleitung des Nationalen Forschungsprogramms 20: "Geologische Tiefenstruktur der Schweiz".*
- Schneider, D., Neiningen, B., Wirth, B. und andere (1990): Arbeiten der GPS-Arbeitsgruppe im dreidimensionalen Testnetz Turtmann 1985 - 1989. *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, SGK, Bd. 42, im Druck.*
- Schürer, M. (1944): Die Reduktion und Ausgleichung des Schweizerischen Landesnivellements. *Annexe aux Procès-Verbal de la 88^{me} séance de la Commission Géodésique Suisse. E. Birkhäuser. Verkauf: L+T, Wabern.*
- Schürer, M. (1990): Das schweizerische geodätische Datum. *VPK 2/90: 88-89.*
- Shaw, L., I. Paul und P. Henrikson (1969): Statistical Models for the Vertical Deflection from Gravity-Anomaly Models. *JGR, Vol. 74, No. 17: 4259 - 4265.*
- Sneddon, I. (1963): Spezielle Funktionen der mathematischen Physik. *Formelsammlung II, B · I · Hochschultaschenbücher, Mannheim, Band 54.*
- Sünkel, H. (1983): Geoidbestimmung. Berechnung an der TU Graz, 2. Teil. *Das Geoid in Österreich; Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, neue Folge, Band III, ÖKIE, Graz: 125 - 143.*
- Sünkel, H. (1986): Konventionelle und moderne Verfahren zur Ableitung orthometrischer Höhen. *ÖZfVuPh, 74, Heft 2, p 77-93.*
- Talwani, M., Poppe, H.R. and P.D. Rabinowitz (1972): Gravimetrically determined geoid in the western North Atlantic. *Sea Surface Topography from Space, Vol. 2 NOAA Techn. Report ERL-228-AOML 7-2: 1-34, Boulder, Colorado.*
- Tilk-Thies, U. (1987): Theoretical Aspects of trigonometric Levelling. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 175 - 190.*
- Torge, W. (1975): Geodäsie. *Sammlung Göschen 2163. Walter de Gruyter, Berlin, New York, p 268.*

- Torge, W. (1987): Accuracy and Stability of the Height Reference Surface. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 69 - 82.*
- Watts, A.B. and A.R. Leeds (1977): Gravimetric geoid in the Northwest Pacific Ocean. *Geophys. J.R. astr. Soc., 50: 249 - 277.*
- Welsch, W. und W. Oswald (1984): Kombinierte Ausgleichung von Doppler-Satellitennetzen und terrestrischen Netzen. *Hochschule der Bundeswehr München, Heft 15, Satelliten-Doppler Messungen: 155 - 191.*
- Welsch, W. und W. Oswald (1987): Stochastic Aspects of Combining Terrestrial and Satellite aided Point Positioning with Emphasis on Height Determination. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 361 - 371.*
- Wirth, B. (1989): Terrestrischer Präzisionspolygonzug Visp - Zermatt. Kombination mit GPS. Auswertungen und Zusammenstellung der im Diplomvermessungskurs 1987 erhobenen Messungen. *IGP, Bericht Nr. 159, p 65.*
- Wolf, H. (1963): Geometric Connection and Re-Orientation of Three-Dimensional Triangulation Nets. *Bulletin Géodésique N° 68: 165 - 169.*
- Wolf, H. (1977): Zur Grundlegung der Kollokationsmethode. *ZfV Nr. 6: 237 - 239.*
- Wolf, H. (1979): Kollokation mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. *ZfV Nr. 1: 13 - 19.*
- Wunderlin, N. (1987): Versuche zur Refraktionsbestimmung mit Hilfe der Kollokation. FORTRAN-Programm REFKOL. Beschreibung und Gebrauchsanleitung. *IGP, Bericht Nr. 132, p 115.*
- Zeger, J. (1985): Aufbau eines neuen Höhensystems in Österreich. *AVN 8-9: 299 - 311.*
- Zilkoski, D. (1987): The North American Vertical Datum of 1988 (NAVD 88) - Tasks, Impacts and Benefits. In: Pelzer, H. und W. Niemeier: Determination of Heights and Height Changes, *Dümmler, Bonn: 47 - 67.*

Anhang: Formeln zur Berechnung der Schwerewirkungen

a) Schwerewirkung des Quaders



$$dg_z = G \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi$$

$$dm = \sigma \, dx \, dy \, dz$$

$$\cos\varphi = \frac{h_2 - z}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (h_2 - z)^2}$$

Abb. A-1: Schwerewirkung des Quaders

$$g_z = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} G \sigma \frac{(h_2 - z)}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + (h_2 - z)^2} \right]^3} dx \, dy \, dz = \text{(ohne Herleitung)}$$

$$= G \sigma \left[\begin{aligned} & x \ln \frac{\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + w^2} \right) \sqrt{x^2}}{\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sqrt{x^2 + w^2}} + y \ln \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + w^2} \right) \sqrt{y^2}}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sqrt{y^2 + w^2}} \\ & - w \arctan \frac{xy}{w \sqrt{x^2 + y^2 + w^2}} \end{aligned} \right]$$

zu berechnen an den Stellen

$$x_2, y_2, w = h_2 - z_2 \quad \text{mit } +1$$

$$x_2, y_1, w = h_2 - z_2 \quad \text{mit } -1$$

$$x_1, y_2, w = h_2 - z_2 \quad \text{mit } -1$$

$$x_1, y_1, w = h_2 - z_2 \quad \text{mit } +1$$

$$x_2, y_2, w = h_2 - z_1 \quad \text{mit } -1$$

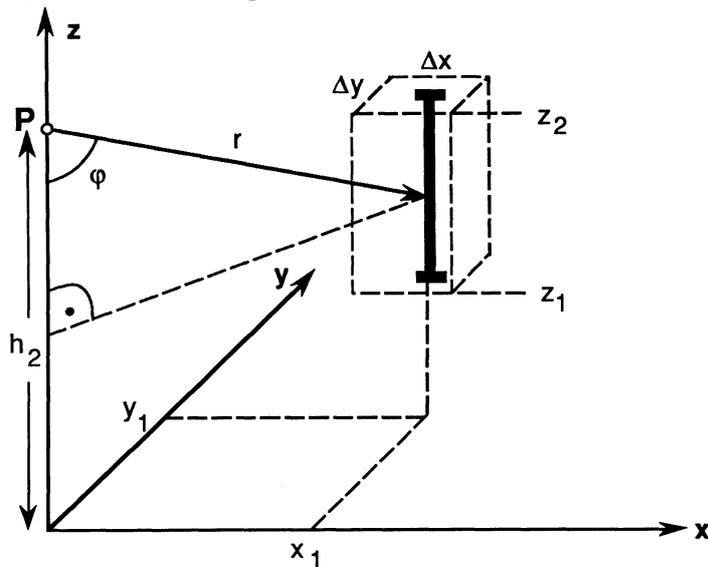
$$x_2, y_1, w = h_2 - z_1 \quad \text{mit } +1$$

$$x_1, y_2, w = h_2 - z_1 \quad \text{mit } +1$$

$$x_1, y_1, w = h_2 - z_1 \quad \text{mit } -1$$

(A-1)

b) Schwerewirkung der Massenlinie



$$dg_z = G \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi$$

$$dm = \sigma \Delta x \Delta y dz$$

$$\cos\varphi = \frac{h_2 - z}{r}$$

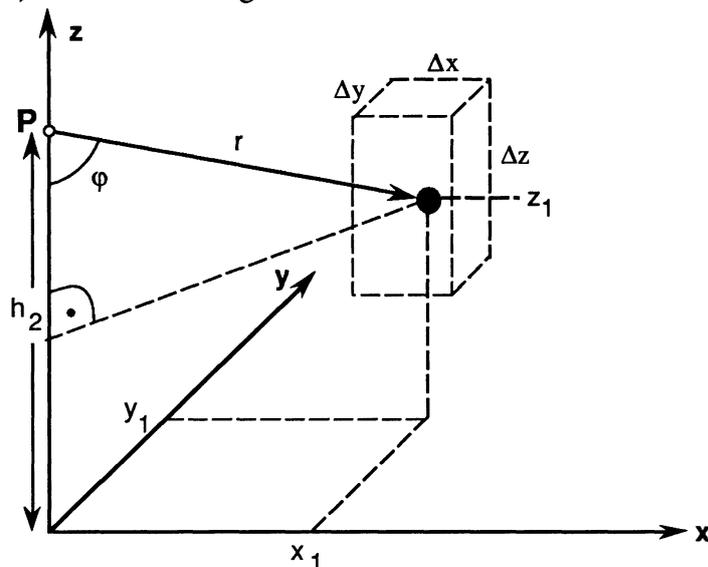
$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z)^2}$$

Abb. A-2: Schwerewirkung der Massenlinie

$$g_z = \int_{z_1}^{z_2} G \sigma \Delta x \Delta y \frac{(h_2 - z)}{\left[\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z)^2} \right]^3} dz$$

$$g_z = G \sigma \Delta x \Delta y \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z_1)^2}} \right] \quad (\text{A-2})$$

c) Schwerewirkung der Punktmasse



$$dg_z = G \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi$$

$$dm = \sigma \Delta x \Delta y \Delta z$$

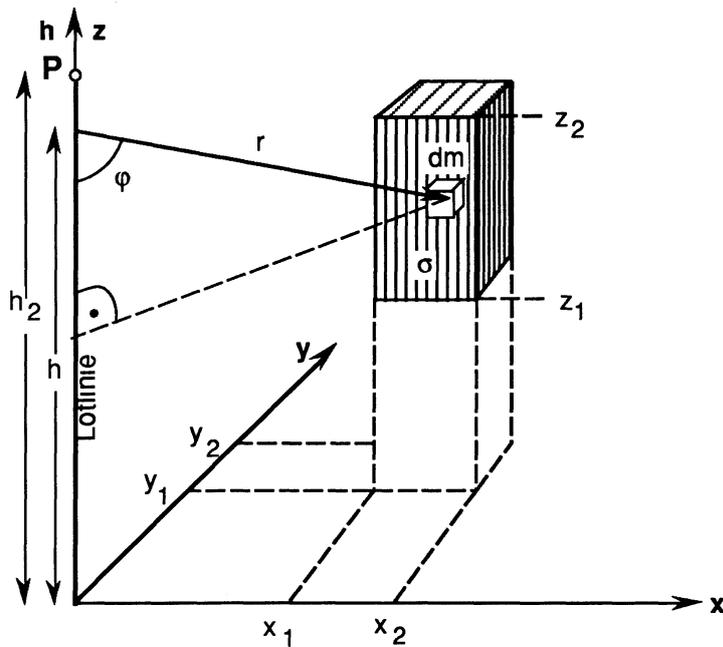
$$\cos\varphi = \frac{h_2 - z}{r}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z)^2}$$

Abb. A-3: Schwerewirkung der Punktmasse

$$g_z = G \sigma \Delta x \Delta y \Delta z \frac{h_2 - z_1}{\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h_2 - z_1)^2} \right)^3} \quad (\text{A-3})$$

d) Mittlere Schwerewirkung des Prismas in der Lotlinie



$$dg_z = G \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi$$

$$dm = \sigma dx dy dz$$

$$\cos\varphi = \frac{h - z}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (h - z)^2}$$

Abb. A-4: Mittlere Schwerewirkung des Prismas in der Lotlinie

$$\bar{g}_z = \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} G \sigma \frac{(h - z)}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z)^2} \right]^3} dx dy dz dh$$

$$= -\frac{1}{h_2} \left[\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} G \sigma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z)^2}} dx dy dz \right]_0^{h_2}$$

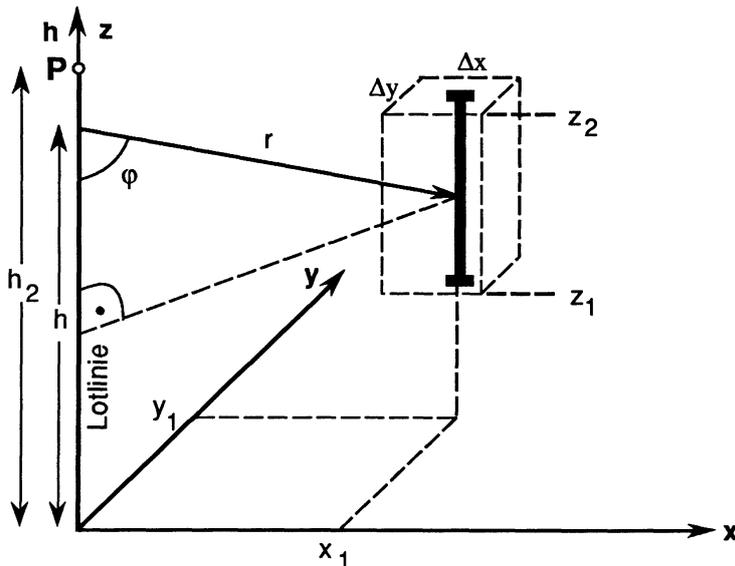
In der eckigen Klammer steht aber die Potentialformel !

$$\bar{g}_z = \frac{G \sigma}{h_2} \cdot \left[\begin{aligned} & yw \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2 + w^2})}{\sqrt{y^2 + w^2}} + xw \ln \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2 + w^2})}{\sqrt{x^2 + w^2}} \\ & + xy \ln \frac{(w + \sqrt{x^2 + y^2 + w^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{yw}{x\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}} \\ & - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{xw}{y\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}} - \frac{w^2}{2} \arctan \frac{xy}{w\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}} \end{aligned} \right] \quad (\text{A-4})$$

zu berechnen an den Stellen

$x_2, y_2, w = h_2 - z_2$ mit +1	$x_2, y_2, w = h_2 - z_1$ mit -1
$x_2, y_1, w = h_2 - z_2$ mit -1	$x_2, y_1, w = h_2 - z_1$ mit +1
$x_1, y_2, w = h_2 - z_2$ mit -1	$x_1, y_2, w = h_2 - z_1$ mit +1
$x_1, y_1, w = h_2 - z_2$ mit +1	$x_1, y_1, w = h_2 - z_1$ mit -1
$x_2, y_2, w = -z_2$ mit -1	$x_2, y_2, w = -z_1$ mit +1
$x_2, y_1, w = -z_2$ mit +1	$x_2, y_1, w = -z_1$ mit -1
$x_1, y_2, w = -z_2$ mit +1	$x_1, y_2, w = -z_1$ mit -1
$x_1, y_1, w = -z_2$ mit -1	$x_1, y_1, w = -z_1$ mit +1

e) Mittelwert der Schwerewirkung der Massenlinie in der Lotlinie



$$\begin{aligned} dg_z &= G \frac{dm}{r^2} \cdot \cos\varphi \\ dm &= \sigma \Delta x \Delta y dz \\ \cos\varphi &= \frac{h - z}{r} \\ r &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h - z)^2} \end{aligned}$$

Abb A-5: Mittelwert der Schwerewirkung der Massenlinie in der Lotlinie

$$\begin{aligned}\bar{g}_z &= \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \int_{z_1}^{z_2} G \sigma \Delta x \Delta y \frac{(h-z)}{\left[\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h-z)^2} \right]^3} dz dh \\ &= \frac{G \sigma \Delta x \Delta y}{h_2} \ln \left(w + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + w^2} \right)\end{aligned}\quad (\text{A-5})$$

zu berechnen an den Stellen

$$w = h_2 - z_2 \quad \text{mit } +1$$

$$w = -z_1 \quad \text{mit } -1$$

$$w = h_2 - z_1 \quad \text{mit } -1$$

$$w = -z_1 \quad \text{mit } +1$$

f) Mittelwert der Schwerewirkung der Punktmasse in der Lotlinie

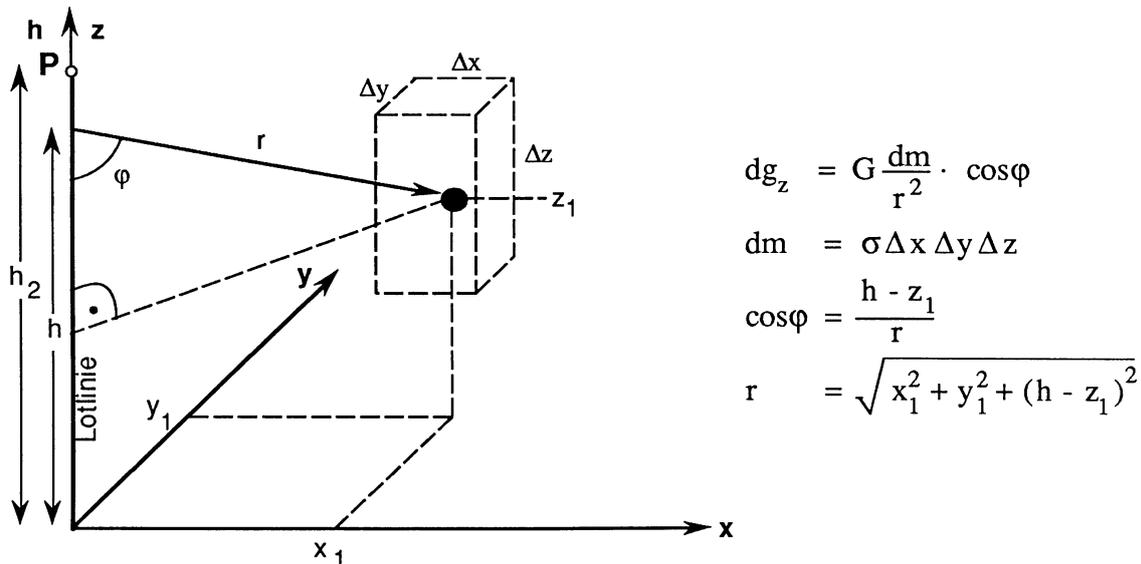


Abb. A-6: Mittelwert der Schwerewirkung der Punktmasse in der Lotlinie

$$\begin{aligned}\bar{g}_z &= G \sigma \Delta x \Delta y \Delta z \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \frac{(h - z_1)}{\left[\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h - z_1)^2} \right]^3} dh \\ \bar{g}_z &= \frac{G \sigma \Delta x \Delta y \Delta z}{h_2} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (h - z_1)^2}} \right]\end{aligned}\quad (\text{A-6})$$

Lebenslauf

30. Okt. 1954 Geboren als zweiter Sohn von Paul und Elisabeth Wirth - Studer,
Bürger von Hundwil AR
- 1960 Kindergarten in Bümpliz BE
- 1961 - 1964 Primarschule in Bümpliz
- 1964 - 1967 Primarschule in Uznach SG
- 1967 - 1970 Sekundarschule in Uznach
- 1970 - 1974 Lehre als Vermessungszeichner beim Ingenieur- und
Vermessungsbüro H. Lutz, Uznach
- 1970 - 1972 Fernkurs "Bautechnik" beim Technischen Lehrinstitut Onken,
Kreuzlingen
- 1974 - 1978 Halbtagesstelle als Vermessungszeichner bei H. Lutz, daneben
Vorbereitung auf die Eidgenössische Matura C bei der AKAD,
Zürich
- 1978 - 1982 Studium an der Abt. VIIIB der ETH Zürich
- 1983 Assistent bei Prof. Konzett in Fehlertheorie und
Ausgleichsrechnung sowie EDV in der Vermessung
- 1984 - 1985 Ingenieur - Geometer - Praktikum beim Meliorations- und
Vermessungsamt Graubünden in Chur
- 1985 Eidg. Patentprüfung in Bern
- 1985 - 1990 Assistent bei Prof. Dr. H.-G. Kahle, Professur für Höhere
Geodäsie und Geodynamik