

# Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

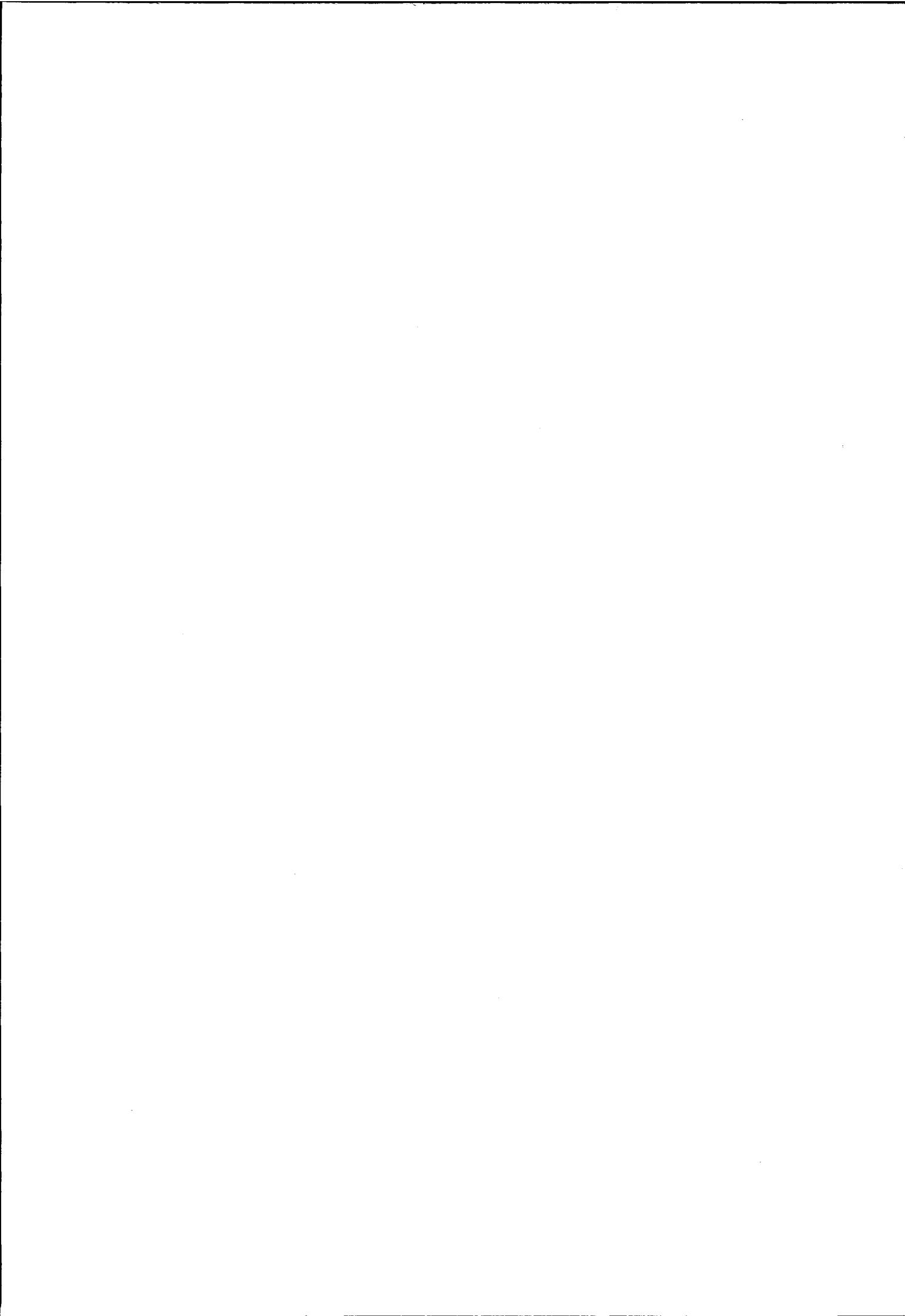
Schweizerischen Geodätischen Kommission  
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Vierunddreißigster Band

Lösung von Parameter-  
bestimmungsproblemen  
in Himmelsmechanik  
und Satellitengeodäsie  
mit modernen Hilfsmitteln

G. Beutler

1982



# Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission  
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Vierunddreißigster Band

Lösung von Parameter-  
bestimmungsproblemen  
in Himmelsmechanik  
und Satellitengeodäsie  
mit modernen Hilfsmitteln

G. Beutler

1982

Adresse der Schweizerischen Geodätischen Kommission:

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
ETH-Hönggerberg  
CH-8093 Zürich

Redaktion des 34. Bandes  
Dr. G. Beutler  
Astronomisches Institut  
Universität Bern

Druck: Offsetdruck Bern AG

INHALT :

	Seite
1. Einleitung .....	1
2. Mathematische Grundlagen und technische Hilfsmittel .....	8
2.1 Die mathematische Struktur der Parameterbe- ... stimmungsprobleme von Himmelsmechanik und von Satellitengeodäsie	9
2.1.1 Problemstellung .....	16
2.1.2 Linearisierung der Aufgaben .....	24
2.1.3 Matrizenschreibweise .....	27
2.1.4 Fehlerrechnung .....	29
2.1.5 Die Variationsgleichungen .....	32
2.1.6 Technische Betrachtungen .....	37
2.1.6.1 Sparen von Kernspeicherplatz .....	37
2.1.6.2 Abbruchkriterien .....	40
2.1.7 Blockschemen zur Lösung von Parameterbe- ... stimmungsaufgaben der Klasse $K_1$	42
2.2 Rechenhilfsmittel .....	46
2.2.1 Die Rechanlage .....	47
2.2.2 Die Programmiersprache , Hilfsprogramme .....	48
und Unterprogramme	
2.3 Numerische Integration gewöhnlicher Diffe- ... rentialgleichungssysteme	53
2.3.1 Lokale Lösung von Anfangswertproblemen .....	60
2.3.1.1 Die lokale Lösung der nicht-linearen .....	65
Anfangswertaufgabe	
2.3.1.2 Die lokale Lösung der linearen Anfangs- ... wertaufgabe	85
2.3.2 Die lokale Randwertaufgabe .....	89
2.3.3 Allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe ...	101
2.3.4 Fehlerbetrachtungen , automatische Inter- ... valleinteilung	106
2.3.4.1 Die lokalen Fehler .....	107
2.3.4.2 Automatische Intervallunterteilung .....	108
2.3.4.3 Der globale Fehler .....	109

	Seite
2.3.5 Schlussbemerkungen .....	116
2.4 Koordinatensysteme und Beobachtungen .....	118
2.4.1 Die verwendeten Koordinatensysteme und .....	118
die Transformationen zwischen ihnen	
2.4.2 Die wichtigsten Beobachtungsarten .....	124
2.4.2.1 Richtungsbeobachtungen .....	124
2.4.2.2 Flugzeitmessung elektromagnetischer .....	128
Signale	
2.4.2.3 Messung des integrierten Dopplereffektes ...	130
eines vom beobachteten Himmelskörper aus-	
gesandten periodischen Signals ( Messung	
von Distanzdifferenzen )	
3. Parameterbestimmungsprobleme der klassischen ...	133
Himmelsmechanik	
3.1 Die Axiome der klassischen Mechanik und das ...	133
Newton'sche Gravitationsgesetz	
3.2 Die Grundgleichungen der Himmelsmechanik .....	137
des Planetensystems	
Spezialfall : Himmelskörper vernachlässig-	143
barer Masse	
3.3 Die zugehörigen Variationsgleichungen .....	145
3.4 Konkrete Problemstellungen .....	148
3.4.1 Bestimmen "aller" Parameter des Planeten-	148
systems	
Betrachtungen zur numerischen Integration ...	157
der Grundgleichungen	
3.4.2 Bahnbestimmungsprobleme .....	162
3.4.2.1 Bahnbestimmung als Randwertproblem .....	166
Bemerkungen zur klassischen Gauss'schen ...	180
Bahnbestimmung	
3.4.2.2 Bahnbestimmung als Anfangswertproblem .....	195

	Seite
4. Parameterbestimmungsprobleme in der Satelliten- engeodäsie	... 204
4.1 Einleitung	204
4.2 Die Grundgleichungen der dynamischen Satellitengeodäsie	208
4.3 Die zugehörigen Variationsgleichungen	218
4.4 Konkrete Problemstellungen	220
4.4.1 Bestimmen "aller" geodynamischen Parameter	221
4.4.2 Erste Bahnbestimmung , Datenaufbereitung	230

### VERZEICHNIS DER BEISPIELE

	Seite
Beispiel 1 : Bahnbestimmung in der klassischen Himmelsmechanik mit Hilfe von Richtungsbeobachtungen ( Problemerk- läuterung , Kap. 2.1 )	... 9
Beispiel 2 : Bestimmen der Bahn eines Kometen und Bestimmen der Masse eines störenden Planeten ( Problemerk- läuterung , Kapitel 2.1 )	... 12
Beispiel 3 : Fragestellungen aus der Satelliten geodäsie ( Problemerk- läuterung , Kapitel 2.1 )	... 13
Beispiel 4 : Numerische Integration des Ein- körperproblems mit Taylorreihen	... 65
Beispiel 5 : Lokale Lösung des Einkörperproblems als Anfangswertaufgabe mit drei Inte- grationsverfahren ( Kapitel 2.3.1.1 )	... 75
Beispiel 6 : Lokale Lösung des Einkörperproblems als Randwertaufgabe mit drei Integra- tionsverfahren ( Kapitel 2.3.2 )	... 96
Beispiel 7 : Allgemeine Lösung des Einkörperpro- blems als Anfangswertaufgabe ( Kapitel 2.3.4 )	... 110

VERZEICHNIS DER BEISPIELE ( FORTSETZUNG )

	Seite
Beispiel 8 : Abschätzung des Rechenaufwandes ..... bei Problemen der klassischen Himmelsmechanik ( Kapitel 3.3 )	146
Beispiel 9 : Erste Bahnbestimmung ohne Störungen , formuliert als Randwertaufgabe ( Kapitel 3.4.2.1 )	187
Beispiel 10: Erste Bahnbestimmung ohne Störungen , formuliert als Anfangswertaufgabe ( Kapitel 3.4.2.2 )	203
Beispiel 11: Bestimmen einer ersten Satellitenbahn unter Berücksichtigung von Störungen mit Hilfe von Richtungs- beobachtungen ( Kapitel 4.4.2 )	238
Beispiel 12: Bahnbestimmung mit Störungen mit Hilfe von Laserbeobachtungen ( Kapitel 4.4.2 )	247

VERZEICHNIS DER FIGUREN

	Seite
Figur 1 : Beispiel 1 .....	11
Figur 2 : Kapitel 2.3 .....	55
Figuren 3a,3b : Beispiel 6 .....	100
Figur 4 : Beispiel 7 .....	111
Figur 5 : Kapitel 2.4.1 .....	119
Figur 6 : Kapitel 2.4.2.1 .....	125
Figur 7 : Kapitel 3.2 .....	139
Figuren 8a,8b,8c,8d : Beispiel 9 .....	193
Figur 9 : Kapitel 4.2 .....	211
Figur 10 : Kapitel 4.2 .....	216
Figur 11 : Kapitel 4.4.1 .....	223
Figur 12 : Beispiel 11 .....	239
Figur 13 : Beispiel 12 .....	248
Figur 14 : Beispiel 12 .....	251

## VERZEICHNIS DER TABELLEN

	Seite
Tabelle 1 : Parameterarten ( Kapitel 2.1.1 ) ....	20
Tabelle 2 : Hilfsprogramme ( Kapitel 2.2.2 ) ....	49
Tabelle 3 : Allgemeine Unterprogramme ..... ( Kapitel 2.2.2 )	51
Tabelle 4 : Unterprogramme zur numerischen ..... Integration ( Beispiel 5 )	76
Tabellen 5a,5b : Fehler verschiedener Integra- ..... tionsverfahren ( Beispiel 5 )	82
Tabellen 6a,6b : Technische Daten verschiedener ... Integrationsverfahren ( Beispiel 5 )	83
Tabelle 7 : Unterprogramme zur Lösung von ..... Primärgleichungen <u>und</u> Variations- gleichungen ( Anfangswertproblem , Kapitel 2.3.1.2 )	88
Tabelle 8 : Unterprogramme zur Lösung lokaler ... Randwertaufgaben ( Kapitel 2.3.2 )	94
Tabellen 9a,9b : Fehler verschiedener Integra- ..... tionsverfahren ( Beispiel 6 )	98
Tabellen 10a,10b : Technische Daten verschiedener .. Integrationsverfahren zur Lösung von Randwertaufgaben ( Beispiel 6 )	99
Tabellen 11a,11b : Globaler Integrationsfehler .... bei der allgemeinen Lösung der An- fangswertaufgabe ( Beispiel 7 )	112
Tabelle 12 : Bezeichnungen in der klassischen ..... Himmelsmechanik	138
Tabelle 13 : Kurzbeschreibung eines Unterpro- ..... gramms zur Berechnung der mittleren Fehler oskulierender Bahnelemente ( Kapitel 3.4.2.1 )	179
Tabellen 14a,14b,14c : Illustration zur Bahnbe- ... stimmung als Randwertaufgabe	192
Tabelle 15 : Bezeichnungen in der Satellitengeo- .. geodäsie ( Kapitel 4.2 )	210

## VORWORT

In allen Naturwissenschaften gibt es zahlreiche und wichtige Aufgaben der Bestimmung von Modellparametern bei Vorgängen , die von gewöhnlichen Differentialgleichungen regiert werden . Die klassischen analytischen Lösungsmethoden werden in vielen Fällen den heutigen Ansprüchen an Genauigkeit und Schnelligkeit nicht mehr gerecht ; ausserdem sind sie oft sehr speziell auf ihre Probleme zugeschnitten .

In der vorliegenden umfangreichen Arbeit entwickelt Herr Dr. G. Beutler ein einheitliches Verfahren zur strengen numerischen Behandlung aller derartigen Aufgaben . Den Anstoss zur systematischen Beschäftigung mit diesem Problemkreis empfing er von der praktischen Satellitengeodäsie . Die dort gewonnenen Erkenntnisse gingen auch in seine Vorlesungen über Himmelsmechanik ein . Aus diesen beiden Arbeitsgebieten unseres Institutes stammen die Anwendungsbeispiele in der vorliegenden Arbeit . Gemeinsamkeiten und Unterschiede treten klar zutage . Für alle , die sich mit der Bahnbestimmung von Himmelskörpern befassen , ist besonders lehrreich der Vergleich der klassischen Methoden von Gauss und Laplace mit dem hier angewandten Verfahren . - Die mathematischen Herleitungen sind rigoros und ausführlich dargestellt , in grösster Allgemeinheit für die Bewältigung auch ganz verwickelter Aufgaben aus allen Gebieten . Die Arbeit verdient daher weite Verbreitung und Beachtung .

Ich danke der Schweizerischen Geodätischen Kommission dafür , dass sie sie freundlicherweise in die angesehene Reihe ihrer Publikationen aufnimmt .

Prof. Paul Wild

Astronomisches Institut  
der Universität Bern

## VERDANKUNGEN

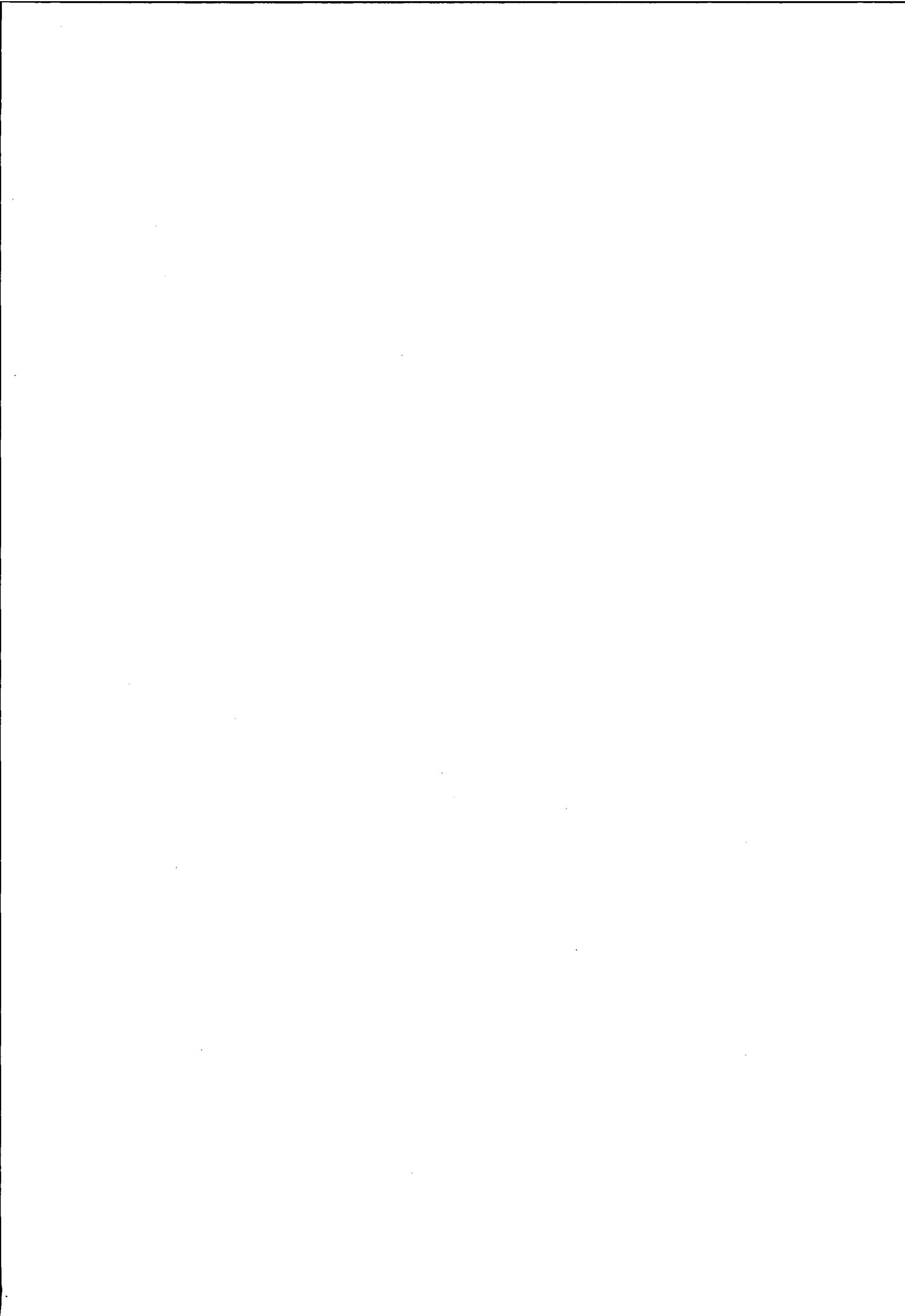
An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. P. Wild , dem Direktor des Astronomischen Institutes der Universität Bern , dafür danken , dass mir für das Schreiben der vorliegenden Arbeit in grosszügiger Weise Zeit zur Verfügung gestellt wurde .

Zu danken habe ich weiterhin Herrn M. Rothacher für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes und Herrn Dr. W. Gurtner für das Zeichnen der Figuren .

Schliesslich gilt mein Dank Frau Ch. Strickler , die mir bei einigen Korrekturen des Originals behilflich war .

Bern , Oktober 1982

G. Beutler



# 1. EINLEITUNG

---

Die Himmelsmechanik in ihrem ursprünglichen Sinn beschäftigt sich mit der Bewegung von Planeten, Planetoiden, Kometen, Meteoren und von natürlichen Satelliten der Planeten in unserem Sonnensystem. In der vorliegenden Arbeit soll auch die Beschreibung der Bewegung künstlicher Erdsatelliten und anderer künstlicher Raumsonden unter den Begriff Himmelsmechanik fallen.

Die Bahnen aller dieser Himmelskörper sind partikuläre Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung in der Zeit  $t$  (Bewegungsgleichungen). Sie folgen aus den Newton'schen Axiomen der Mechanik und aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz (siehe Kapitel 3).

Mit dem Begriff Parameter bezeichnen wir alle diejenigen Grössen, die

- a. das Differentialgleichungssystem eindeutig festlegen, und die
- b. genau eine partikuläre Lösung des betreffenden Systems definieren.

(1)

Unter Parameterbestimmung ist demnach die Bestimmung der unter (1) eingeführten Grössen zu verstehen.

(2)

Beispiele für solche Parameter:

Zu a: Massen der Planeten.

Koeffizienten von Entwicklungen des Erdpotentials (bei der Beschreibung der Bewegung künstlicher Erdsatelliten).

Zu b: Anfangs- oder Randwerte: Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Himmelskörper zu einer bestimmten Epoche  $T_0$  resp. Ortsvektoren der Himmelskörper zu zwei verschiedenen Epochen  $T_1$  und  $T_2$ .

Die Differentialgleichungssysteme für die Bewegung der Himmelskörper werden in Kapitel 3 resp. 4 hergeleitet.

Dabei ist es sinnvoll, zwei verschiedene Sätze von sogenannten Grundgleichungen einzuführen:

- a. die Grundgleichungen für die Bewegung von natürlichen Himmelskörpern des Sonnensystems (Kapitel 3.2)
- b. die Grundgleichungen für die Bewegung von künstlichen Erdsatelliten (Kapitel 4.2)

Ausgehend von diesen Grundgleichungen können für die klassische Himmelsmechanik resp. für die Satellitengeodäsie verschiedene spezielle Parameterbestimmungsprobleme (z.B. reine Bahnbestimmung) formuliert werden.

Zur Bestimmung der in (1) eingeführten Parameter stehen die Beobachtungen zur Verfügung.

Eine Beobachtung oder eine Messung  $\phi_j^!$  ist (abgesehen vom wahren Messfehler  $\epsilon_j$ ) gleich dem Wert einer reellen Funktion  $\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  der unbekannt Parameter  $p_i, i = 1, 2, \dots, n_p$  an der Stelle  $p_i = p_i^*, i = 1, 2, \dots, n_p$ ; dabei sind die  $p_i^*, i = 1, 2, \dots, n_p$  die wahren Werte der unbekannt Parameter.

Es gilt:

$$\phi_j^! + \epsilon_j = \phi_j(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_p}^*), \quad j=1, 2, \dots, n_b \tag{3}$$

Wo:  $n_b$ : Anzahl der Beobachtungen (Messungen)

$n_p$ : Anzahl der Parameter

$p_i, i=1, 2, \dots, n_p$ : Bezeichnung der Parameter

$p_i^*, i=1, 2, \dots, n_p$ : Wahre Parameterwerte

$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}), j=1, 2, \dots, n_b$ : Beobachtete (gemessene) Funktionen.

$\phi_j(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_p}^*), j=1, 2, \dots, n_b$ : Wahre Funktionswerte.

Mit der Struktur der beobachteten Funktionen werden wir uns im zweiten Kapitel befassen.

Eine Parameterbestimmung ist nur möglich, wenn die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der Unbekannt gleichkommt oder aber diese übersteigt. Wir nehmen im folgenden stets an, dass gilt:

$$\underline{n_b \geq n_p} \tag{4}$$

Ist  $n_b > n_p$ , stellt sich die Frage nach dem wahrscheinlichsten Parametersatz. Diese Frage ist einfach zu beantworten, falls die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

Minimumprinzip 1

Voraussetzungen:

1. Die Beobachtungsfehler sind Werte von unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte alle gleich Null und deren Varianzen alle gleich sind.

2.  $n_b > n_p$  (5a) \*

Der wahrscheinlichste Parametersatz  $p_i^+$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  ist Lösung der folgenden Extremalaufgabe: (5)

$$\sum_{j=1}^{n_b} (\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 = \text{Min.} \quad (5b)$$

Wobei:  $\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) := \phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) - \phi_j^+$   
Die Funktionswerte von  $\rho_j(\dots)$  an der Stelle  $p_i = p_i^+$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  nennt man Residuen. (5c)

\*) Die Annahme (5a) garantiert in der Tat noch nicht, dass durch (5) genau ein Parametersatz definiert wird. Es kann vorkommen, dass auch im Fall  $n_b \gg n_p$  keine eindeutige Lösung definiert ist (siehe Beispiel 12). Für den Praktiker heisst dies immer, dass er die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten reduzieren darf resp. reduzieren muss.

Die Anwendung des Minimumprinzips (5) ist immer dann angezeigt, wenn alle Beobachtungen von gleicher oder zum mindesten von vergleichbarer Genauigkeit sind. Dies ist jedoch in der Praxis nicht immer erfüllt:

Beispiele:

- Richtungsbeobachtungen zu einem Himmelskörper mit Teleskopen verschiedener Brennweiten.

- Verwendung verschiedener Beobachtungsarten (Richtungen und Distanzen) in der gleichen Parameterbestimmungsaufgabe.

In diesen und ähnlichen Fällen folgt der wahrscheinlichste Parametersatz durch das allgemeinere Minimumprinzip 2:

Minimumprinzip 2

Voraussetzungen:

- Die Beobachtungsfehler  $\varepsilon_j, j=1, 2, \dots, n_b$  sind Werte von normalverteilten Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte alle gleich Null und deren Varianzen durch
 
$$\sigma_j^2 = \sigma_0^2 / g_j, \quad j=1, 2, \dots, n_b \quad (6a)$$
 definiert sind.

Wo:  $g_j, j=1, 2, \dots, n_b$  die Gewichte der Beobachtungen genannt werden. Diese müssen zur Parameterbestimmung bekannt sein. (6)

$\sigma_0$  wird mittlerer Gewichtseinheitsfehler genannt. Dieser muss nicht gegeben sein.

- $n_b > n_p$

Der wahrscheinlichste Parametersatz  $p_i^+, i=1, 2, \dots, n_p$  ist Lösung der folgenden Extremalaufgabe:

$$\sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 = \text{Min.} \quad (6b)$$

(Definition der Residuen siehe (5c) ) .

Erläutern wir noch den letzten im Titel der vorliegenden Arbeit auftretenden Begriff:

Unter modernen Hilfsmitteln sollen digitale Rechenanlagen jeder Grössenordnung (programmierbare Tischrechner, Klein- und Grosscomputer) zu verstehen sein. (7)

Es wäre falsch anzunehmen, dass die Hilfsmittel (7) der Himmelsmechanik lediglich einen technischen Fortschritt gebracht

haben. Gewiss ist auch dieser Aspekt nicht zu unterschätzen: in dieser Wissenschaft wurde und wird sehr viel numerisch gerechnet (man denke nur an Bahnbestimmung und Ephemeridenrechnung).

Die eigentliche Bedeutung der modernen Hilfsmittel (7) liegt jedoch darin, dass man dank ihnen viele klassische Probleme viel direkter, einfacher und durchsichtiger formulieren und lösen kann als dies vorher möglich war, und dass man zusätzlich neue Probleme anpacken kann, die sich bisher wegen des Rechenaufwandes einer Analyse entzogen. (8)

Der Aspekt (8) war das wichtigste Motiv für die Entstehung der vorliegenden Arbeit.

Das einleitende Kapitel soll mit einigen Bemerkungen zur Bedeutung der Himmelsmechanik abgeschlossen werden:

Das, was wir heute unter dem Begriff "Himmelsmechanik" verstehen, begann 1687 mit der Veröffentlichung von I. Newtons "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" {Newton, 1687}. Ein wesentlicher Teil jenes Werkes ist der Bewegung der Himmelskörper unseres Planetensystems gewidmet - das Newton'sche Gravitationsgesetz, mit dessen Hilfe die Bewegung der Planeten um die Sonne derart gut beschrieben werden kann, wurde hier erstmals publiziert.

Schon diese Tatsache belegt, dass die Himmelsmechanik für die Entwicklung der Physik - vor allem der Mechanik - von zentraler Bedeutung war. Auch in der "Nach-Newton-Aera" war die Himmelsmechanik mit der Entwicklung neuer Gebiete der exakten Wissenschaften stets auf engste verknüpft (klassische Analysis, analytische Mechanik).

Nicht hoch genug kann schliesslich die Bedeutung der Himmelsmechanik für die numerische Analysis eingeschätzt werden: Interpolationsrechnung, Differenzenrechnung, numerische Integration sind Teilgebiete, die von Himmelsmechanikern wesentlich mitgestaltet wurden. So schreibt Z. Kopal in seinem Buch "Numerical Analysis" {Kopal, 1955, p. 9}:

"In fact, until quite recently astronomers (and geodesists) have been the only real protagonists and accomplished masters of scientific computation, and as such are responsible for a large part of the techniques now in use, ..."

Zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts fiel die Himmelsmechanik in eine Art Dornröschenschlaf, aus dem sie erst Ende der fünfziger Jahre durch den Beginn des Raumfahrtzeitalters unsanft geweckt wurde.

Neue, zum Teil wesentlich anspruchsvollere Probleme waren zu behandeln: Bei Aufgaben, wie sie in der Satellitengeodäsie zu lösen sind, ist es keine Seltenheit, dass die Anzahl der Unbekannten grösser als hundert und die Anzahl der Beobachtungen grösser als zehntausend ist.

Die in dieser jungen Wissenschaft zu lösenden Aufgaben sind also schon vom Umfang her mit den meisten Problemen der klassischen Himmelsmechanik nicht zu vergleichen.

Es gibt jedoch auch wichtige qualitative Unterschiede:

- In der klassischen Himmelsmechanik standen bis vor kurzem ausschliesslich Richtungsbeobachtungen zur Verfügung. In der Satellitengeodäsie waren praktisch von Anfang an weitere Beobachtungsarten (Distanzbeobachtungen mit Hilfe von Riesepulslasern, Distanzdifferenzbeobachtungen mit Hilfe der Dopplerempfänger) zu verarbeiten.
- Im Gegensatz zur klassischen Himmelsmechanik sind bei der Bewegung von künstlichen Erdsatelliten die Nicht-Gravitationskräfte Luftwiderstand und Strahlungsdruck zu modellieren.

Man unterscheidet in der Satellitengeodäsie zwischen der analytischen und der numerischen Lösungsmethode.

Der Unterschied zwischen den beiden Lösungsmethoden besteht (im wesentlichen) darin, auf welche Weise die Bewegungsgleichungen gelöst werden:

Bei der analytischen Methode bedient man sich des Instrumentariums der allgemeinen Störungsrechnung. Als Resultat erhält man die Bahn des Satelliten als eine Funktionenreihe bekannter elementarer Funktionen mit Koeffizienten, die sich aus den An-

fangsbedingungen berechnen lassen.

Der für jeden einzelnen Störterm zu leistende Aufwand an Analyse ist beträchtlich. Zudem ist zu beachten, dass die resultierenden Reihen in jedem Falle "nur" Näherungen der tatsächlichen Bahn darstellen.

Bei der numerischen Methode werden die Bewegungsgleichungen durch die Technik der numerischen Integration gelöst.

(Weitere Ueberlegungen zum Thema analytische/numerische Methoden siehe {Beutler, 1977}).

Die grosse Bedeutung der für die Probleme der Satellitengeodäsie entwickelten numerischen Lösungsmethode liegt in ihrer Einfachheit und in ihrer universellen Anwendbarkeit auf andere Gebiete der angewandten Mathematik und Physik.

Um die universelle Anwendbarkeit der numerischen Lösungsmethoden zu betonen, werden wir in Kapitel 2 ein Lösungsschema für eine breite Klasse von Parameterbestimmungsproblemen entwickeln. Meines Erachtens wird durch Verallgemeinerungen dieser Art einmal mehr die Bedeutung der Himmelsmechanik/Satellitengeodäsie für andere wissenschaftliche Disziplinen unterstrichen.

Dass übrigens die im Gebiete der Satellitengeodäsie entwickelten Lösungsverfahren auch auf die klassische Himmelsmechanik zurückwirken, werden wir in Kapitel 3.4.2 sehen.

## 2. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN UND TECHNISCHE HILFSMITTEL

---

Das vorliegende Kapitel umfasst vier voneinander unabhängige Teilkapitel :

In Kapitel 2.1 wird zunächst die mathematische Struktur der zu lösenden Aufgaben untersucht : In Kapitel 2.1.1 wird diese Struktur anhand von drei einfachen Beispielen erläutert , die Parameterbestimmungsaufgaben von Satellitengeodäsie und Himmelsmechanik werden schliesslich einer Klasse  $K_1$  von Parameterbestimmungsaufgaben zugeordnet ( siehe (18) ) . In den Kapiteln 2.1.2 bis 2.1.7 werden anschliessend die Lösungsverfahren für die Probleme dieser übergeordneten Klasse hergeleitet und in zwei Blockschemen festgehalten ( siehe (66)/ (67) ) .

In der vorliegenden Arbeit werden alle praktischen Anwendungen mit dem Kleincomputer der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald berechnet . Daher werden in Kapitel 2.2 diese Rechanlage sowie einige Hilfsprogramme und Unterprogramme kurz vorgestellt .

Kapitel 2.3 ist der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme gewidmet . Im Gegensatz zu früheren Behandlungen dieses Themas ( siehe z.B. {G. Beutler,1979} ) wird das Schwergewicht auf die numerische Lösung von Parameterbestimmungsaufgaben und auf einfache Anwendbarkeit gelegt .

In Kapitel 2.4 schliesslich werden Koordinatensysteme , Koordinatentransformationen und die ( für das folgende ) wichtigsten Beobachtungstechniken erläutert .

"Probleme der Parameterbestimmung in physikalischen Systemen" war der Titel einer Vorlesung , die ich im Wintersemester 1981/1982 an der Universität Bern hielt . Einige der in Kapitel 2.1 angeschnittenen Themen sind in jener Vorlesung ausführlicher behandelt worden . Daher wird an der einen und anderen Stelle auf das in der Reihe "Mitteilungen der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald" erschienene Skriptum zu dieser Vorlesung

verwiesen ( siehe {G. Beutler,1982} ) .

## 2.1 DIE MATHEMATISCHE STRUKTUR DER PARAMETERBESTIMMUNGS - PROBLEME IN HIMMELSMCHANIK UND SATELLITEN - GEODÄSIE

---

Vor der genauen Problemdefinition in Kapitel 2.1.1 wollen wir die Art der zu lösenden Aufgaben durch drei Beispiele veranschaulichen .

Zu diesen ( und den folgenden Beispielen ) zwei Anmerkungen technischer Natur :

Anmerkung 1 : Die wichtigsten Beispiele werden numeriert ( siehe Verzeichnis der Beispiele Seite III ) . Um sie vom Haupttext abzuheben , werden sie durch ein engeres Schriftbild und durch einen kleineren Zeilenabstand gekennzeichnet .

Die Formeln werden innerhalb der Beispiele durch (Bi.xx) gekennzeichnet . Dabei steht "B" für Beispiel , "i" ist die Nummer des Beispiels , "xx" ist die Nummer der Formel innerhalb des Beispiels .

Anmerkung 2 : Es ist unumgänglich , dass in den folgenden drei Beispielen dem Haupttext an einigen Stellen vorgegriffen wird . Wir werden aber immer angeben , wo der betreffende Sachverhalt gründlicher behandelt wird .

Beispiel 1 : Bahnbestimmung in der klassischen Himmelsmechanik mit  
Hilfe von Richtungsbeobachtungen

---

Für diese Aufgabe werden in Kapitel 3 verschiedene Lösungsmethoden besprochen . In diesem ersten Beispiel sollen nur die prinzipiellen Aspekte der Bahnbestimmungsaufgabe erwähnt werden :

- Die heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  des beobachteten Himmelskörpers (HK) ist Lösung eines gewöhnlichen , nicht linearen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung mit drei Gleichungen :

$$\underline{\vec{r}^{(2)} = \vec{f}(t;\vec{r})}$$

(Bl.1)

$\vec{r}(t)$  ist der heliozentrische Ortsvektor des beobachteten Himmelskörpers , (Bl.2)  
 $\vec{r}^{(i)}(t)$  ,  $i=0,1,2,\dots$  ist dessen  $i$ -te Ableitung nach der Zeit  $t$  .

$\vec{f}(t;\vec{r})$  wird bei der reinen Bahnbestimmungsaufgabe , wie wir sie hier besprechen , als bekannt vorausgesetzt . (Bl.3)

Die explizite Gestalt des Systems (Bl.3) - die hier nicht von Interesse ist - wird in Kapitel 3 hergeleitet .

Durch (Bl.1) ist die Bahn  $\vec{r}(t)$  noch nicht eindeutig festgelegt :  $\vec{r}(t)$  ist eine partikuläre Lösung des Systems (Bl.1) ; eine partikuläre Lösung eines Differentialgleichungssystems kann auf vielerlei verschiedene Arten definiert werden . Es seien an dieser Stelle die beiden wichtigsten Möglichkeiten erwähnt :

- Problemformulierungen

a. Anfangswertproblem

Zu einem bestimmten Zeitpunkt (Epoche)  $T_0$  muss gelten :

$$\vec{r}^{(i)}(T_0) = \vec{r}_{0i} , \quad i=0,1 \quad \text{(Bl.4a)}$$

b. Randwertproblem

Zu zwei verschiedenen Zeiten (Epochen)  $T_i, i=1,2$  muss gelten :

$$\vec{r}(T_i) = \vec{r}_{1i} , \quad i=1,2 , T_1 \neq T_2 \quad \text{(Bl.4b)}$$

Die Epoche  $T_0$  in (Bl.4a) ist frei wählbar . Bei den Epochen in (Bl.4b) ist darauf zu achten , dass die zugehörigen Vektoren  $\vec{r}_{1i}, i=1,2$  nicht kollinear sind .

Sind die Vektoren auf den rechten Seiten von (Bl.4a,b) gegeben , ist durch (Bl.1) , (Bl.4a) eine Anfangswertaufgabe , durch (Bl.1) , (Bl.4b) eine Randwertaufgabe definiert .

Die Formulierung als Anfangswertaufgabe ist - vom mathematischen Standpunkt aus gesehen - weniger problematisch , da dafür in der Literatur einfache Existenz- und Eindeutigkeitssätze vorhanden sind . Bei Randwertproblemen der Art (Bl.1) , (Bl.4b) ist insbesondere die Eindeutigkeit nicht immer gewährleistet . In der praktischen Anwendung ist dieser Vorbehalt jedoch kaum von Bedeutung , da aus "physikalischen" Ueberlegungen meist nur eine Lösung in Frage kommt . In der einschlägigen Literatur wird diese Frage daher kaum diskutiert .

In Kapitel 3 werden wir die reine Bahnbestimmungsaufgabe als Anfangs- und als Randwertproblem behandeln .

- Welches sind die bei der reinen Bahnbestimmung zu bestimmenden Parameter ?

Da das Differentialgleichungssystem (Bl.1) gegeben ist , müssen lediglich irgendwelche sechs Grössen \*) bestimmt werden , die ihrerseits die Vektoren auf den rechten Seiten der Gleichungen (Bl.4a) resp. (Bl.4b) festlegen :

---

\*) In einigen Spezialfällen kann die Anzahl der Parameter reduziert werden ( siehe Kapitel 3 ) .

Bei der reinen Bahnbestimmung müssen ( höchstens ) sechs Parameter  $p_i$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  bestimmt werden , die die Anfangswerte (Bl.4a) resp. die Randwerte (Bl.4b) eindeutig festlegen .

Bei der Formulierung als Anfangswertaufgabe gilt :

$$\vec{r}^{(i)}(T_0) = \vec{r}_{0i}(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) , \quad i=0,1 , \quad n_p \leq 6 \quad (\text{Bl.5})$$

Bei der Formulierung als Randwertaufgabe gilt :

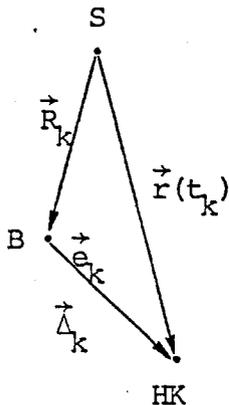
$$\vec{r}(T_i) = \vec{r}_{1i}(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) , \quad i=1,2 , \quad n_p \leq 6$$

- Die beobachteten Funktionen

Wir nehmen vereinfachend an , dass von einer Beobachtungsstation B aus zu den Zeiten  $t_k$  ,  $k=1,2,\dots,n_r$  ,  $n_r \geq 3$  die Richtungen zu dem betreffenden Himmelskörper gemessen werden . ( In Kapitel 2.4.2.1 werden wir sehen , dass die beobachteten Richtungen in Wirklichkeit etwas anders definiert sind ) .

Die Geometrie der k-ten Beobachtung wird durch Figur 1 veranschaulicht :

Figur 1



Legende

- S : Sonne
- B : Beobachtungsstation
- HK: Beobachteter Himmelskörper
- $\vec{R}_k$  : Heliozentrischer Ortsvektor der Beobachtungsstation zur Zeit  $t_k$
- $\vec{r}(t_k)$  : heliozentrischer Ortsvektor von HK zur Zeit  $t_k$

$$\vec{\Delta}_k := \vec{r}(t_k) - \vec{R}_k , \quad \Delta_k := |\vec{\Delta}_k| \quad (\text{Bl.6})$$

$$\vec{e}_k := \vec{\Delta}_k / \Delta_k \quad (\text{Bl.7})$$

Die beobachtete Richtung ist durch den Einheitsvektor  $\vec{e}_k$  definiert . Beobachtet werden allerdings nicht direkt die kartesischen Koordinaten dieses Vektors , sondern die zwei Polarkoordinaten Rektaszension  $\alpha_k$  und Deklination  $\delta_k$  , welche sich auf das mittlere Aequatorsystem einer bestimmten Epoche beziehen ( Definition siehe Kapitel 2.4.1 , (132a) ) :

$$\vec{e}_k := \begin{bmatrix} \cos(\alpha_k) \cdot \cos(\delta_k) \\ \sin(\alpha_k) \cdot \cos(\delta_k) \\ \sin(\delta_k) \end{bmatrix} \quad (\text{Bl.8})$$

Oder :

$$\alpha_k := \text{arc tan} ( \Delta_{k2} / \Delta_{k1} ) , \quad \delta_k := \text{arc sin} ( \Delta_{k3} / \Delta_k ) \quad (\text{Bl.9})$$

In Anbetracht von (Bl.5) darf man schreiben :

$$\vec{r}(t) := \vec{r}(t; p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) \quad (\text{Bl.10})$$

Setzt man (B1.10) in (B1.6) ein, und eliminiert in (B1.9) die Komponenten und den Betrag des Vektors  $\vec{\Delta}_k$  mit den so erhaltenen Gleichungen, folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) &= \psi_1(\vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_{n_p})) \\ \delta_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) &= \psi_2(\vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_{n_p})) \end{aligned} \quad , k = 1, 2, \dots, n_r \quad (B1.11)$$

Pro beobachtete Richtung resultieren also zwei beobachtete Funktionen im Sinne von Definition (3).

Beide Funktionen sind nicht linear in den Parametern  $p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n_p$ .

Weiter ist aus (B1.11) ersichtlich, dass es sich um zusammengesetzte Funktionen handelt, wobei die äusseren Funktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  elementare Funktionen in den Komponenten des Vektors  $\vec{r}(t_k)$  sind, während die inneren Funktionen im allgemeinen als Lösung eines Differentialgleichungssystems nicht elementar in den gesuchten Parametern sind.

Vollständigkeitshalber wollen wir noch den Anschluss an die allgemeine Schreibweise von Definition (3) herstellen:

$$\begin{aligned} \phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) &:= \alpha_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}), \quad j=2 \cdot k-1 \\ \phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) &:= \delta_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}), \quad j=2 \cdot k \\ n_b &:= 2 \cdot n_r \end{aligned} \quad , k=1, 2, \dots, n_r \quad (B1.12)$$

**Beispiel 2 : Bestimmen der Bahn eines Kometen und Bestimmen der Masse eines störenden Planeten**

Eine solche Fragestellung ist sinnvoll, wenn der beobachtete Komet "nahe" an einem grossen Planeten vorbeizieht.

Setzt man die heliozentrische Bahn des störenden Planeten als bekannt voraus, kann die Bahn des Kometen beispielsweise als Lösung des folgenden Anfangswertproblems dargestellt werden:

$$\vec{r}^{(2)} = \vec{f}_0(\vec{r}) + m_p \cdot \vec{f}_1(t; \vec{r}) \quad (B2.1)$$

$$\vec{r}^{(i)}(T_0) = \vec{r}_{0i}(p_1, p_2, \dots, p_6), \quad i=0, 1 \quad (B2.2)$$

In (B2.1) ist  $m_p$  die gesuchte Masse des störenden Planeten. Die explizite Gestalt der Funktionen  $\vec{f}_i(\dots)$  ist in diesem Beispiel nicht von Interesse (siehe dazu Kapitel 3).

$p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$  sind sechs Parameter, die die Vektoren  $\vec{r}_{0i}$ ,  $i=0, 1$  eindeutig festlegen.

Für die Bahn  $\vec{r}(t)$  dürfen wir schreiben:

$$\vec{r}(t) := \vec{r}(t; p_1, p_2, \dots, p_6, m_p) \quad (B2.3)$$

Offenbar treten in (B2.3) zwei verschiedene Parameterarten auf: Zum einen die schon in Beispiel 1 angetroffenen Parameter  $p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$ , die die

Anfangswerte definieren , zum anderen der Parameter  $m_p$  , der zur Definition des Differentialgleichungssystems (B2.1) benötigt wird .

Bei komplizierteren Aufgaben ( mehr als ein störender Planet oder störende Planeten mit nicht kugelsymmetrischer Massenverteilung etc. ) werden wesentlich mehr Parameter dieses Typs auftreten .

In Kapitel 2.1.1 werden wir Parameter , die Anfangs- oder Randwerte definieren Parameter vom Typ 1 , Parameter , die das zugrunde liegende Differentialgleichungssystem festlegen , Parameter vom Typ 2 nennen ( siehe Tabelle 1 Seite 20 ) .

In Analogie zu (Bl.11) definieren wir die beobachteten Funktionen durch :

$$\begin{aligned} \alpha_k ( p_1, p_2, \dots, p_6, m_p ) &= \psi_1 ( \vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_6, m_p) ) \\ \delta_k ( p_1, p_2, \dots, p_6, m_p ) &= \psi_2 ( \vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_6, m_p) ) \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n_r \quad (B2.4)$$

Dabei haben wir wiederum angenommen , dass  $n_r$  Richtungen von ein und demselben Observatorium aus gemessen wurden , dessen heliozentrische Positionen zu den Zeiten  $t_k$  ,  $k=1, 2, \dots, n_r$  bekannt sind .

Die Struktur der beobachteten Funktionen ist im wesentlichen dieselbe wie in Beispiel 1 ; damit gelten alle Bemerkungen zu (Bl.11) auch in Bezug auf (B2.4)

### Beispiel 3 : Fragestellungen aus der Satellitengeodäsie

In Kapitel 4 wird gezeigt , dass die Differentialgleichungen für die Bewegung eines künstlichen Erdsatelliten die folgende Gestalt haben :

$$\vec{r}^{(2)} = R(t)^T \cdot \vec{f}_0 ( \vec{r}' ) + \vec{f}_1 ( t; \vec{r}, \vec{r}^{(1)} ) \quad (B3.1)$$

Wobei :  $\vec{r}(t)$  : Ortsvektor des Satelliten im geozentrischen Aequatorsystem der Epoche  $E_0$  . \*) (B3.2a)

$\vec{r}'(t)$  : Ortsvektor des Satelliten im geozentrischen erdfesten System. \*) (B3.2b)

$R(t)$  : Drehmatrix , durch die der Uebergang vom Aequatorsystem ins erdfeste System definiert ist : (B3.2c)

$\vec{r}'(t) := R(t) \cdot \vec{r}(t)$  ;  $\vec{r}(t) = R(t)^T \cdot \vec{r}'(t)$  \*) (B3.2d)  
 $R(t)^T$  ist die zu  $R(t)$  transponierte Matrix .

$R(t)$  ist ein Produkt verschiedener Drehmatrizen , durch die die Bewegung der Erde als eines Starrkörpers in einem Quasi-Inertialsystem beschrieben wird ( siehe Kapitel 2.4.1 ) .

Die explizite Gestalt der Funktionen  $\vec{f}_0(\dots)$  ,  $\vec{f}_1(\dots)$  wird uns in Kapitel 4 beschäftigen ; sie ist hier nicht von Interesse .

Während eines bestimmten Zeitintervalles soll ein künstlicher Erdsatellit von insgesamt  $n_{St}$  Stationen aus beobachtet werden :

Es seien :  $\vec{X}_i$  ,  $i=1, 2, \dots, n_{St}$  : Ortsvektoren der Stationen im erdfesten System . (B3.3)

\*) Eine korrektere Schreibweise wird in Kapitel 2.4.1 eingeführt und in Kapitel 4 konsequent angewandt .

Einfachheitshalber wollen wir annehmen, dass ausschliesslich  $n_r$  Richtungen beobachtet wurden. Die  $k$ -te Richtung sei vom Observatorium mit der Nummer  $i_k$  aus zur Zeit  $t_k$  beobachtet worden ( $k=1,2,\dots,n_r$ ).

Damit sollen zwei Aufgaben gelöst werden:

### Problemstellung 1

Die beobachteten Richtungen sollen dazu verwendet werden, sechs Parameter  $p_i$ ,  $i=1,2,\dots,6$  zu bestimmen, die die Anfangswerte des Satelliten festlegen; zusätzlich dazu sollen die Komponenten der Ortsvektoren  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots,n_{st}$  der beobachtenden Stationen bestimmt werden (siehe (B3.3)).

Alle das Differentialgleichungssystem definierenden Grössen, insbesondere die Matrix  $R(t)$ , werden als bekannt vorausgesetzt.

Es gilt also:

$$\vec{r}^{(i)}(T_0) = \vec{r}_{0i}(p_1, p_2, \dots, p_6), \quad i=0,1 \quad (B3.4)$$

Damit gilt auch:

$$\vec{r}(t) := \vec{r}(t; p_1, p_2, \dots, p_6) \quad (B3.5)$$

Die Geometrie der  $k$ -ten beobachteten Richtung kann wiederum durch Figur 1 veranschaulicht werden, wenn man dort S mit dem Geozentrum, HK mit dem beobachteten Satelliten und B mit der Station identifiziert, von der aus die  $k$ -te Richtung beobachtet wurde.

Ihr Ortsvektor im Äquatorsystem der Epoche  $E_0$  wird analog zu (B2.2d)<sub>2</sub> wie folgt berechnet:

$$\vec{R}_k := R(t_k)^T \cdot \vec{X}_{i_k} \quad (B3.6)$$

Mit dieser Definition können wir die Resultate (B1.6,7,8,9) aus Beispiel 1 unverändert übernehmen.

Setzt man (B3.5) und (B3.6) in (B1.6) ein und eliminiert damit analog wie in Beispiel 1 die Komponenten und den Betrag des Vektors  $\vec{\Delta}_k$  in (B1.9) können die beiden der  $k$ -ten Richtung entsprechenden beobachteten Funktionen wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \alpha_k(p_1, p_2, \dots, p_6, \vec{X}_{i_k}) &= \psi_1^*(\vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_6), \vec{X}_{i_k}), \quad k=1,2,\dots,n_r \\ \delta_k(p_1, p_2, \dots, p_6, \vec{X}_{i_k}) &= \psi_2^*(\vec{r}(t_k; p_1, p_2, \dots, p_6), \vec{X}_{i_k}), \quad k=1,2,\dots,n_r \end{aligned} \quad (B3.7)$$

Offensichtlich haben wir es hier mit einer neuen Parameterart zu tun: Die Komponenten der Vektoren  $\vec{X}_i$ ,  $i=1,2,\dots,n_{st}$  treten nicht als Parameter der partikulären Lösung von (B3.1) auf; sie sind direkt Argumente der äusseren Funktionen  $\psi_i^*(\dots)$ ,  $i=1,2$ .

In Kapitel 2.1.1 werden wir Parameter dieser Art Parameter vom Typ 3 nennen (siehe Tabelle 1 Seite 20).

Problemstellung 2

Diese unterscheidet sich nur in zwei Punkten von der ersten Problemstellung :

1. Die Ortsvektoren  $\vec{X}_i$  der Beobachtungsstationen ( siehe (B3.3) ) werden als bekannt angenommen ,  $i=1,2,\dots,n_{st}$  .
2. Wir nehmen an , dass zwei Parameter  $x$  und  $y$  der Drehmatrix  $R(t)$  ( die wir vorhin als bekannt vorausgesetzt haben ) nicht bekannt sind .  
Es gelte also :

$$R(t) := R(t;x,y)$$

Für die Betrachtungen in diesem Beispiel ist die physikalische Bedeutung der Parameter  $x$  ,  $y$  nicht von Belang . In Kapitel 4.4.1 werden wir sehen , dass man sie mit den die Polschwankung der Erde beschreibenden Parametern identifizieren kann .

Die Matrix  $R(t)$  wird an zwei verschiedenen Stellen gebraucht :

1. Zur Definition des Differentialgleichungssystems (B3.1)
2. Zur Berechnung der Ortsvektoren der beobachtenden Stationen im Äquatorsystem ( siehe (B3.6) )

Damit müssen wir zunächst (B3.5) verallgemeinern :

$$\underline{\vec{r}(t) = \vec{r}(t;p_1,p_2,\dots,p_6,x,y)} \tag{B3.8}$$

Die beobachteten Funktionen hingegen haben die folgende Gestalt :

$$\begin{aligned} \alpha_k(p_1,p_2,\dots,p_6,x,y) &= \psi_{k1}^+(\vec{r}(t_k;p_1,p_2,\dots,p_6,x,y) , x,y) \\ \delta_k(p_1,p_2,\dots,p_6,x,y) &= \psi_{k2}^+(\vec{r}(t_k;p_1,p_2,\dots,p_6,x,y) , x,y) \end{aligned} \tag{B3.9}$$

,  $k=1,2,\dots,n_r$

Offensichtlich handelt es sich bei den Parametern  $x$  und  $y$  um eine Parameterart , die die Eigenschaften der Parameterarten 2 und 3 auf sich vereinigt :  $x$  und  $y$  werden zur Definition des Differentialgleichungssystems (B3.1) benötigt , sie treten jedoch zusätzlich als Argumente der Funktionen  $\psi_{ki}^+(\dots)$  explizit auf .

Die Tatsache , dass gemischte Parameter dieser Art auftreten können , bedeutet , dass die drei eingeführten Parameterklassen bei bestimmten Anwendungen nicht disjunkt zu sein brauchen .

Es liessen sich noch viele weitere Beispiele angeben , die durchaus neue Aspekte aufweisen . So wird beispielsweise bei vielen Aufgaben das zugrunde liegende Differentialgleichungssystem aus mehr als nur drei Gleichungen bestehen . In andern Fällen sind Differentialgleichungen nicht direkt für die Ortsvektoren , sondern beispielsweise für die oskulierenden Elemente gegeben .

Es ist aber bestimmt nicht sinnvoll , den ganzen Stoff der eigentlichen Problemdefinition vorwegzunehmen .

### 2.1.1 PROBLEMSTELLUNG

Wir wollen von der Annahme ausgehen , dass bei einem bestimmten Parameterbestimmungsproblem der Himmelsmechanik oder der Satellitengeodäsie insgesamt  $N$  Himmelskörper beobachtet wurden .

Zudem wollen wir annehmen , dass die Bewegung dieser Himmelskörper - in einem bestimmten Koordinatensystem - vollständig durch die Ortsvektoren  $\vec{r}_\ell(t)$  ,  $\ell=1,2,\dots,N$  beschrieben werden kann .

Später - in den Kapiteln 3.2 resp. 4.2 - wird gezeigt , dass die Ortsvektoren der untersuchten Himmelskörper partikuläre Lösungen von gewöhnlichen expliziten Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung mit drei Gleichungen sind , wobei die Systeme für die einzelnen Himmelskörper gekoppelt sein können .

Aufgrund der folgenden Ueberlegungen wollen wir die Problemstellung verallgemeinern :

- Jedes gewöhnliche , explizite Differentialgleichungssystem höherer Ordnung kann in ein System erster Ordnung umgewandelt werden .
- In vielen Fällen ist es sinnvoll , Differentialgleichungen für "irgendwelche" Funktionen von  $\vec{r}_\ell(t)$  und  $\vec{r}_\ell^{(1)}(t)$  ,  $\ell=1,2,\dots,N$  aus den Differentialgleichungen für die Ortsvektoren herzuleiten und zu lösen .
- Bei speziellen Aufgaben gelingt es , durch geschickte Variablentransformationen die Anzahl der Differentialgleichungen a priori zu reduzieren ( beispielsweise , wenn man weiss , dass sich die Bewegung sämtlicher Himmelskörper in einer Ebene abspielt ) .

Wir wollen daher annehmen , dass die Bewegung der einzelnen Himmelskörper sich auf folgende Weise beschreiben lässt :

$$\vec{r}_\ell(t) := \vec{r}(t; \kappa_\ell |, \kappa_\ell |^{(1)}, \dots, \kappa_\ell |^{(n-1)}) \quad , \quad \ell=1, 2, \dots, N \quad (9)$$

Wobei : N : Anzahl Himmelskörper

$$\begin{aligned} \kappa_\ell | &:= \kappa_\ell(t) | : \text{Kolonnenmatrix mit } d_0 \text{ Komponenten} \\ \underline{\kappa}_\ell &:= (\kappa_\ell(t) |)^T : \text{Die zu } \kappa_\ell | \text{ transponierte Zeilen-} \\ &\quad \text{matrix . } \ell=1, 2, \dots, N \\ \kappa_\ell |^{(i)} &, i=0, 1, \dots : \text{Ableitungen von } \kappa_\ell | \text{ nach der} \\ &\quad \text{Zeit } t \text{ . } \ell=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (9a)$$

Die Kolonnenmatrizen  $\kappa_\ell |$  ,  $\ell=1, 2, \dots, N$  sind partikuläre Lösungen eines gewöhnlichen , expliziten Differentialgleichungssystems n-ter Ordnung . Dabei wird  $n=1$  oder  $n=2$  gelten , was wir aber bei der folgenden Formulierung nicht speziell zum Ausdruck bringen werden .

$$\begin{aligned} \kappa_\ell |^{(n)} &= \gamma_\ell(t; \kappa_1 |, \kappa_1 |^{(1)}, \dots, \kappa_1 |^{(n-1)}, \kappa_2 |, \dots, \kappa_2 |^{(n-1)}, \\ &\quad \dots, \kappa_N |, \dots, \kappa_N |^{(n-1)}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2}) | \\ &\quad \ell=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (10)$$

Wobei : n : Ordnung des Systems (10)

$d_0$  : Anzahl Gleichungen pro Himmelskörper ( siehe (9a) )

$\gamma_\ell(\dots) |$  ,  $\ell=1, 2, \dots, N$  : Kolonnenmatrizen mit  $d_0$  Elementen . (10a)

$d = N \cdot d_0$  : Dimension des Differentialgleichungssystems (10)

$s_i, i=1, 2, \dots, n_2$  : Die zu bestimmenden Parameter vom Typ 2 ( siehe Tabelle 1 ) .

(10) ist ein System von  $d = N \cdot d_0$  gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung . In den Problemen der Satellitengeodäsie und in Spezialproblemen der klassischen Himmelsmechanik hat (10) die folgende einfachere Struktur :

$$\begin{aligned} \kappa_\ell |^{(n)} &= \gamma_\ell(t; \kappa_\ell |, \kappa_\ell |^{(1)}, \dots, \kappa_\ell |^{(n-1)}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2}) | \\ &\quad \ell=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (10^*)$$

Das System (10\*) besteht aus insgesamt N Teilsystemen , die bezüglich der Variablen  $\kappa_\ell |^{(i)}$  ,  $\ell=1,2,\dots,N$  ( aber nicht bezüglich der Parameter  $s_i, i=1,2,\dots,n_2$  ) voneinander separiert sind .

Wir wollen das System (10) einfacher schreiben . Dazu definieren wir zwei Zeilenmatrizen und die zugehörigen Spaltenmatrizen :

$$\begin{array}{l} \underline{y} := ( \underline{\kappa}_1, \underline{\kappa}_2, \dots, \underline{\kappa}_N ) \text{ und } \underline{f} := ( \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2, \dots, \underline{\gamma}_N ) \\ \underline{y}| = ( \underline{y} )^T \text{ sowie } \underline{f}| = ( \underline{f} )^T \end{array} \quad (11)$$

Damit können wir (10) wie folgt schreiben ( dieselbe Schreibweise kann selbstverständlich auch für das System (10\*) verwendet werden ) :

$$\underline{y}|^{(n)} = \underline{f}(t, \underline{y}|, \underline{y}|^{(1)}, \dots, \underline{y}|^{(n-1)}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2})| \quad (12)$$

Durch (12) sind die Funktionen  $\underline{y}(t)|$  resp.  $\kappa_\ell(t)|$  ,  $\ell=1,2,\dots,N$  noch nicht eindeutig bestimmt . Es müssen vielmehr zusätzlich Bedingungsgleichungen angegeben werden , die eine partikuläre Lösung von (12) festlegen . Genau wie in Beispiel 1 wollen wir zwei Möglichkeiten ( Anfangswertproblem , Randwertproblem ) in Betracht ziehen . Es wird dabei sinnvoll sein , bei den Aufgaben , die durch Gleichungen der Art (10\*) charakterisiert sind , etwas allgemeinere Ansätze zu machen .

### 1. Partikuläre Lösungen von (12)

#### a. Formulierung als Anfangswertproblem

$$\underline{y}(T_0)|^{(i)} := \underline{y}_{0i}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1})|, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (13a)$$

#### b. Formulierung als Randwertproblem

$$\underline{y}(T_i)| := \underline{y}_{1i}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1})|, \quad i=1,2,\dots,n \quad (13b)$$

( wobei  $T_i \neq T_k$  für  $i \neq k$  )

Die  $c_i$  ,  $i=1,2,\dots,n_1$  sind die bei einer speziellen Aufgabe zu bestimmenden Parameter vom Typ 1 ( siehe Tabelle 1 ) . Selbstverständlich werden die  $c_i, i=1,2,\dots,n_1$  in (13a) eine andere physikalische Bedeutung als in (13b) haben .

2. Partikuläre Lösungen von (10\*),

a. Formulierung als Anfangswertaufgabe

$$\kappa_{\ell}(T_{\ell 0}) |^{(i)} := \kappa_{0\ell i}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1}) |, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (13a^*)$$

$$\ell=1, 2, \dots, N$$

b. Formulierung als Randwertaufgabe

$$\kappa_{\ell}(T_{\ell i}) | := \kappa_{1\ell i}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1}) |, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (13b^*)$$

$$\ell=1, 2, \dots, N$$

$$T_{\ell i} \neq T_{\ell k} \quad \text{für } i \neq k$$

Die Formulierung (13a\*) ist identisch mit der Formulierung (13a), wenn gilt  $T_{\ell 0} = T_0$ ,  $\ell=1, 2, \dots, N$ . In der Variablenliste der Funktionen  $\kappa_{0\ell i}$  resp.  $\kappa_{1\ell i}$  wird (normalerweise) nur der N-te Teil der Parameter  $c_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n_1$  auftreten. Wir verzichten darauf, dies in (13a,b\*) anzudeuten.

Im folgenden werden wir immer die Formulierungen (12), (13a,b) verwenden, auch wenn eine Aufgabe durch ein System (10a\*) charakterisiert ist, falls nicht (10\*), (13a\*,b\*) unbedingt zum Verständnis nötig sind.

Die Bewegung der beobachteten Himmelskörper wird durch (12) und (13a) resp. (13b) vollständig beschrieben. Wir dürfen somit von der folgenden kurzen Notation Gebrauch machen:

$$y(t) | := y(t; c_1, c_2, \dots, c_{n_1}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2}) | \quad (14a)$$

$$\text{und } \underline{\vec{r}_{\ell}(t)} := \underline{\vec{r}_{\ell}(t; c_1, c_2, \dots, c_{n_1}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2})} \quad (14b)$$

$$\ell=1, 2, \dots, N$$

Jede Beobachtung wird von einer Beobachtungsstation aus durchgeführt. Dabei kann es durchaus sein, dass eine Beobachtungsstation selbst mit einem beobachteten Himmelskörper identisch ist (z.B. eine künstliche Raumsonde); im Normalfall versteht man unter dem Begriff "Beobachtungsstation" jedoch ein Observatorium auf der Erdoberfläche.

In diesen Fällen ist das physikalische System durch das Differentialgleichungssystem (12) und durch (13a) resp. (13b) noch nicht eindeutig festgelegt. Zusätzlich wird ein mathematisches

Modell für die Beschreibung der Bewegung der Observatorien bezüglich des Geozentrums benötigt ( in dem Koordinatensystem , in dem die Gleichungen (12) formuliert sind ) .

Wir haben in Beispiel 3 gesehen , dass bei Aufgaben dieser Art Parameter auftreten können , die zwar als Argumente der beobachteten Funktionen , nicht aber als Argumente der Bahn  $\vec{r}(t)$  des beobachteten Himmelskörpers vorkommen ( siehe (B3.7) ) . Für Parameter dieser Art führen wir die folgende allgemeine Schreibweise ein :

$$g_i, i=1,2,\dots,n_3 : \text{Parameter , die als Argumente der beobachteten Funktionen , nicht aber der Lösungen der betreffenden Differentialgleichungssysteme auftreten .} \quad (15)$$

Fassen wir zusammen :

Tabelle 1

Parameterarten bei Parameterbestimmungsaufgaben der Himmelsmechanik und der Satellitengeodäsie		
Typ	Bezeichnung	Beschreibung
1	$c_i, i=1,2,\dots,n_1$	Parameter , die die Anfangs- oder die Randwerte der beobachteten Himmelskörper definieren .
2	$s_i, i=1,2,\dots,n_2$	Parameter , die das Differentialgleichungssystem (12) definieren .
3	$g_i, i=1,2,\dots,n_3$	Parameter , die die geozentrische Bewegung der Beobachtungsstationen festlegen .
1,2 3	$p_i, i=1,2,\dots,n_p$	Parameter vom Typ 1,2 oder 3

(16)

Bemerkungen zu Tabelle 1

- Die Parameterliste in Tabelle 1 ist nicht vollständig. Bei verschiedenen Beobachtungsarten können noch weitere Parameter rein technischer Natur ( z.B. "Frequenzdrifts" bei Dopplerbeobachtungen ) dazukommen. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen haben diese neuen Parameter alle Eigenschaften der Parameter vom Typ 3 in Tabelle 1. Im folgenden werden wir daher von solchen Parametern absehen, und - etwas vereinfachend - nur die Parameter in Tabelle 1 betrachten.

- Bei der zweiten Problemstellung in Beispiel 3 haben wir gesehen, dass es "gemischte" Parameter gibt, die mehr als einer Parameterklasse in Tabelle 1 angehören. Die drei in Tabelle 1 aufgeführten Parameterklassen brauchen also nicht disjunkt zu sein.

$$\text{Es gilt : } n_p \leq n_1 + n_2 + n_3 \quad (16a)$$

- Die Parameter vom Typ 1 und vom Typ 2 definieren zusammen eine partikuläre Lösung von (12) ( siehe (14a,b) ). Für die Anzahl der Parameter vom Typ 1 gilt dabei im Normalfall :

$$\underline{n_1 = n \cdot N \cdot d_0 = 6 \cdot N} \quad (16b)$$

Dies entspricht der Tatsache, dass - bei gegebenen Parametern vom Typ 2 - jede Bahn eines Himmelskörpers durch sechs Größen, beispielsweise durch den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor zu einem Zeitpunkt  $T_0$  definiert ist.

Ausnahmen von (16b) gibt es beispielsweise bei reinen Bahnbestimmungsaufgaben, wenn man durch geschickte Parameterwahl die Anzahl der Unbekannten reduzieren kann, oder wenn man gewisse a priori Informationen ( z.B. eine Kometenbahn soll eine Parabel sein ) zur Verfügung hat. Probleme dieser Art werden wir in den Kapiteln 3 und 4 antreffen.

- Es sei nochmals festgehalten, dass  $n$ , die Ordnung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (12) 1 oder 2 sein wird.

Damit kommen wir zur Struktur der in Definition (3) erwähnten beobachteten Funktionen .

Im wesentlichen lassen sich sämtliche beobachteten Funktionen in der vorliegenden Arbeit auf folgende Weise schreiben :

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \psi_j(t_j; y|, y|^{(1)}, \dots, y|^{(n-1)}, g_1, \dots, g_{n_3})$$

$$\begin{aligned} \text{Wobei } y| &= y(t_j; c_1, c_2, \dots, c_{n_1}, s_1, s_2, \dots, s_{n_2})| \\ j &= 1, 2, \dots, n_b \end{aligned}$$

(17)

Kommentar zu (17)

- Der Index  $j$  bei  $\psi_j(\dots)$  soll andeuten , dass im Prinzip bei jeder einzelnen Beobachtung eine andere Funktion beobachtet werden kann ( Distanzen , Winkel etc. ) .
- Die Zeiten  $t_j$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  werden Beobachtungszeiten genannt . Dabei ist es durchaus möglich , dass verschiedenen Beobachtungen dieselben Zeiten zugeordnet werden müssen . Wir werden stets annehmen , dass gilt :

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_{n_b} \tag{17a}$$

- Es ist eine bekannte Tatsache , dass  $y(t)|$  ( im Normalfall ( keine Kollisionen etc. ) ) eine reell-analytische Funktion der Zeit  $t$  ist .

Damit dürfen wir  $y(t)|$  um jedes  $t_j$  in eine Taylorreihe ( mit endlichem Konvergenzradius ) entwickeln :

$$y(t)| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot y(t_j)|^{(i)} \cdot (t-t_j)^i \tag{17b}$$

Da  $y(t)|$  Lösung des Differentialgleichungssystems (12) ist , können sämtliche Ableitungen  $y(t_j)|^{(i)}$  ,  $i=n,n+1,\dots$  als Funktionen der  $y(t_j)|^{(i)}$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  dargestellt werden .

Für einen Punkt  $t=t_j+\Delta t_j$  innerhalb des Konvergenzradius' von (17b) gilt somit :

$$\underline{y(t_j+\Delta t_j)| = \chi(t_j+\Delta t_j; y(t_j)|, y(t_j)|^{(1)}, \dots, y(t_j)|^{(n-1)})} \tag{17c}$$

Damit aber haben wir gezeigt , dass in (17) auch beobachtete Funktionen folgenden Typs eingeschlossen sind :

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \lambda_j(t_j; y(t_j) |, y(t_j + \Delta t_j) |, y(t_j + \Delta t_j) |^{(1)}, \dots, g_1, g_2, \dots, g_{n_3}) \quad (17d)$$

(  $t_j + \Delta t_j$  innerhalb des Konvergenzradius von (17b) )

- Zusätzlich werden wir annehmen , dass auch Funktionen der folgenden Art unter (17) zu verstehen sind :

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} \beta_j(t', y(t') |, \dots, g_1, \dots, g_{n_3}) \cdot dt' \quad (17e)$$

(  $t = t_j + \Delta t_j$  innerhalb des Konvergenzradius von (17b) ) .

- In der Praxis wird den  $\Delta t_j, j=1, 2, \dots, n_b$  die Bedeutung von Laufzeiten von Lichtsignalen ( oder andern elektromagnetischen Signalen ) zukommen .
- Es wäre durchaus möglich gewesen , den Begriff der beobachteten Funktion noch allgemeiner als in (17) , (17d) , (17e) zu fassen . Insbesondere könnte man bei Definitionen der Art (17d,e) auf die Forderung verzichten , dass  $t = t_j + \Delta t_j$  im Konvergenzbereich von (17b) liegt . Solche Verallgemeinerungen sind jedoch für unsere Anwendungen nicht nötig . ( Vergleiche {G.Beutler , 1982 , p.4} ) .
- Es verdient festgehalten zu werden , dass die Parameter vom Typ 1 und 2 in (17) nur mittelbar - via Lösungsvektor  $y|$  des Differentialgleichungssystems (12) - auftreten .

Die Parameterbestimmungsprobleme der klassischen Himmelsmechanik und der Satellitengeodäsie gehören der grossen Klasse von Parameterbestimmungsproblemen an , die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungssysteme beschreiben lassen .

Diese Problemklasse wurde in {G. Beutler , 1982 , Kap. 5.3} Klasse  $K_1$  genannt . Wir werden in der vorliegenden Arbeit diese Bezeichnung übernehmen :

Parameterbestimmungsprobleme der Klasse  $K_1$  sind Probleme , die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungssysteme beschreiben lassen .

(18)

Die Aussagen der Kapitel 2.1.2 bis 2.1.7 haben Gültigkeit für alle Parameterbestimmungsaufgaben der Klasse  $K_1$  .

## 2.1.2 LINEARISIERUNG DER AUFGABEN

Im einleitenden Kapitel haben wir unter (6) festgestellt , dass der wahrscheinlichste Parametersatz  $p_i^+$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  - unter gewissen Voraussetzungen statistischer Natur - Lösung der Extremalaufgabe (6b) ist .

Definiert man 
$$F(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) := \sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 \quad (19)$$

kann (6b) auch wie

folgt geschrieben werden :

$$\underline{F(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})} = \text{Min} \quad (20)$$

Notwendige Bedingung dafür , dass (20) erfüllt ist , ist es , dass die partiellen Ableitungen der Funktion  $F(\dots)$  nach jedem Parameter an der Stelle des Minimums gleich Null sind :

$$\underline{\{ F(p_1^+, p_2^+, \dots, p_{n_p}^+) \}_{p_\ell}} = 0 \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (21)$$

$$\text{Wobei : } \underline{\{ \ }_{p_\ell}} := \frac{\partial}{\partial p_\ell} \quad (22)$$

In der vorliegenden Arbeit wird ausschliesslich die Schreibweise (22) für die partiellen Ableitungen verwendet .

(21) ist ein Gleichungssystem von  $n_p$  Gleichungen zum Bestimmen der  $n_p$  Unbekannten  $p_i^+$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  . Wären die beobachteten Funktionen  $\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  linear in allen Argumenten , wäre das Gleichungssystem (21) linear ( siehe z.B. {G. Beutler , 1982 , Kap. 2.1} ) . Dies ist bei unseren Aufgaben im allgemeinen nicht der Fall ; es ist aber immer möglich , die Aufgabe zu linearisieren , falls Näherungswerte für die zu bestimmenden Parameter bekannt sind : Man entwickelt die Funktionen  $\phi_j(\dots)$  um die bekannte Stelle in eine Taylorreihe und bricht diese Reihe nach den linearen Termen ab .

Bevor diese neue Aufgabe präzise formuliert werden kann, müssen einige Bezeichnungen eingeführt werden :

Es seien :  $p_i^I$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  : Bekannte Näherungswerte der Parameterwerte  $p_i^+$ ,  $i=1,2,\dots$

$$\begin{aligned} & \dots, n_p \\ \phi_j^I & := \phi_j(p_1^I, p_2^I, \dots, p_{n_p}^I), \quad j=1,2,\dots,n_b : \\ & \text{Bekannte Funktionswerte} \\ \{\phi_j^I\}_{p_\ell} & := \{\phi_j(p_1^I, p_2^I, \dots, p_{n_p}^I)\}_{p_\ell}, \quad \ell=1,2,\dots,n_p \\ & \quad \quad \quad j=1,2,\dots,n_b \end{aligned} \tag{23}$$

Partielle Ableitungen der Funktion  $\phi_j(\dots)$  nach den Parametern an der Stelle  $p_i=p_i^I$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$

Dem Symbol "I" werden wir weiter unten die Bedeutung eines Iterationsindexes geben .

Mit den Bezeichnungen (23) können wir nun eine lineare Extremalaufgabe definieren :

Definition der linearisierten beobachteten Funktionen :

$$\phi_j^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) := \phi_j^I + \sum_{\ell=1}^{n_p} \{\phi_j^I\}_{p_\ell} \cdot (p_\ell - p_\ell^I) \tag{24a}$$

Definition der linearisierten Residuenfunktionen

$$\rho_j^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) := \phi_j^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) - \phi_j^I \tag{24b}$$

$j = 1, 2, \dots, n_b$  in (24a) , (24b)

Definition der quadratischen Funktion  $F^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  :

$$F^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) := \sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\rho_j^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 \tag{24c}$$

Damit können wir die linearisierte Extremalaufgabe endlich wie folgt definieren :

Definition :  $p_i^{I+1}$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  seien die Lösungen der Aufgabe

$$F^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \text{Min} \tag{24d}$$

Analog zu (21) können wir ein System von  $n_p$  Gleichungen für die Unbekannten  $p_i^{I+1}$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  aufstellen :

$$\{F^I(p_1^{I+1}, p_2^{I+1}, \dots, p_{n_p}^{I+1})\}_{p_\ell} = 0, \quad \ell=1, 2, \dots, n_p \quad (24e)$$

Im Unterschied zu (21) ist (24e) ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $p_i^{I+1}, i=1, 2, \dots, n_p$ . Man nennt es das Normalgleichungssystem. Mit seiner expliziten Gestalt werden wir uns in Kapitel 2.1.3 beschäftigen.

Wir müssen uns jetzt die Frage stellen, unter welchen Umständen wir die Lösung  $p_i^{I+1}, i=1, 2, \dots, n_p$  der linearisierten Aufgabe der Lösung  $p_i^+$ ,  $i=1, 2, \dots, n_p$  der ursprünglichen Aufgabe (6b) resp. (20) gleichsetzen dürfen.

Intuitiv ist klar, dass man dies tun darf, falls die Beträge der bei der Linearisierung (24a) vernachlässigten Terme höherer Ordnung in den  $p_\ell - p_\ell^I, \ell=1, 2, \dots, n_p$  "infinitesimal klein" an der Stelle  $p_i = p_i^{I+1}, i=1, 2, \dots, n_p$  sind.

Nun ist es ohne weiteres möglich, dies a posteriori - d.h. nach Lösung der Aufgabe (24d) - zu prüfen.

Bezeichnet man die Beträge dieser Terme mit  $\zeta_j^I, j=1, 2, \dots, n_b$ , so gilt:

$$\zeta_j^I = \left| \phi_j(p_1^{I+1}, p_2^{I+1}, \dots, p_{n_p}^{I+1}) - \phi_j^I(p_1^{I+1}, p_2^{I+1}, \dots, p_{n_p}^{I+1}) \right|_{j=1, 2, \dots, n_b} \quad (25)$$

Was heisst "infinitesimal klein" in der praktischen Anwendung?

Auch die Antwort auf diese Frage ist intuitiv ohne weiteres klar: Die Grössen  $\zeta_j^I$  müssen "klein sein" gegenüber den mittleren Fehlern  $\sigma_j, j=1, 2, \dots, n_b$ .

Nach (6a) gilt:  $\sigma_j^2 = \sigma_0^2/g_j, j=1, 2, \dots, n_b$ , wobei die Gewichte  $g_j, j=1, 2, \dots, n_b$  bekannt sind. Der mittlere (a priori) Einheitsfehler jedoch ist nicht bekannt. In Kapitel 2.1.4 werden wir aber einen a posteriori Schätzwert  $m_0^I$  für  $\sigma_0$  angeben.

Definition:  $p_i^+ := p_i^{I+1}, i=1, 2, \dots, n_p$ , falls  $\left. \begin{array}{l} \zeta_j^I < m_0^I / (3 \cdot \sqrt{g_j}) \\ \zeta_j^I < m_0^I / (3 \cdot \sqrt{g_j}) \end{array} \right\} \quad j=1, 2, \dots, n_b \quad (26a)$

$\zeta_j^I < m_0^I / (3 \cdot \sqrt{g_j}), j=1, 2, \dots, n_b \quad (26b)$

Wobei  $m_0^I$ , der a posteriori Schätzwert für  $\sigma_0$ , in 2.1.4 definiert wird; die Gewichte  $g_j$  sind in (6), die Beträge  $\zeta_j^I$  in (25) definiert ( $j=1, 2, \dots, n_b$ ).

Sind nicht alle Bedingungsgleichungen (26b) erfüllt , wird durch

$$\underline{I := I+1} \tag{26c}$$

ein neuer Iterationsschritt initialisiert .

Wir halten fest :

Bei den Parameterbestimmungsaufgaben der Klasse  $K_1$  muss die Extremalaufgabe (6) resp. (20) im allgemeinen iterativ gelöst werden .

Damit der Iterationsprozess überhaupt gestartet werden kann , muss ein erster Satz von Näherungswerten für die Parameter  $p_i$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  zur Verfügung stehen .

(27)

Ein Iterationsschritt besteht im wesentlichen im Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems (24e) .

### 2.1.3 MATRIZENSCHREIBWEISE

Ersetzt man in (24b)  $\phi_j^I(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  nach (24a) und setzt in den so entstandenen Gleichungen für  $p_i := p_i^{I+1}$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  , erhält man das sogenannte Fehlergleichungssystem oder Verbesserungsgleichungssystem . Man schreibt es normalerweise wie folgt :

$$\sum_{\ell=1}^{n_p} \{\phi_j^I\}_{p_\ell} \cdot (p_\ell^{I+1} - p_\ell^I) - (\phi_j' - \phi_j^I) = \rho_j^I(p_1^{I+1}, \dots, p_{n_p}^{I+1}) \tag{28}$$

$$j = 1, 2, \dots, n_b$$

(28) soll in Matrizenform geschrieben werden . Dazu sind drei Zeilenmatrizen ( mit den dazu transponierten Spaltenmatrizen ) und eine Matrix  $A$  mit  $n_b$  Zeilen und  $n_p$  Spalten zu definieren :

$$\underline{\Delta p^I} := (p_1^{I+1} - p_1^I, p_2^{I+1} - p_2^I, \dots, p_{n_p}^{I+1} - p_{n_p}^I) \tag{29a}$$

$$\underline{\Delta \phi^I} := (\phi_1' - \phi_1^I, \phi_2' - \phi_2^I, \dots, \phi_{n_b}' - \phi_{n_b}^I) \tag{29b}$$

$$\underline{\rho^I} := (\rho_1^I(p_1^{I+1}, \dots), \rho_2^I(p_1^{I+1}, \dots), \dots, \rho_{n_b}^I(p_1^{I+1}, \dots)) \tag{29c}$$

$A^I$  : Matrix mit  $n_b$  Zeilen und  $n_p$  Kolonnen ,  
deren Elemente  $A_{j\ell}^I$  wie folgt definiert  
sind : (29d)

$$A_{j\ell}^I := \{\phi_j^I\}_{p_\ell} , \quad \ell=1,2,\dots,n_p , \quad j=1,2,\dots,n_b$$

Mit  $\Delta p^I|$  ,  $\Delta\phi^I|$  und  $\rho^I|$  sollen die zu  $\Delta p^I|$  ,  
 $\Delta\phi^I|$  und  $\rho^I|$  transponierten Kolonnenmatrizen  
bezeichnet werden . (29e)

Damit kann das Verbesserungsgleichungssystem (28) als Matrix-  
gleichung geschrieben werden :

$$\underline{A^I \cdot \Delta p^I| - \Delta\phi^I| = \rho^I|} \quad (30)$$

In (30) nennt man die Komponenten des Vektors  $\Delta p^I|$  die Unbe-  
kannten der Ausgleichung ,  $\Delta\phi^I|$  den Absolutgliedervektor  
und  $\rho^I|$  den Residuenvektor .

Als nächstes soll das Normalgleichungssystem (24e) in Matri-  
zenform geschrieben werden . Dazu muss zunächst eine Gewichts-  
matrix  $G$  definiert werden :

$G$  : Gewichtsmatrix . Quadratische  $n_b \times n_b$  - Matrix ,  
deren Elemente  $G_{jk}$  wie folgt definiert sind :

$$G_{jj} := g_j , \quad j=1,2,\dots,n_b \quad (31)$$

$$G_{jk} := 0 , \quad j \neq k , \quad j=1,2,\dots,n_b , \quad k=1,2,\dots,n_b$$

Die  $g_j$  sind die in (6) eingeführten Gewichte  
der Beobachtungen .

Man verifiziert leicht ( siehe z.B. {G. Beutler , 1982 ,  
Kap. 2.1 } ) , dass das Normalgleichungssystem (24e) mit den  
Bezeichnungen (29a,b,c,d,e) und mit (31) die folgende Gestalt  
annimmt :

$$\underline{(A^I)^T \cdot G \cdot A^I \cdot \Delta p^I| = (A^I)^T \cdot G \cdot \Delta\phi^I|} \quad (32)$$

Die Lösung des Normalgleichungssystems (32) kann kurz wie  
folgt geschrieben werden :

$$\frac{\Delta p^I}{|} = Q^I \cdot b^I | \quad (33)$$

Wobei :  $Q^I := ((A^I)^T \cdot G \cdot A^I)^{-1}$  (33a)

$$b^I | := (A^I)^T \cdot G \cdot \Delta \phi^I | \quad (33b)$$

### 2.1.4 FEHLERRECHNUNG

$\sigma_0$  , der mittlere Gewichtseinheitsfehler ( siehe (6) ) kann am Ende des I-ten Iterationsschrittes wie folgt abgeschätzt werden ( Herleitung siehe z.B. {W. Grossmann , 1969 , §18} ) :

$m_0^I$  : a posteriori Abschätzung von  $\sigma_0$  am Ende des I-ten Iterationsschrittes

$$m_0^I = \sqrt{\frac{\underline{\rho^I \cdot G \cdot \rho^I |}}{n_b - n_p}} \quad (34)$$

Ausgehend von (30) und (31) zeigt man leicht , dass gilt :

$$\underline{\rho^I \cdot G \cdot \rho^I |} = \underline{\Delta \phi^I \cdot G \cdot \Delta \phi^I |} - \underline{\Delta p^I \cdot b^I |} \quad (34a)$$

In Anbetracht dessen , dass  $G$  eine diagonale Matrix ist , können wir (34a) die folgende , für die numerische Rechnung günstige Gestalt geben :

$$\underline{\rho^I \cdot G \cdot \rho^I |} = \sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\phi_j^I - \phi_j^{I*})^2 - \sum_{i=1}^{n_p} (p_i^{I+1} - p_i^I) \cdot b_i^I \quad (34b)$$

(  $b_i^I$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  sind die Komponenten der in (33b) definierten Kolonnenmatrix  $b^I |$  ) .

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es , Formeln für die mittleren Fehler der Parameter  $p_i^+$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  herzuleiten .

Es sei :  $I^*$  : Index des letzten Iterationsschrittes bei der Lösung von (6) resp. (20) (35)

Für  $I=I^*$  sind also sämtliche Gleichungen (26b) erfüllt und es gilt nach (26a)  $p_i^{I^*+1} = p_i^+$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  .

Somit gilt auch ( siehe (29a) ) :

$$\underline{\Delta p^{I^*}} = (p_1^+ - p_1^{I^*} , p_2^+ - p_2^{I^*} , \dots , p_{n_p}^+ - p_{n_p}^{I^*}) =: \underline{\Delta p^+} \quad (36)$$

Setzt man (36) und (33b) in (33) ein , so folgt :

$$\underline{\Delta p^+ |} = Q^{I^*} \cdot (A^{I^*})^T \cdot G \cdot \Delta \phi^{I^*} | =: \underline{N^{I^*} \cdot \Delta \phi^{I^*} |} \quad (37)$$

Wir wollen jetzt eine zu (37) analoge Gleichung herleiten , in der auf der linken Seite die wahren Parameterwerte  $p_i^*$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  an Stelle der wahrscheinlichsten Parameterwerte  $p_i^+$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  auftreten .

Um dies zu erreichen , setzen wir in (24a)  $I = I^*$  und  $p_i = p_i^*$  ,  $i = 1,2,\dots,n_p$  . Berücksichtigt man , dass beim letzten Iterationsschritt  $I = I^*$  die Linearisierung erlaubt war , und somit  $\phi_j^I(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_p}^*) = \phi_j(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_p}^*)$  ,  $j=1,2,\dots,n_p$  gesetzt werden darf , so folgt zunächst das dem Verbesserungsgleichungssystem (30) entsprechende Gleichungssystem

$$\underline{A^{I^*} \cdot \Delta p^{I^{**}} |} = \underline{\Delta \phi^{I^{**}} |} . \quad (38)$$

Die Matrix  $A^{I^*}$  ist nach (29d) definiert . Die beiden übrigen Kolonnenmatrizen haben die folgende Bedeutung :

$$\underline{\Delta p^{I^{**}} |} = (\Delta p^{I^{**}} |)^T = (p_1^* - p_1^{I^*}, p_2^* - p_2^{I^*}, \dots, p_{n_p}^* - p_{n_p}^{I^*}) \quad (38a)$$

$$\underline{\Delta \phi^{I^{**}} |} = (\Delta \phi^{I^{**}} |)^T = (\phi_1^* - \phi_1^{I^*}, \phi_2^* - \phi_2^{I^*}, \dots, \phi_{n_p}^* - \phi_{n_p}^{I^*}) \quad (38b)$$

$$\text{Wobei : } p_i^*, i=1,2,\dots,n_p : \text{Wahre Parameterwerte} \quad (38c)$$

$$\phi_j^* := \phi_j(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_p}^*) , j=1,2,\dots,n_p$$

Multipliziert man (38) von links mit den Matrizen  $G, (A^{I^*})^T$  und  $Q^{I^*}$  ( in dieser Reihenfolge ) , resultiert :

$$\Delta p^{I^{**}} | = N^{I^*} \cdot \Delta \phi^{I^{**}} | \quad (39)$$

Subtrahiert man (37) von (39) , folgt schliesslich das fundamentale Gleichungssystem

$$\underline{\tilde{\epsilon} |} = \underline{N^{I^*} \cdot \epsilon |}$$

$$\text{Wobei : } \underline{\epsilon} = (\epsilon |)^T = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n_p}) : \text{die aus den wahren Beobachtungsfehlern ( siehe (3) ) gebildete Zeilenmatrix .} \quad (40a)$$

und  $\underline{\tilde{\epsilon}} = (\tilde{\epsilon}|)^T = (p_1^* - p_1^+, p_2^* - p_2^+, \dots, p_{n_p}^* - p_{n_p}^+) :$   
 die aus den wahren Fehlern der  
 Parameterwerte  $p_i^+, i=1, 2, \dots, n_p$   
 gebildete Zeilenmatrix .

(40b)

Gleichung (40) besagt , dass die wahren Fehler der Parameter  
 Linearkombinationen der wahren Beobachtungsfehler sind .  
 Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich  
 der Erwartungswert  $E(\tilde{\epsilon}|)$  der Kolonnenmatrix  $\tilde{\epsilon}|$  sowie die Ko-  
 varianzmatrix  $V(\tilde{\epsilon}|) := E(\tilde{\epsilon}| \cdot \tilde{\epsilon}|)$  einfach wie folgt berechnen :

$$\underline{E(\tilde{\epsilon}|)} = N^{I*} \cdot E(\epsilon|) \stackrel{(6)}{=} N^{I*} \cdot 0 = 0$$

(41)

(41) besagt , dass die Erwartungswerte der bestimmten Parame-  
 ter gleich den wahren Parameterwerten sind . Man weist leicht  
 nach , dass diese Aussage für jede reguläre Matrix  $G$  gilt .

Weiter gilt :

$$\underline{V} := E(\tilde{\epsilon}| \cdot \tilde{\epsilon}|) = E \left[ N^{I*} \cdot \epsilon| \cdot \epsilon| \cdot (N^{I*})^T \right] = \underline{N^{I*} \cdot E(\epsilon| \cdot \epsilon|) \cdot (N^{I*})^T}$$

(42)

Nach den in (6) gemachten Voraussetzungen sind die  $\epsilon_j$  ,  
 $j=1, 2, \dots, n_p$  Werte von unabhängigen , normalverteilten Zufalls-  
 variablen , deren Varianzen nach (6a) durch  $\sigma_j^2 = \sigma_0^2 / g_j$  ,  
 $j=1, 2, \dots, n_p$  definiert sind . Damit aber folgt unmittelbar :

$$\underline{E(\tilde{\epsilon}| \cdot \tilde{\epsilon}|)} = \sigma_0^2 \cdot G^{-1}$$

(43)

Setzt man (43) in (42) ein und berücksichtigt die Definition  
 der Matrix  $N^{I*}$  ( siehe (37) ) , so folgt für die Kovarianz-  
 matrix das einfache Resultat :

$$\underline{V} = \sigma_0^2 \cdot Q^{I*}$$

(44)

$V$  ist eine symmetrische  $n_p \times n_p$  - Matrix , deren Diagonalele-  
 mente gleich den Quadraten der mittleren Fehler der Parameter  
 $p_i^+, i=1, 2, \dots, n_p$  sind .

Die Kovarianzmatrix wird a posteriori einfach durch

$$\underline{V} := m_0^2 \cdot Q^{I*} , \quad m_0 := m_0^{I*}$$

(45)

abgeschätzt .

Damit können die mittleren Fehler  $m(p_i^+)$  der Parameterwerte  $p_i^+$ ,  $i=1,2,\dots,n_p$  a posteriori wie folgt abgeschätzt werden :

$$m(p_i^+) = m_0 \cdot (Q_{ii}^{I*})^{1/2}, \quad i=1,2,\dots,n_p \quad (46)$$

Ist  $g(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  eine Funktion der Parameter  $p_i, i=1,2,\dots,n_p$ , kann ihr mittlerer Fehler  $m(g(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))$  nach (47) berechnet werden :

$$m(g(p_1^+, p_2^+, \dots, p_{n_p}^+)) = m_0 \cdot \left( \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \{g^+\}_{p_i} \cdot \{g^+\}_{p_k} \cdot Q_{ik}^{I*} \right)^{1/2} \quad (47)$$

Wobei :  $\{g^+\}_{p_\ell} := \{g(p_1^+, p_2^+, \dots, p_{n_p}^+)\}_{p_\ell}$ ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  (47a)

Der Beweis zu (47) ist einfach zu erbringen ( siehe z.B. {G. Beutler , 1982 , Kap. 4.2} ) .

### 2.1.5 DIE VARIATIONSGLEICHUNGEN

Um beim I-ten Iterationsschritt der Lösung von (6) resp. (20) das Fehlergleichungssystem (30) und anschliessend das Normalgleichungssystem (32) aufstellen zu können , müssen die in (23) definierten Grössen  $\phi_j^I$ ,  $j=1,2,\dots,n_b$  sowie die partiellen Ableitungen  $\{\phi_j^I\}_{p_\ell}$ ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$ ,  $j=1,2,\dots,n_b$  berechnet werden .

Nach unserer Definition (17) der beobachteten Funktionen gilt :

$$\phi_j^I = \phi_j(p_1^I, p_2^I, \dots, p_{n_p}^I) = \psi_j(t_j; y^I|, y^I|(1), \dots, y^I|(n-1) | g_1^I, g_2^I, \dots, g_{n_3}^I) \quad (48a)$$

Wobei :  $y^I| = y(t_j; c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I, s_1^I, s_2^I, \dots, s_{n_2}^I) |$  (48b)  
 $j = 1, 2, \dots, n_b$

Damit die Funktionswerte  $\phi_j^I$  berechnet werden können , müssen die Funktionswerte (48b) bekannt sein . Dies bedeutet , dass die Funktionen  $y^I(t) |$  im Intervall , das alle Beobachtungszeiten  $t_j$ ,  $j=1,2,\dots,n_b$  enthält , bekannt sein müssen .

$y^I(t) |$  aber ist Lösung der folgenden Anfangs- resp. Randwert-aufgabe ( siehe (12) sowie (13a,b) ) :

$$y^I |^{(n)} = f(t; y^I |, y^I |^{(1)}, \dots, y^I |^{(n-1)}, s_1^I, s_2^I, \dots, s_{n_2}^I) | \quad (49)$$

Oder kurz :  $y^I |^{(n)} = f^I |$

$$y^I (T_0) |^{(i)} = y_{0i} (c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I) |, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (50a)$$

resp.

$$y^I (T_i) | = y_{1i} (c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I) |, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (50b)$$

Die Anfangswertaufgabe (49) , (50a) oder die Randwertaufgabe (49) , (50b) muss im Intervall , das alle Beobachtungszeiten  $t_j$  ,  $j=1, 2, \dots, n_b$  enthält , im allgemeinen durch die Technik der numerischen Integration ( siehe Kapitel 2.3 ) gelöst werden .

Bei den Aufgaben der Satellitengeodäsie und der Himmelsmechanik ist (49) normalerweise ein nicht lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem .

Die partiellen Ableitungen  $\{\phi_j^I\}_{p_\ell}$  ,  $\ell=1, 2, \dots, n_p$  werden

ausgehend von (48a,b) mit Hilfe der Kettenregel berechnet :

$$\{\phi_j^I\}_{p_\ell} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^d \{\psi_j^I\}_{y_k^I(i)} \cdot \{y_{kj}^I(i)\}_{p_\ell} + \{\psi_j^I\}_{p_\ell} \quad (51)$$

,  $\ell=1, 2, \dots, n_p$

In (50) sind die partiellen Ableitungen  $\{\dots\}_{p_\ell}$  genauer wie folgt definiert :

$$\{\psi_j^I\}_{y_k^I(i)} := \{\psi_j(t_j; y^I |, \dots, y^I |^{(n-1)}, g_1^I, \dots, g_{n_3}^I)\}_{y_k^I(i)} \quad (51a)$$

$$\{y_{kj}^I(i)\}_{p_\ell} := \{y_k^I(t_j; c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I, s_1^I, s_2^I, \dots, s_{n_2}^I)\}_{p_\ell} \quad (51b)$$

$$\{\psi_j^I\}_{p_\ell} := \{\psi_j(t_j; y^I |, \dots, y^I |^{(n-1)}, g_1^I, \dots, g_{n_3}^I)\}_{p_\ell} \quad (51c)$$

Die partiellen Ableitungen (51a) , (51c) sind durch die Beobachtungsart(en) definiert ; sie lassen sich an dieser Stelle nicht weiter präzisieren ( siehe Kapitel 2.4.2 ) .

Die partiellen Ableitungen (51b) jedoch lassen sich als Werte von Funktionen  $z_\ell^I(t) |^{(i)}$  an den Stellen  $t=t_j$  ,  $j=1, 2, \dots, n_b$  interpretieren :

Definition :

$$\underline{z_{\ell}^I(t) |} := \{y^I(t) | \}_{P_{\ell}}, \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (52)$$

Man erkennt sofort , dass gilt :

$$\underline{\{y_{kj}^{I(i)}\}_{P_{\ell}}} = z_{\ell,k}^{I(i)}(t_j), \quad i=0,1,\dots,n-1, \quad k=1,2,\dots,d \quad (53)$$

$$\ell=1,2,\dots,n_p, \quad j=1,2,\dots,n_b$$

( wobei mit  $z_{\ell,k}^{I(i)}(t)$  die k-te Komponente von  $z_{\ell}^I(t) |^{(i)}$  bezeichnet wird ) .

Für jede der Funktionen  $z_{\ell}^I(t) |$  ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  lässt sich eine Anfangs- resp. eine Randwertaufgabe definieren , indem man das Differentialgleichungssystem (49) sowie die Gleichungen (50a,b) total nach dem Parameter  $p_{\ell}$  ableitet .

Als Resultat erhält man :

$$\underline{z_{\ell}^I |^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i^I(t) \cdot z_{\ell}^I |^{(i)} + \{f^I | \}_{P_{\ell}}} \quad (54)$$

Wobei :  $p_i^I(t)$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$ :quadratische  $d \times d$  - Matrizen sind , deren Elemente  $p_{i,jk}^I$  wie folgt definiert sind :

$$p_{i,jk}^I := \{f_j^I(t) | \}_{y_k^{I(i)}}, \quad j=1,2,\dots,d, \quad k=1,2,\dots,d \quad (54a)$$

$\{f^I | \}_{P_{\ell}}$  :Kolonnenvektor mit  $d$  Komponenten .  
( Partielle Ableitung des Vektors  $f^I |$  ( siehe (49) ) nach dem Parameter  $p_{\ell}$  ) .

(54) ist das dem Parameter  $p_{\ell}$  zugeordnete Variationsgleichungssystem . Es ist ein gewöhnliches , lineares Differentialgleichungssystem .

Leitet man (50a) resp (50b) ( total ) nach dem Parameter  $p_{\ell}$  ab , so folgt :

$$z_{\ell}^I(T_0) |^{(i)} = \{y_{0i}(c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I) | \}_{P_{\ell}}, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (55a)$$

resp.

$$z_{\ell}^I(T_i) | = \{y_{1i}(c_1^I, c_2^I, \dots, c_{n_1}^I) | \}_{P_{\ell}}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (55b)$$

Die Funktionen  $z^I(t) |$  mit deren Hilfe die partiellen Ableitungen  $\{\phi_j^I\}_{p_\ell}$  berechnet werden müssen, sind also Lösungen der Anfangswertaufgabe (54), (55a) resp. der Randwertaufgabe (54), (55b).

Dabei werden die Variationsgleichungssysteme (54) linear sein - unabhängig davon, ob das Gleichungssystem (12), das in diesem Zusammenhang auch Primärgleichungssystem genannt wird, linear ist oder nicht.

Ergänzungen und Bemerkungen zum Thema "Variationsgleichungen"

- Wird eine Aufgabe nicht - wie im vorliegenden Kapitel bislang angenommen - durch das Differentialgleichungssystem (12) und die Gleichungen (13a) resp. (13b), sondern durch die N Differentialgleichungssysteme (10\*) und durch (13a\*) resp. (13b\*) definiert, ist es günstiger, an Stelle der Funktionen (52) die folgenden Funktionen zu definieren:

$$\underline{z_{\ell m}^I(t) |} := \{ \kappa_{\ell}^I(t) | \}_{p_m}, \quad \ell=1,2,\dots,N \quad (52^*)$$

$$m=1,2,\dots,n_p$$

Die dem Parameter  $p_m$  zugeordneten N Variationsgleichungssysteme erhält man durch (totale) Ableitung der N Differentialgleichungssysteme (10\*) nach dem Parameter  $p_m$ :

$$\underline{z_{\ell m}^I |^{(n)}} = \sum_{i=0}^{n-1} p_{\ell i}^I(t) \cdot z_{\ell m}^I |^{(i)} + \{ \gamma_{\ell}^I | \}_{p_m}, \quad \ell=1,2,\dots,N \quad (54^*)$$

Wobei:  $p_{\ell i}^I(t)$ ,  $\ell=1,2,\dots,N$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  quadratische  $d_0 \times d_0$  - Matrizen sind, die analog zu den Matrizen  $p_i^I(t)$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  in (54a) definiert sind:

$$\underline{p_{\ell i, jk}^I(t)} := \{ \gamma_{\ell, j}^I \}_{\kappa_{\ell, k}}, \quad j=1,2,\dots,d_0 \quad (54a^*)$$

$$k=1,2,\dots,d_0$$

Die Anfangsbedingungen  $z_{\ell m}^I(T_0) |^{(i)}$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  resp. die Randbedingungen  $z_{\ell m}^I(T_i) |$ ,  $i=1,2,\dots,n$  erhält man, indem man die Gleichungen (13a\*, b\*) total nach dem Parameter  $p_m$  ableitet. Wir verzichten darauf, dieses Resultat explizite anzugeben.

- Sind die beobachteten Funktionen von der speziellen Art (17d) oder (17e), ist es sinnvoll, die Berechnungsart (51) der partiellen Ableitungen  $\{\phi_j^I\}_{p_\ell}$  zu modifizieren, obwohl dies "im Prinzip" nicht nötig wäre, da ja (17d,e) in gewissem Sinne Spezialfälle von (17) sind. Wir beschränken uns darauf, die den Funktionen (17e) zuzuordnende, (51) ersetzende Formel anzugeben:

$$\{\phi_j^I\}_{p_\ell} = \int_{t_j}^{t_j + \Delta t} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{n-1} \{\beta_j^I\}_{Y_k} \cdot z_{\ell,k}^{I(i)}(t') + \{\beta_j^I\}_{p_\ell} \right) \cdot dt' \quad (51^*)$$

In (51\*) ist unter  $z_{\ell,k}^{I(i)}(t')$  die k-te Komponente des nach (52) definierten Vektors  $z_\ell^I(t') |^{(i)}$  zu verstehen. Die übrigen in (51\*) auftretenden partiellen Ableitungen sind analog zu (51a,c) definiert.

- Für die verschiedenen in Tabelle 1 (16) definierten Parameterarten lassen sich die folgenden Regeln angeben:

1.  $p_\ell \notin \{c_1, c_2, \dots, c_{n_1}\}$   
 Dann gilt:  $z_\ell^I(T_0) |^{(i)} = 0 |, i=0,1,\dots,n-1$   
 resp.  $z_\ell^I(T_i) |^{(i)} = 0 |, i=1,2,\dots,n$
2.  $p_\ell \notin \{s_1, s_2, \dots, s_{n_2}\}$   
 Dann gilt:  $\{f^I\}_{p_\ell} = 0 |$  (siehe (54a))
3.  $p_\ell \notin \{c_1, c_2, \dots, c_{n_1}\}$  und  $p_\ell \notin \{s_1, s_2, \dots, s_{n_2}\}$   
 Dann gilt:  $z_\ell^I(t) = 0 |$

- Es wäre an und für sich möglich, das Primärgleichungssystem (12) und alle Variationsgleichungssysteme (54) zu einem einzigen Differentialgleichungssystem zusammenzufassen und dieses System mit einer einzigen Integrationsmethode zu lösen. Da jedoch die Systeme (54) linear sind, das System (12) aber nicht, lohnt es sich im allgemeinen, für die Lösung von (12) und von (54) verschiedene Methoden zu verwenden (siehe Kapitel 2.3).

## 2.1.6 TECHNISCHE BEMERKUNGEN

### 2.1.6.1 SPAREN VON KERNSPEICHERPLATZ

Bei jedem Iterationsschritt  $I=1,2,\dots,I^*$  der Lösung einer Extremalaufgabe (6) resp. (20) muss das Normalgleichungssystem (32) aufgestellt und gelöst werden .

Vom programmtechnischen Standpunkt aus gesehen ist es am einfachsten , die Matrizen  $A^I, (A^I)^T, \Delta\phi^I|$  (siehe (29)) und die Matrix  $G$  (siehe (31)) zu definieren und anschliessend die Matrizen  $Q^I, b^I|$  und  $\Delta p^I|$  durch formale Matrizenmultiplikationen nach (33a) , (33b) und (33) zu berechnen .

Man überlegt sich jedoch leicht , dass durch dieses formal einfache Prozedere die Speicherkapazitäten von Tischrechnern und von Kleincomputersystemen schon bei relativ bescheidenen Aufgaben überschritten wird : Zur Speicherung der 7 Matrizen  $A^I, (A^I)^T, \Delta\phi^I|, G, Q^I, b^I|, \Delta p^I|$  benötigt man insgesamt

$$N_{\text{sp1}} = n_{\text{BZ}} \cdot (n_b \cdot (2 \cdot n_p + 1 + n_b) + n_p \cdot (n_p + 2)) \quad (57)$$

Bytes ( 1 Byte = 8 binäre Speichereinheiten , siehe Kapitel 2.2.1 ) , wenn man mit  $n_{\text{BZ}}$  die Anzahl der zur Speicherung einer reellen Zahl im Kernspeicher benötigten Bytes bezeichnet .

Zur Erinnerung :  $n_b$  ist die Anzahl der Einzelbeobachtungen ,  $n_p$  die Anzahl der zu bestimmenden Parameter .

Soll beispielsweise die Bahn eines Planetoiden aus 50 Richtungsbeobachtungen ( 100 Beobachtungen im Sinne von Definition (3) ) berechnet werden , beträgt  $n_b=100, n_p=6$  ; damit braucht man allein zur Speicherung der erwähnten 7 Matrizen 100 kBytes Kernspeicherplatz , falls man annimmt , dass  $n_{\text{BZ}}=8$  Bytes beträgt ( siehe Kapitel 2.2 ) !

Dass dieses Vorgehen nicht nur sehr viel Speicherplatz , sondern auch sehr viel überflüssige Rechenzeit beansprucht , liegt auf der Hand .

Zu einem platz- und zeitsparenden Algorithmus kommt man , wenn man berücksichtigt , dass  $G$  eine diagonale Matrix ist ; die Elemente der Matrizen  $Q^I$  und  $b^I|$  lassen sich nämlich wie folgt

berechnen ( vergleiche (33a) , (33b) ) :

$$(Q^I)^{-1}_{ik} = \sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot A_{ji}^I \cdot A_{jk}^I, \quad i=1,2,\dots,n_p, k=1,2,\dots,n_p \quad (58a)$$

$$b_i^I = \sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot A_{ji}^I \cdot \Delta\phi_j^I, \quad i=1,2,\dots,n_p \quad (58b)$$

Aus (58a,b) folgt unmittelbar , dass man sich die Definition der Matrix  $G$  sparen kann . Nötig ist nur die Definition einer Zeilenmatrix  $\underline{g}$  , welche die Diagonalelemente von  $G$  enthält :

$$\underline{g} := (g_1, g_2, \dots, g_{n_b}) \quad (58c)$$

Weiter erübrigt sich selbstverständlich die Definition der Matrix  $(A^I)^T$  .

Zudem folgt , dass man mit (58a,b) einen Algorithmus so definieren kann , dass man zur gleichen Zeit nur eine Zeile der Matrix  $A^I$  und je ein Element der Matrizen  $\Delta\phi^I$  und  $\underline{g}$  im Kernspeicher zur Verfügung haben muss . ( Selbstverständlich muss man bei diesem Vorgehen die Möglichkeit haben ,  $\underline{g}$  auf ein externes Speichermedium zu speichern ; zudem müssen die einzelnen Zeilen der Matrizen  $A^I$  nacheinander berechnet werden ) . Hat man solche Möglichkeiten , müssen an Stelle von  $N_{sp1}$  Speicherplätzen ( siehe (57) ) nur noch  $N_{sp2}$  Speicherplätze zur Berechnung der Matrizen  $Q^I, b^I, \Delta p^I$  im Kernspeicher zur Verfügung stehen :

$$\underline{N_{sp2}} = n_{BZ} \cdot (n_p \cdot (n_p + 3) + 2) \quad (57^*)$$

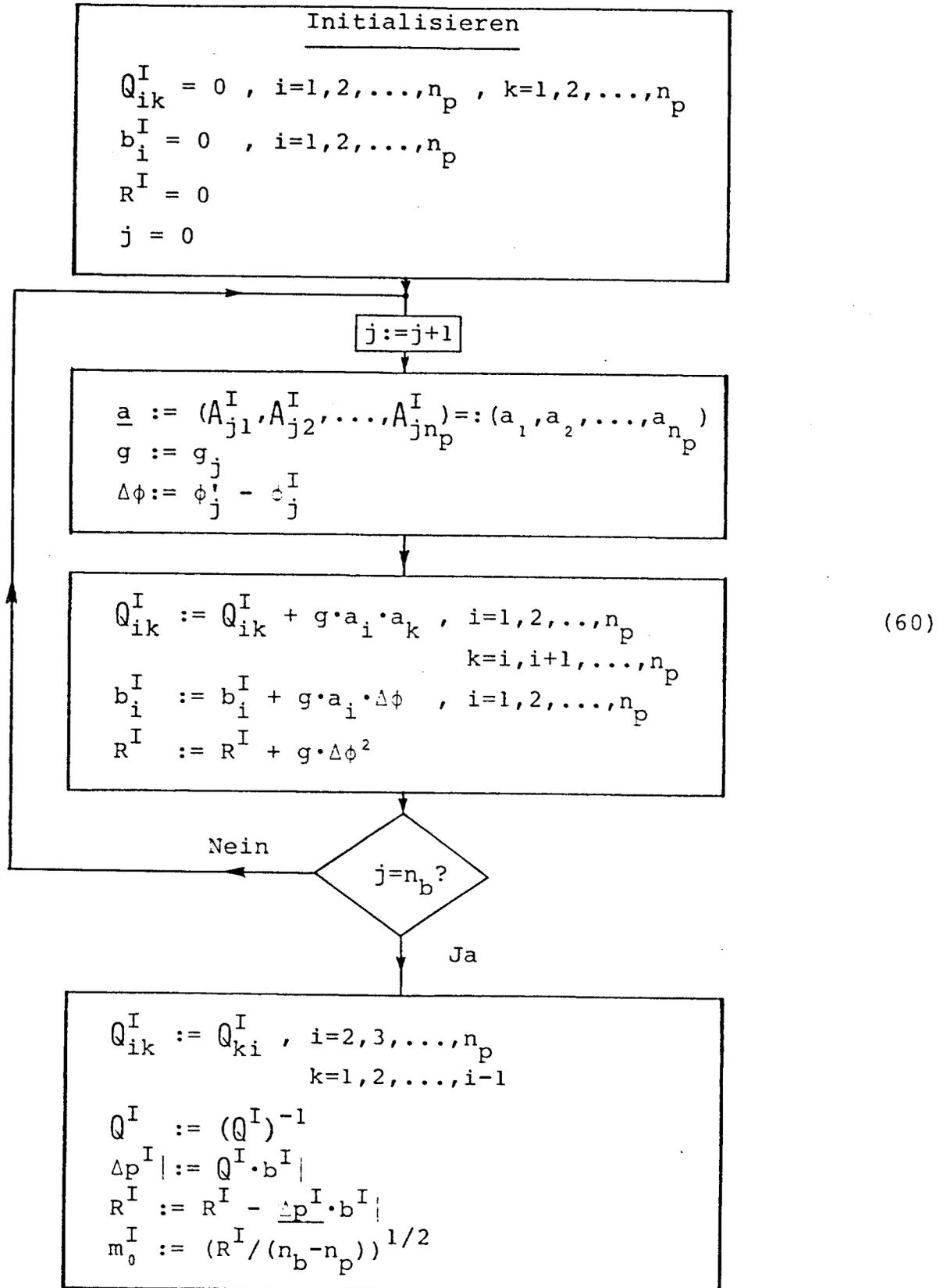
Wichtig ist , dass  $N_{sp2}$  von der Anzahl der Beobachtungen unabhängig ist . In dem auf Seite 37 unten gegebenen Beispiel (  $n_b=100, n_p=6$  ) beträgt der Kernspeicherbedarf nach (57\*) nur noch 0.45 kBytes .

Es ist sinnvoll , die in (34b) definierte Grösse  $\underline{\rho^I} \cdot G \cdot \rho^I$  gleichzeitig mit den Matrizen  $Q^I, b^I$  und  $\Delta p^I$  zu berechnen . Einfachheitshalber setzen wir dabei :

$$\underline{R^I} := \underline{\rho^I} \cdot G \cdot \rho^I \quad (59)$$

Die Berechnung der Matrizen  $Q^I, b^I, \Delta p^I$  sowie der skalaren Grösse  $R^I$  wird durch das folgende Blockschema gegeben :

Berechnung von  $Q^I$ ,  $b^I$ ,  $\Delta p^I$  sowie  $R^I$  und  $m_0^I$   
 (siehe (58a,b), (33) sowie (34a,b) und (34))



## 2.1.6.2 ABBRUCHKRITERIEN

Das notwendige und hinreichende Abbruchkriterium zum Beenden der iterativen Lösung von Parameterbestimmungsaufgaben (6) resp. (20) haben wir schon in (26) angegeben. Diesem Kriterium soll vorerst eine neue Gestalt gegeben werden, indem die nach (25) definierten Grössen  $\zeta_j^I$ ,  $j=1,2,\dots,n_p$  anders geschrieben werden. Man verifiziert nämlich leicht, dass gilt (siehe (29b) und (29c)) :

$$\zeta_j^I = | \Delta\phi_j^{I+1} + \rho_j^I |, \quad j=1,2,\dots,n_p \quad (61)$$

( Die rechts auftretenden Grössen  $\phi_j^{I+1}$  resp.  $\rho_j^I$  sind die Komponenten der nach (29b), (29c) definierten Vektoren ).

Wir wollen das Abbruchkriterium (26) in dieser neuen Form fixieren und ihm die Nummer 1 geben :

### Abbruchkriterium 1

$$I^* = I \text{ und } p_i^+ := p_i^{I+1}, \quad i=1,2,\dots,n_p \quad (62)$$

falls gilt :

$$| \Delta\phi_j^{I+1} + \rho_j^I | < m_0^I / (3 \cdot \sqrt{g_j}), \quad j=1,2,\dots,n_p$$

### Bemerkungen zu (62)

- Der a posteriori Schätzwert  $m_0^I$  für den mittleren Gewichteinheitsfehler  $\sigma_0$  ist nach (34) zu berechnen (siehe auch Algorithmus (60)).

- Damit das Kriterium 1 angewandt werden kann, muss

a. der Residuenvektor  $\rho^I$  bei jedem Iterationsschritt nach (30) berechnet werden ;

zusätzlich muss

b. der sonst erst beim nächsten Iterationsschritt benötigte Vektor  $\Delta\phi^{I+1}$  schon am Ende des I-ten Iterationsschrittes berechnet werden.

Der Punkt a. bedingt, dass die Matrix  $A^I$  sowie der Vektor  $\Delta\phi^I$  gespeichert werden müssen. Der Punkt b. bedingt gegen-

über dem einfachen Algorithmus (60) eine ziemlich grosse Umstellung , will man nicht gewisse Grössen mehrfach berechnen .

- Zusammenfassend kann festgehalten werden , dass das Abbruchkriterium 1 zwar sehr korrekt , aber sowohl bezüglich der Programmstruktur als auch bezüglich des benötigten Speicherplatzes ziemlich unhandlich ist .

Somit stellt sich automatisch die Frage nach Abbruchkriterien , die "nur" hinreichend , dafür aber einfach in der praktischen Anwendung sind . Es muss allerdings festgehalten werden , dass man bei Verwendung von solchen neuen Abbruchkriterien im allgemeinen eine grössere Anzahl von Iterationsschritten durchführen muss als bei der Verwendung von (62) ; ob dies aus rechenökonomischen Ueberlegungen zu verantworten ist , hängt von der speziellen Problemstellung ab .

Falls der Iterationsprozess zur Lösung einer Aufgabe (6) resp. (20) überhaupt konvergiert ( was wir annehmen wollen ) , gelten zweifellos die beiden folgenden Aussagen :

$$| \Delta p_i^I | \longrightarrow 0 \quad , \quad \text{falls } I \longrightarrow \infty \quad , \quad i=1,2,\dots,n_p \quad (63a)$$

$$m_0^I \longrightarrow m_0 \quad , \quad \text{falls } I \longrightarrow \infty \quad (63b)$$

Ausgehend von jeder der beiden Aussagen lässt sich je ein Abbruchkriterium formulieren :

<p style="text-align: center;"><u>Abbruchkriterium 2</u></p> $I^* = I \text{ und } p_i^+ = p_i^{I+1} \quad , \quad i=1,2,\dots,n_p$ <p style="text-align: center;">falls gilt :</p> $  \Delta p_i^I   < m_0^I / 3 \cdot (Q_{ii}^I)^{1/2} \quad , \quad i=1,2,\dots,n_p$	(64)
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------

<p style="text-align: center;"><u>Abbruchkriterium 3</u></p> $I^* = I \text{ und } p_i^+ = p_i^{I+1} \quad , \quad i=1,2,\dots,n_p$ <p style="text-align: center;">falls gilt :</p> $  (m_0^I - m_0^{I-1}) / m_0^I   < 0.001$	(65)
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------

### Bemerkungen zu (64) und (65)

- Beim Abbruchkriterium 2 wird der Iterationsprozess abgebrochen , wenn sich die Parameterwerte nur noch um weniger als  $1/3$  der beim  $I$ -ten Iterationsschritt geschätzten mittleren Fehler der entsprechenden Parameter ändern ( siehe (46) ) .
- Das Abbruchkriterium 3 beruht auf (63b) und auf der Erfahrungstatsache , dass Iterationsprozesse zur Lösung von Parameterbestimmungsaufgaben der Art (6) resp. (20) im allgemeinen sehr schnell konvergieren .
- Beide Abbruchkriterien sind einfach anzuwenden :  
Bei jedem Iterationsschritt  $I=1,2,\dots,I^*$  muss zusätzlich zum Aufstellen und Lösen des Normalgleichungssystems (32) nur die Grösse  $m_0^I$  berechnet und gespeichert werden , was in bezug auf Rechenzeit und Speicherplatz ( siehe (60) ) kaum ins Gewicht fällt.

### 2.1.7 BLOCKSCHEMEN ZUR LÖSUNG VON PARAMETERBESTIMMUNGS- AUFGABEN DER KLASSE $K_1$

---

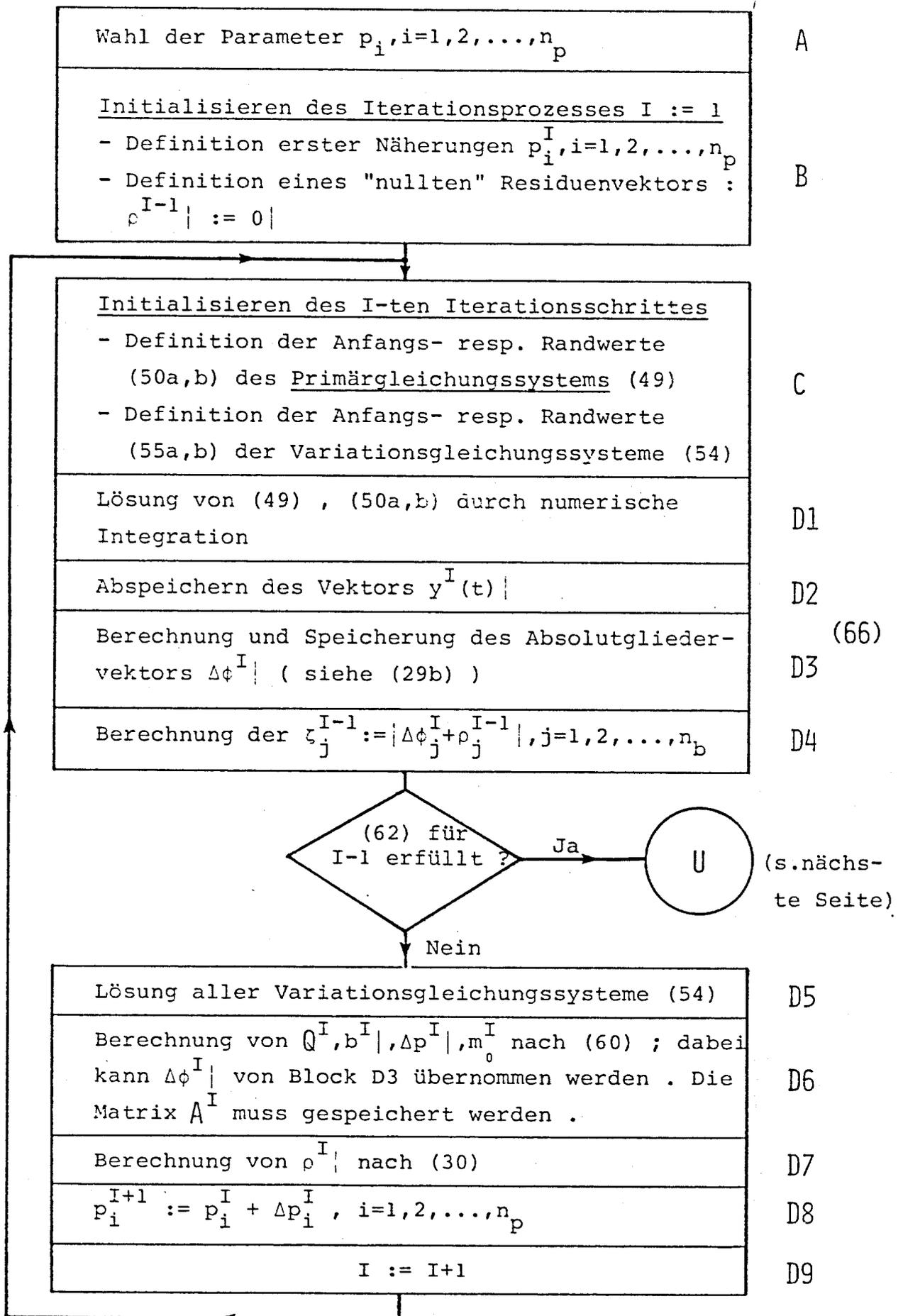
Aus dem bisher Gesagten folgt , dass zwei verschiedene Blockschemen zur Lösung von Parameterbestimmungsaufgaben (6) ( Aufgaben der Klasse  $K_1$  , siehe (18) ) angegeben werden müssen : ein Schema , wenn das Abbruchkriterium 1 ( siehe (62) ) verwendet wird , ein anderes , wenn das Abbruchkriterium 2 oder 3 ( siehe (64) resp. (65) ) Anwendung findet .

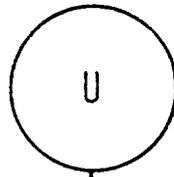
Dabei ist klar , dass die meisten Blöcke in beiden Lösungsschemen auftreten .

Die Blöcke werden in beiden Schemen durch grosse Buchstaben und eventuell zusätzlich einer Zahl gekennzeichnet . In den Blockschemen (66) , (67) bedeuten gleiche Bezeichnungen identische Blöcke .

Unterscheidet sich ein Block im Lösungsschema 2 nur unwesentlich von einem Block in Schema 1 , wird die Bezeichnung vom ersten Schema übernommen und mit einem Stern "\*" versehen .

Lösungsschema 1 : Abbruchkriterium 1 ( siehe (62) )

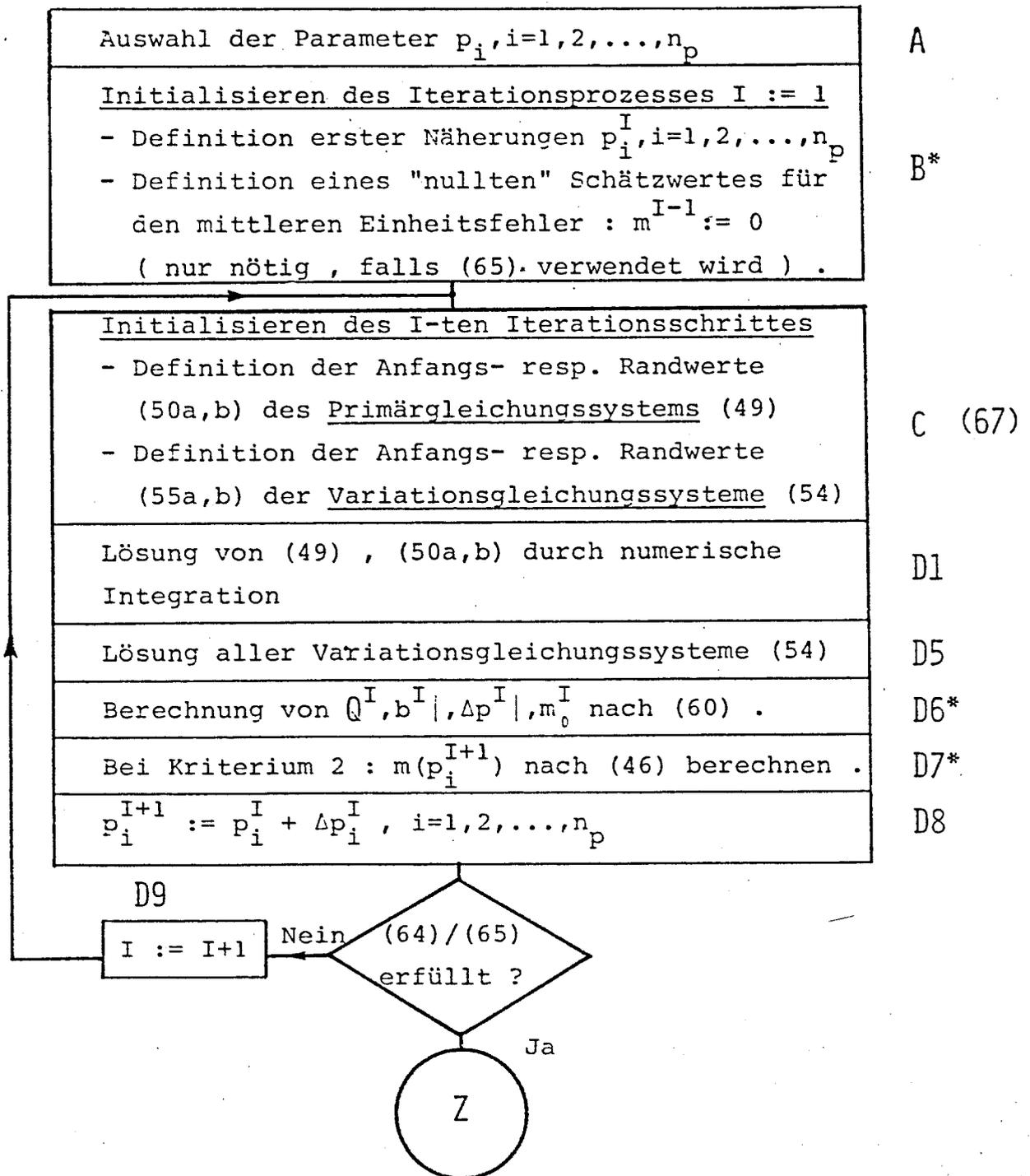


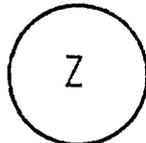


Abschluss des Iterationsprozesses  
 $I^* = I, p_i^+ := p_i^{I^*}, i=1,2,\dots,n_p$   
 $m(p_i^+), i=1,2,\dots,n_p$  nach (46) berechnen

E (66)<sub>2</sub>

Lösungsschema 2 : Abbruchkriterien 2,3 ( siehe (64), (65) )





Abschluss des Iterationsprozesses  
 $I^* = I+1$  ,  $p_i^+ = p_i^{I^*}$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$   
 $m(p_i^+)$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  nach (46) berechnen

$E^* (67)_2$

Kommentar zu den einzelnen Blöcken der Schemen (66) , (67)

Block A

Häufig ist es möglich , dasselbe Problem durch verschiedene Parametersätze zu beschreiben . Dabei wird man in der Regel die Parameter so wählen , dass die Initialisierung der Aufgabe ( Block B ) möglichst einfach wird ( siehe auch Beispiel 1 ) .

Blöcke B , B\*

Problematisch ist nur die beiden Blöcken gemeine Initialisierung der Parameter . Normalerweise ist diese Aufgabe umso einfacher zu lösen , je anspruchsvoller die ganze Parameterbestimmungsaufgabe ist .

Stellt man sich beispielsweise die Aufgabe , "alle" Parameter des Planetensystems mit Hilfe aller Beobachtungen der letzten Jahrhunderte zu bestimmen , hat man "fast zu viele" Quellen zur Verfügung , aus denen man erste Näherungen für die Anfangswerte und Massen der Planeten beziehen kann . Hat man hingegen die Aufgabe , aus einigen wenigen Richtungsbeobachtungen eines Kleinplaneten eine erste Bahn zu bestimmen , weiss man im allgemeinen nicht viel mehr , als dass sich dieser Himmelskörper ( wahrscheinlich ) im Asteroidengürtel aufhält .

Bei vielen Parameterbestimmungsproblemen ist diese Teilaufgabe die anspruchsvollste , handelt es sich doch darum , erste Näherungswerte für die  $p_i$  ,  $i=1,2,\dots,n_p$  allein aus den Beobachtungen  $\phi_j^i$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  herzuleiten .

## Blöcke D..

Kernstück dieser Programmsequenzen ist das Aufstellen und Lösen des Normalgleichungssystem (32) mit dem Blockschema (60) ( siehe Blöcke D6 resp. D6\* in (66) , (67) ) .

Wegen des Abbruchkriteriums 1 ( siehe (62) ) muss in Algorithmus (66) der Absolutgliedervektor  $\Delta\phi^I$  vor der Matrix  $A^I$  berechnet werden . Unterlässt man diese getrennte Berechnung von  $\Delta\phi^I$  und  $A^I$  , ist es unvermeidlich , dass gewisse Grössen zwei mal berechnet werden müssen .

Der Rechenökonomie dienen auch die Blöcke D2 und D3 .

Der in D2 gespeicherte Lösungsvektor  $y^I(t)$  wird in (66) in Block D5 zur Berechnung der Matrizen  $P_i^I(t)$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  sowie  $\{f^I\}_{p_\rho}$  gebraucht . ( Etwas präziser sollte man in D2 sagen , dass von  $y^I(t)$  soviel Information abgespeichert werden muss , dass in D5 zu jedem Zeitpunkt  $t$  im Intervall , das alle Beobachtungszeiten enthält , der Wert  $y^I(t)$  des Lösungsvektors an der Stelle  $t$  berechnet werden kann ) . Erwähnenswert ist die Tatsache , dass in (66) die Matrix  $\rho^I$  bei jedem Iterationsschritt  $I=1,2,\dots$  berechnet werden muss ( siehe Block D7 ) .

## 2.2 RECHENHILFSMITTEL

Die vorliegende Arbeit trägt den Titel "Lösung von Parameterbestimmungsproblemen in der Himmelsmechanik mit modernen Hilfsmitteln" . Dabei haben wir in (7) gesagt , dass unter "modernen Hilfsmitteln" programmierbare Rechenanlagen zu verstehen sind .

Einige Bemerkungen zum verwendeten Rechner , zur Programmsprache und zu den wichtigsten im folgenden benötigten Hilfsprogrammen und Unterprogrammen lassen sich daher nicht vermeiden . Dabei versteht es sich von selbst , dass diese technische Diskussion auf das Allernötigste beschränkt bleiben muss .

## 2.2.1 DIE RECHENANLAGE

Als Rechner wird im folgenden ausschliesslich das PDP 11/40 - System der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald verwendet .

Die wichtigsten Komponenten des Systems :

- Zentraleinheit ( CPU = central processing unit )
- Kernspeicher mit 64 kBytes (siehe (68) unten)
- Systemkonsole , bestehend aus einem Drucker und einem graphischen Bildschirm
- Externe Speichermöglichkeiten :
  - a. Zwei Disk-Stationen ( Speicherkapazität pro Disk ca. 2.5 MBytes (siehe (68) unten) )
  - b. Eine 9-Spur Magnetbandstation. ( die Schreibdichte ist wählbar 1600 oder 800 BPI ( bytes per inch )
- CAMAC-Interface-System
- X,Y - Schreiber , der als Plotter eingesetzt werden kann .

Dazu einige Erläuterungen :

- Der oben mehrmals benützte Ausdruck "Byte" ist eine gebräuchliche Speichereinheit , die wie folgt definiert ist :

1 Byte = 8 bits ( 1 bit = 1 binäre Speichereinheit )	(68)
1 kByte= $10^3$ Bytes	
1 MByte= $10^6$ Bytes	

- Die mit Hilfe des graphischen Systems ( VT-11 ) erzeugten Darstellungen können via CAMAC-System mit Hilfe des X,Y - Schreibers "zu Papier gebracht" werden ( siehe Kapitel 2.2.2 , Programm "PLOT" )
- In den folgenden Beispielen werden als externe Speicher ausschliesslich Disks verwendet . Ein magnetischer Disk ist ein zweidimensionales Speichermedium , das sich durch kurze Zugriffszeiten auszeichnet .
- Die Magnetbandstation dient der Datenübertragung zwischen dem PDP 11/40 - System in Zimmerwald und dem Rechenzentrum der Universität Bern ( siehe {W. Gurtner , 1979} ) .

Sie wird unter anderem eingesetzt , um grössere Mengen von Daten auf den schnellen Druckern des Rechenzentrums auszu- drucken .

- Das PDP 11/40 - System bietet viele weitere Möglichkeiten , die in der vorliegenden Arbeit nicht oder nur am Rande ein- gesetzt werden . ( Erwähnenswert ist beispielsweise das interaktive Arbeiten am graphischen Bildschirm ) .

Der Versuch , die Möglichkeiten des Systems im Rahmen der vorliegenden Arbeit auszuschöpfen , würde zwangsläufig zu einer Ueberbetonung von rein computer-technischen Aspekten führen .

## 2.2.2 DIE PROGRAMMSPRACHE , HILFSPROGRAMME UND UNTERPROGRAMME

Als Programmiersprachen stehen Assembler , Basic und Fortran-4 zur Verfügung . Für unsere Zwecke ist von den drei Sprachen einzig Fortran geeignet .

Wir nehmen an , dass die Elemente der Sprache dem Leser be- kannt sind . Auf einige systemspezifische Erweiterungen der Sprache werden wir bei den Anwendungen eingehen .

Jede reelle Zahl wird als sogenannte Gleitkommazahl ("flea- ting point number") dargestellt :

$$\underline{r = v_1 \cdot m \cdot 2^{v_2 \cdot e}} \quad (69)$$

Wobei : r : Reelle Zahl

m : Mantisse von r

v<sub>1</sub> : Vorzeichen von r

e : Betrag des Exponenten (69b)

v<sub>2</sub> : Vorzeichen des Exponenten

Der Darstellung (69) liegt das Zweier Zahlensystem zugrunde .

Die Fortran-4 Version des in Zimmerwald installierten Rechners unterscheidet zwischen Einfach- und Doppelpräzisionszahlen ( REAL\*4 und REAL\*8 Zahlen ) . Der wesentliche Unterschied be- steht darin , dass für die Mantisse m im ersten Fall 24 , im zweiten Fall 56 Ziffern im binären Zahlensystem zur Verfügung

stehen , was einer Rechnung mit ungefähr 7 resp. 17 dezimalen Ziffern entspricht .

Daraus folgt unmittelbar , dass bei den meisten Parameterbestimmungsproblemen der Himmelsmechanik und der Satellitengeodäsie die Rechnung in Doppelpräzision zu erfolgen hat .

Stellt man den Programmen resp. Unterprogrammen die Instruktion

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

voran , erreicht man , dass sämtliche Variablen ( und Matrizen ) , deren Namen nicht mit I,J,K,L,M oder N beginnen , als Doppelpräzisionszahlen interpretiert werden . ( Variablen , deren Namen mit I,J,K,L,M oder N beginnen , werden als ganzzahlige (sogenannte INTEGER\*2 -) Variablen interpretiert . INTEGER\*2 resp. REAL\*4 resp. REAL\*8 Variablen nehmen im Kernspeicher 2 resp. 4 resp. 8 Bytes ein . Eine wichtige Einschränkung : Der Betrag einer INTEGER\*2 Variablen darf den Wert von  $2^{15}-1=32'767$  nicht übersteigen ) .

Damit zu den verwendeten Hilfsprogrammen und Unterprogrammen :

Tabelle 2

Die verwendeten Programme	
Name	Kurzbeschreibung
MPLOB	Vorbereitungsprogramm für Bahnbestimmungsaufgaben in der klassischen Himmelsmechanik
SATORB	Vorbereitungsprogramm für Bahnbestimmungsaufgaben in der Satellitengeodäsie
RESID	Darstellung von Residuen von Beobachtungen mit Hilfe des graphischen Bildschirms
PLOT	Zeichnen der im Programm RESID erzeugten Darstellungen mit dem X,Y - Schreiber

(70)

## Bemerkungen zu den einzelnen Programmen

### MPLORB

Dieses Programm ist Teil eines Programm- und Datenorganisations-systems für Himmelskörper unseres Planetensystems für den PDP 11/40 Rechner der Sternwarte Zimmerwald {M. Rothacher , 1982} .

In MPLORB werden diejenigen Beobachtungen eines Himmelskörpers , mit deren Hilfe eine Bahn bestimmt werden soll , in eine Standard-Form ( Winkel im Bogenmass , Zeit im Julianischen Datum ) gebracht und anschliessend in ein Disk-File mit dem Namen MPLORB.DAT abgespeichert . Zudem werden die rechtwinkligen Koordinaten und die Geschwindigkeiten der beobachtenden Stationen berechnet und zusammen mit einer ( internen ) Stationsnummer im gleichen File MPLORB.DAT gespeichert . Als Koordinatensystem wird stets das äquatoriale System der Epoche 1950.0 ( siehe Kapitel 2.4.1 ) verwendet , einmal mit der Sonne , einmal mit dem Erdschwerpunkt als Ursprung . Im gleichen Datenfile wird zudem Platz für einige Hilfsinformation ( wie z.B. Gravitationskonstante , Residuen , Sperrindizes ) reserviert . Für Einzelheiten siehe {M. Rothacher , 1982} .

### SATORB

Dieses Programm erfüllt im wesentlichen dieselben Aufgaben wie das Programm MPLORB , nur dass hier Satellitenbeobachtungen verarbeitet werden . Ein weiterer Unterschied besteht darin , dass die Beobachtungsart für jede Beobachtung angegeben werden muss ( Photographie , Laser , Doppler , siehe 2.4.2 ) .

### RESID

Das Programm wird nach der Bahnbestimmung aufgerufen . Kernstück ist die Subroutine XYGRA ( siehe Tabelle 3 ) , mit der die Residuen nach der Ausgleichsrechnung dargestellt werden können ; zudem besteht die Möglichkeit , schlechte Beobachtungen ("Ausreisser") zu markieren ( sie werden in der Darstellung mit einem Kreuz "x" anstatt mit einem "." bezeichnet ) . Beispiele siehe Figuren 8a,b,c,d , Seite 193 .

Die Bahnbestimmung kann anschliessend ohne die markierten Beobachtungen ( deren Sperrindex im Datenfile wird gleich 1 gesetzt ) wiederholt werden .

Es besteht die Möglichkeit , nur die Beobachtungen einzelner Stationen darzustellen . Bei Richtungsbeobachtungen werden anschliessend an die Residuen der Ausgleichsrechnung zusätzlich die Residuen tangential und normal zur scheinbaren Bewegungsrichtung dargestellt .

Die zur Erzeugung der Graphiken nötige Information wird auf weiter Hilfsfiles abgespeichert und kann später - falls gewünscht - mit dem Programm PLOT auf Papier kopiert werden .

PLOT

Wir brauchen dieses Programm ausschliesslich , um die in RESID erzeugten Darstellungen zu "plotten" . Das Programm bietet viele weitere Möglichkeiten , die in {W. Gurtner , 1982} nachgeschlagen werden können .

Die in (70) erwähnten Programme und die im folgenden entwickelten Programme rufen Unterprogramme auf , deren Funktionen in Tabelle 3 kurz beschrieben werden :

Tabelle 3

Die wichtigsten Unterprogramme	
Name	Kurzbeschreibung
ARCGMS GMSARC	Bogenmass $\longrightarrow$ (Alt/Neu) grad, Minuten, Sekunden $\longleftarrow$ ( oder Stunden, " " )
DJUL JMT	Jahr, Monat, Tag $\longrightarrow$ (modifiziertes) julianisches Datum $\longleftarrow$ (71)
DDREH	Drehachse $i$ , Drehwinkel $\alpha \longrightarrow$ partikuläre Drehmatrix $R_i(\alpha)$ im 3-dim. eukl. Raum
DMLMAV	"Vektor=Matrix·Vektor" im 3-dim. eukl. Raum

Tabelle 3 ( Fortsetzung )

Name	Kurzbeschreibung
THETA	T ( im MJD ) $\rightarrow$ mittlere Sternzeit in Greenwich z.Z. T
PRAE NUT	T ( im MJD ) $\rightarrow$ Präzessionsmatrix $\rightarrow$ Nutationsmatrix ( siehe Kapitel 2.4.1 )
XVELE ELEXV	Orts- und Geschwindigkeitsvektoren eines Himmelskörpers z.Z. T ( MJD ) im Äquatorsystem 1950.0 $\leftrightarrow$ oskulierende Kegelschnittelemente im Äquator- oder im Ekliptikalen System 1950.0 ( siehe Kapitel 2.4.1 )
PLAORT	T ( MJD ) $\rightarrow$ Ort und Geschwindigkeit eines der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto zur Zeit T im Äquatorsystem 1950.0 s. {M.Rothacher, 1982}

(71)

Bemerkungen zu Tabelle 3

- In Tabelle 3 bedeutet T eine Zeit , MJD ist das sogenannte modifizierte Julianische Datum , das mit Hilfe des Julianischen Datums wie folgt gebildet wird :

$$\underline{\underline{MJD := JD - 2'400000.5}} \quad (71a)$$

- Die in (71) aufgeführten Unterprogramme sind zusammen mit andern Unterprogrammen in einer Programmbibliothek mit dem Namen "ASTLIB" untergebracht . Diese Bibliothek wird ständig weiterentwickelt . Dokumentationen zu einzelnen Unterprogrammen sind auf Wunsch erhältlich .

## 2.3 NUMERISCHE INTEGRATION GEWÖHNLICHER DIFFERENTIAL- GLEICHUNGSSYSTEME

Die Diskussion im vorliegenden Kapitel ist auf die Probleme der Himmelsmechanik und der Satellitengeodäsie ausgerichtet : Es sind also Anfangs- resp. Randwertprobleme der Art (49) , (50a) resp. (50b) und (54) , (55a) resp. (55b) zu lösen . Das Primärgleichungssystem (49) ist dabei nicht linear , bei den Variationsgleichungssystemen (54) hingegen handelt es sich stets um lineare Systeme .

Weiter dürfen wir voraussetzen , dass die Elemente der Matrizen  $y^I(t) |$  und  $z_\ell^I(t) |$  ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  reellanalytische Funktionen der Zeit  $t$  in jedem betrachteten Intervall sind .

Numerische Integration - richtig verstanden - ist ein Teilgebiet der Approximationstheorie . Eine reelle Funktion in einem Intervall  $I$  approximieren , heisst aber nichts anderes , als sie in diesem Intervall durch eine andere Funktion ersetzen .

Bevor die Diskussion weitergeführt werden kann , müssen einige Bezeichnungen eingeführt werden :

$$I := [T_a, T_e] : \text{Intervall in welchem die Funktionen } y^I(t) | \text{ und } z_\ell^I(t) | \text{ approximiert werden sollen .} \quad (72a)$$

$$\tilde{y}^I(t) | : \text{Approximation von } y^I(t) | . \quad (72b)$$

$$\tilde{z}_\ell^I(t) | : \text{Approximation von } z_\ell^I(t) | , \ell=1,2,\dots,n_p \quad (72c)$$

( Das Intervall  $I$  haben wir uns vorzustellen als ( das kleinste ) Intervall , das alle Beobachtungszeiten  $t_j$  ,  $j=1,2,\dots,n_p$  enthält ( siehe Kommentar zu (17) ) ) .

Obwohl wir in Wirklichkeit immer die Funktionen  $y^I(t) |$  und  $z_\ell^I(t) |$  ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  approximieren müssen (  $I=1,2,\dots,I^*$  ) , wollen wir in diesem Kapitel 2.3 den Iterationsindex "I" zur Entlastung des Formalismus weglassen .

(72d)

Damit können wir die Problemstellung für das vorliegende Kapitel wie folgt fixieren :

Aufgabe 1 :

Gegeben :  $y|^{(n)} = f(t; y|, y|^{(1)}, \dots, y|^{(n-1)})|$  (73a)

oder kurz :

$$y|^{(n)} = f| \quad (73a)$$

(73)

und  $y(T_0)|^{(i)} = y_{0i}|$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  (73b)

oder  $y(T_i)| = y_{1i}|$  ,  $i=1,2,\dots,n$  (73c)

Gesucht :  $\tilde{y}(t)|$  , Approximation von  $y(t)|$  in  $I$  .

Aufgabe 2 : Für  $\ell=1,2,\dots,n_p$

Gegeben :  $z_\ell|^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) \cdot z_\ell|^{(i)} + \{f|\}_{P_\ell}$  (74a)

und  $z_\ell(T_0)|^{(i)} = z_{\ell 0i}|$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  (74b)

(74)

oder  $z_\ell(T_i)| = z_{\ell 1i}|$  ,  $i=1,2,\dots,n$  (74c)

Gesucht :  $\tilde{z}_\ell(t)|$  , Approximation von  $z_\ell(t)|$  in  $I$  .

Bemerkungen zu (73) , (74)

- Der wichtigste Unterschied zwischen (73) und (74) besteht darin , dass das Differentialgleichungssystem in (74) linear , in (73) im allgemeinen nicht-linear ist .
- Im Differentialgleichungssystem (73a) haben wir die Parameter  $s_i, i=1,2,\dots,n_2$  weggelassen ( vergleiche (12) oder (49) ) . Dies ist erlaubt , da diese Grössen bei der numerischen Integration gegeben sind .
- Die Anfangs- resp. Randwerte sind effektiv nach (55a,b) zu berechnen . Im vorliegenden Kapitel genügt uns aber die vereinfachte Schreibweise (74b,c) .
- Die Aufgabe (73) muss vor den Aufgaben (74) gelöst werden , da ja die Lösung von (73) zur Berechnung der Matrizen  $P_i$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  und  $\{f|\}_{P_\ell}$  benötigt wird .
- Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen setzen wir voraus .

Es ist klar , dass für die Funktionen  $\tilde{y}(t)|$  und  $\tilde{z}_\ell(t)|$  die verschiedensten Ansätze gemacht werden können . Normalerweise werden sie in der Approximationsrechnung als Linearkombinationen bekannter Basisfunktionen angesetzt :

$$\begin{aligned}
 t \in I : \tilde{y}(t)| &:= \sum_{i=0}^q \tilde{y}_i| \cdot v_i(t) \\
 \tilde{z}_\ell(t)| &:= \sum_{i=0}^{q'} \tilde{z}_{\ell i}| \cdot v_i(t) \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \\
 v_i(t) \quad , \quad i=0,1,\dots,q \quad (q') &\text{ sind die bekannten} \\
 &\text{Basisfunktionen , } q \text{ resp. } q' \text{ wird} \\
 &\text{Ordnung des Integrationsverfahrens} \quad (75) \\
 &\text{genannt .} \\
 \tilde{y}_i|, \tilde{z}_{\ell i}|, i=0,1,\dots,q \text{ resp. } q', \ell=1,2,\dots,n_p & \\
 &\text{sind die zu bestimmenden Koeffi-} \\
 &\text{zientenmatrizen mit } d \text{ Elementen} \\
 &\text{( vergleiche (10a) ) .}
 \end{aligned}$$

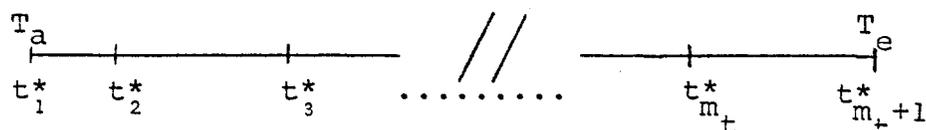
Bei Ansätzen dieser Art spricht man auch etwa von "expansion methods" {G. Hall, J.M. Watt , 1976} .

Es ist möglich , (75) in verschiedenen Punkten zu verallgemeinern . Beispielsweise könnte man  $q$  und/oder die Basisfunktionen für verschiedene Elemente der Lösungsmatrix  $y(t)|$  verschieden wählen . Von Verallgemeinerung solcher ( trivialer ) Art wollen wir in der vorliegenden Arbeit absehen . Hingegen wird es sich als günstig erweisen , bei "langen" Intervallen  $I$  den Ansatz (75) zu modifizieren :

Verallgemeinerung von (75)

1. Unterteilung des Intervalles  $I$  ( siehe (72a) ) :  
 Seien  $t_k^*$  ,  $k=1,2,\dots,m_t+1$  Teilpunkte von  $I$ ,  
 wobei  $t_1^*=T_a$  ,  $t_{m_t+1}^*=T_e$  ,  $t_{k_1}^* \neq t_{k_2}^*$  für  $k_1 \neq k_2$   
 ( siehe Figur 2 ) . (76a)

Figur 2



$$I_k := [t_k^*, t_{k+1}^*] \text{ nennen wir das } k\text{-te Teilintervall} \quad \left| \quad (76b) \right.$$

von  $I$  ,  $k=1,2,\dots,m_t$

2. Ansatz

$$\begin{aligned} \text{für } t \in I_k : \tilde{y}(t) | &:= \tilde{y}_k(t) | := \sum_{i=0}^q \tilde{y}_{ki} | \cdot v_{ki}(t) \\ \tilde{z}_\ell(t) | &:= \tilde{z}_{\ell k}(t) | := \sum_{i=0}^{q'} \tilde{z}_{\ell ki} | \cdot v_{ki}(t) \end{aligned} \quad \left| \quad (76c) \right.$$

$\ell=1,2,\dots,n_p$  ,  $k=1,2,\dots,m_t$

Die Teilpunkte  $t_k^*, k=1,2,\dots,m_{t+1}$  nehmen wir vorderhand als gegeben an ( siehe dazu Kapitel 2.3.4 ) .

Wahl der Basisfunktionen  $v_{ki}(t), i=0,1,\dots,q$  ,  $k=1,2,\dots,m_t$

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir ausschliesslich die folgenden Polynome :

$$v_{ki}(t) := (t - t_{k_0})^i , i=0,1,\dots,q , k=1,2,\dots,m_t \quad (76d)$$

$t_{k_0} \in I_k$

Unsere Aufgabe besteht also "nur noch" darin , die Koeffizientenmatrizen  $y_{ki} |, z_{\ell ki} |$  in (76c) mit Hilfe der Relationen (73) , (74) zu bestimmen .

Bevor wir diese Aufgabe in den folgenden Kapiteln lösen , einige

Bemerkungen zum Ansatz (76)

Für die Wahl (76d) der Basisfunktionen lassen sich verschiedene Gründe angeben . Zunächst zwei pragmatische Hinweise :

- Wir werden die Basisfunktionen zu differenzieren und zu integrieren haben ; beide Operationen sind bei Polynomen geradezu exemplarisch einfach .
- Bei den meisten Rechenanlagen ist die Berechnung von Potenzen eine sehr schnelle Rechenoperation . Für die Berechnung von Funktionswerten der Funktionen  $v_{ki}(t)$  wird also nicht viel Rechenzeit benötigt .

Wesentlich mehr Gewicht hat aber die Tatsache , dass der Polynomapproximation in der mathematischen Literatur sehr viel Platz eingeräumt wird , sodass man viele Resultate praktisch unverändert übernehmen kann .

- Erwähnenswert sind insbesondere zwei Sätze : Der Satz von Weierstrass ( siehe {I.P. Natanson,1977,S.119} ) und der Satz von Taylor ( siehe z.B. {F. Erwe,1973,S.143} ) .

Der Approximationssatz von Weierstrass besagt im wesentlichen , dass jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion dort im Sinne der gleichmässigen Approximation "beliebig gut" durch ein Polynom genügend hohen Grades approximiert werden kann .

Da die in der Himmelsmechanik und in der Satellitengeodäsie zu approximierenden Funktionen im allgemeinen nicht nur stetig , sondern sogar reell-analytisch im Intervall I ( siehe (72a) ) sind , wäre es nach diesem Satz möglich , alle unsere Parameterbestimmungsaufgaben mit dem Ansatz (75) und nicht mit dem aufwendigeren Ansatz (76) zu lösen . Versuche dieser Art wird man jedoch rasch einstellen , da bei langen Intervallen I die notwendigen Polynomgrade bald einmal so hoch werden , dass ein Beharren auf dem Ansatz (75) völlig unwirtschaftlich wird .

Viel fruchtbarer für unsere Zwecke ist der

Satz von Taylor : Ist eine Funktion  $u(t)$  in einem abgeschlossenen Intervall  $J$   $(q+1)$  mal stetig differenzierbar , so gilt für  $t \in J$  und  $t^* \in J$  :

$$u(t) = \sum_{i=0}^q \frac{1}{i!} \cdot u^{(i)}(t^*) \cdot (t-t^*)^i + R_q \quad (77)$$

Wobei das Restglied  $R_q$  nach Lagrange wie folgt dargestellt werden kann :

$$R_q = (t-t^*)^{q+1} / (q+1)! \cdot u^{(q+1)}(t^* + \xi \cdot (t-t^*))$$

mit  $0 < \xi < 1$

Mit Hilfe des Satzes von Taylor lassen sich die im vorliegenden Kapitel zu approximierenden Funktionen  $y(t)$  | und  $z_\ell(t)$  |  $\ell=1,2,\dots,n_p$  wie folgt darstellen :

In jedem Teilintervall  $I_k$ ,  $k=1,2,\dots,m_t$  gilt :

$$y(t)| = P_{kq}(t)| + \frac{(t-t_{k_0})^{q+1}}{(q+1)!} \cdot R_{kq}| \quad (78a)$$

$$z_\ell(t)| = P_{\ell k q'}(t)| + \frac{(t-t_{k_0})^{q'+1}}{(q'+1)!} \cdot R_{\ell k q'}|, \ell=1,2,\dots,n_p \quad (78b)$$

Wobei :

$$P_{kq}(t)| = \sum_{i=0}^q \frac{1}{i!} \cdot y(t_{k_0})| \cdot (t-t_{k_0})^i \quad (78c)$$

$$P_{\ell k q'}(t)| = \sum_{i=0}^{q'} \frac{1}{i!} \cdot z_\ell(t_{k_0})| \cdot (t-t_{k_0})^i, \ell=1,2,\dots,n_p \quad (78d)$$

$$(R_{kq}|)^T = (y_{,1}^{(q+1)}(\tau_{k1}), y_{,2}^{(q+1)}(\tau_{k2}), \dots, y_{,d}^{(q+1)}(\tau_{kd})) \quad (78e)$$

$$(R_{\ell k q'}|)^T = (z_{\ell,1}^{(q'+1)}(\tau'_{\ell k1}), \dots, z_{\ell,d}^{(q'+1)}(\tau'_{\ell kd})), \ell=1,2,\dots,n_p \quad (78f)$$

Dabei gilt nach dem Satz von Taylor in (78e) und (78f)

$$\left. \begin{aligned} |\tau_{kj} - t_{k_0}| &\leq |t - t_{k_0}|, j=1,2,\dots,d \\ |\tau'_{\ell kj} - t_{k_0}| &< |t - t'_{\ell k_0}|, j=1,2,\dots,d, \ell=1,2,\dots,n_p \end{aligned} \right\} \quad (78g)$$

Die Elemente der Matrizen  $R_{kq}|$ ,  $R_{\ell k q'}|$  (siehe (78e,f)) dürfen wie folgt abgeschätzt werden :

$$|R_{kq,j}| \leq \max_{t \in I_k} |y_{,j}^{(q+1)}(t)|, j=1,2,\dots,d \quad (78h)$$

$$|R_{\ell k q',j}| \leq \max_{t \in I_k} |z_{\ell,j}^{(q'+1)}(t)|, j=1,2,\dots,d, \ell=1,2,\dots,n_p \quad (78i)$$

Da nun die Elemente der  $P_{kq}(t)|$ ,  $P_{\ell k q'}(t)|$  unzweifelhaft Polynome sind (siehe (78c,d)), dürfen wir aus (78h,i) sowie (78a,b) den Schluss ziehen, dass sich die Funktionen  $y(t)|$  und  $z_\ell(t)|$ ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  stückweise beliebig gut durch Polynome vom Grad  $q \geq n$  resp.  $q' \geq n$  im Sinne der gleichmässigen Approximation darstellen lassen.

Dieser Aussage kommt die Bedeutung eines Existenzsatzes zu. Sie ist Rechtfertigung für die Ansätze (76c,d), sie ist aber selbst noch kein Ansatz zum Bestimmen der Koeffizienten in den Ansätzen (76c).

Damit ist zwar der Ansatz (76) begründet , und wir wissen , dass wir damit "im Prinzip" die exakten Lösungen der Aufgaben (73) und (74) mit jeder wünschbaren Genauigkeit gleichmässig approximieren können ( falls nur die Unterteilung des Intervalles I in (76a) fein genug gewählt wird ) , wir haben aber immer noch kein Rezept zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen  $\tilde{y}_{ki} | , i=0,1,\dots,q$  resp.  $\tilde{z}_{\ell ki} | , i=0,1,\dots,q' , \ell=1,2,\dots, n_p$  angegeben ( für alle Teilintervalle  $k=1,2,\dots,m_t$  ) .

Es verwundert sicher nicht , dass auch diese Aufgabe auf die verschiedensten Arten gelöst werden kann . Fest steht einzig und allein , dass man die mit (73a,b resp. c) und (74a,b resp. c) gegebene Information irgendwie verwenden müssen .

Bevor wir die Aufgaben (73) und (74) in voller Allgemeinheit lösen , sollen in den nächsten beiden Abschnitten die folgenden einfacheren Teilprobleme gelöst werden :

- a. Lokale Lösung von Anfangswertaufgaben
- b. Lösung von lokalen Randwertaufgaben

Zu a.

Unter dieser Bezeichnung wollen wir die Lösung der in (73) und (74) definierten Anfangswertprobleme in demjenigen Teilintervall  $I_{k'}$  ,  $k' \in \{1,2,\dots,m_t\}$  verstehen , in dem die Anfangsepoche  $T_0$  ( siehe (73b) ) liegt .

Zu b.

Unter einer lokalen Randwertaufgabe verstehen wir denjenigen Spezialfall der allgemeinen Aufgabe , bei der alle Zeiten  $T_i$  ,  $i=1,2,\dots,n$  ( siehe (73c) und (74c) ) in einem einzigen der in (76a) definierten Teilintervalle liegen .

Wir werden sehen , dass solche lokale Randwertprobleme weitgehend analog zu der lokalen Lösung der Anfangswertaufgabe behandelt werden können .

Lokalen Randwertproblemen werden wir z.B. in Kapitel 3 bei der Behandlung von Bahnbestimmungsaufgaben begegnen .

### 2.3.1 LOKALE LÖSUNG VON ANFANGSWERTPROBLEMEN

Wir nehmen an , dass gilt :

$$T_0 \quad I_{k'} , \quad k' \in \{1, 2, \dots, m_t\} \quad (79a)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir setzen ( siehe (76d) ) :

$$t_{k'_0} = T_0 \quad (79b)$$

Die Aufgabe besteht in diesem Kapitel darin , die Koeffizientenmatrizen der folgenden Polynome zu bestimmen :

$$\tilde{Y}_{k'}(t) | = \sum_{i=0}^q \tilde{Y}_{k',i} | \cdot (t-t_{k'_0})^i \quad (80a)$$

$$\tilde{z}_{\ell k'}(t) | = \sum_{i=0}^{q'} \tilde{z}_{\ell k',i} | \cdot (t-t_{k'_0})^i , \quad \ell=1, 2, \dots, n_p \quad (80b)$$

Zunächst benützen wir die Gleichungen (73b) resp. (74b) :

Wir verlangen , dass die approximierenden und die approximierten Funktionen denselben Anfangsbedingungen genügen . Mit dieser Forderung und mit (79b) und (73b) folgt :

$$\tilde{Y}_{k'}(t_{k'_0}) |^{(i)} = Y(t_{k'_0}) |^{(i)} = Y(T_0) |^{(i)} = Y_{0i} | , \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

Unter Berücksichtigung von (80a) folgt dann :

$$\tilde{Y}_{k',i} | = Y_{0i} | / i! , \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (81a)$$

und analog :

$$\tilde{z}_{\ell k',i} | = z_{\ell 0i} | / i! , \quad i=0, 1, \dots, n-1 , \quad \ell=1, 2, \dots, n_p \quad (81b)$$

Wie werden die übrigen Koeffizienten bestimmt ? Sicher werden wir in irgendeiner Form die Differentialgleichungssysteme (73a) und (74a) benützen müssen .

Wenden wir uns zunächst der ( lokalen ) Lösung der Aufgabe (73) zu . Dabei wollen wir - zur Erleichterung der Diskussion - vorerst eine Annahme treffen , von der wir wissen , dass sie sicher nicht erfüllt sein wird :

Annahme für die folgende Zwischenbetrachtung :

Die Elemente der Lösungsmatrix  $y(t) |$  der Aufgabe (73) seien Polynome vom Grad  $q$  . (82)

Zwischenbetrachtung

Ist (82) erfüllt, können wir erwarten, mit dem Ansatz (80a) sogar die exakte Lösung von (73) zu bestimmen, d.h. es wird gelten:

$$\tilde{y}_{k'}(t) | = y(t) | \text{ für alle Zeiten } t \quad (83a)$$

Polynome können auf die verschiedensten Arten eindeutig bestimmt werden. Wir erwähnen zuerst zwei in gewissem Sinne extreme Möglichkeiten \*) :

1. Wir fordern :

$$\tilde{y}_{k'}(t_{k_0'}) |^{(i)} := f(t_{k_0'}; \tilde{y}(t_{k_0'}) |, \dots, \tilde{y}(t_{k_0'}) |^{(n-1)}) |^{(i-n)} \quad (83b)$$


---

i=n, n+1, ..., q .

Damit folgen die Koeffizienten in (81a) :

$$\tilde{y}_{k',i} | = f(t_{k_0'}; \dots) |^{(i-n)} / i! \quad , i=n, n+1, \dots, q \quad (83c)$$


---

Mit (81a) und (83c) ist das Polynom (80a) eindeutig bestimmt. Die Schwierigkeit besteht allerdings darin, dass man - um die Polynomkoeffizienten nach (83c) berechnen zu können - die höheren Ableitungen der Funktion  $f(\dots) |$  an der Stelle  $t=t_{k_0'}$  irgendwie berechnen muss. Dem steht zwar prinzipiell nichts im Wege, die Ausdrücke für diese Ableitungen werden jedoch bald einmal sehr kompliziert. In einigen Spezialfällen gelingt es jedoch, die höheren Ableitungen von  $f(\dots) |$  rekursiv zu berechnen. Wir werden darauf kurz zu Beginn von Kapitel 2.3.1.1 zurückkommen.

Es sei aber noch bemerkt, dass man bei Parameterbestimmungsaufgaben die erste Ableitung von  $f(\dots) |$  ohne grosse Mühe berechnen kann :

$$f(t; \dots) |^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) \cdot y |^{(i+1)} + \{f | \}_t \quad (83d)$$


---

Die  $P_i(t), i=0, 1, \dots, n-1$  sind identisch mit den in (74a) figurierenden Matrizen; man muss also lediglich die partielle Ableitung von  $f |$  nach  $t$  neu berechnen.

---

\*) Die ersten  $n$  Koeffizienten sind immer nach (81a) definiert.

2. Anstelle von (83b) verlangen wir , dass  $\tilde{y}_k(t)$  das Differentialgleichungssystem (73a) an  $q+1-n$  verschiedenen Stellen exakt erfüllt . Wegen der Voraussetzung (82) ist mit (81a) und mit diesen Forderungen  $\tilde{y}_k(t)$  eindeutig bestimmt .

Es gelte :

$$\left. \begin{array}{l} t_{k,j}^+ \in I_k, \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad *) \\ \text{und} \\ t_{k,j_1}^+ \neq t_{k,j_2}^+, \quad \text{falls } j_1 \neq j_2 \end{array} \right| \quad (83e)$$

Man verlangt :

$$\underline{\tilde{y}_k(t_{k,j}^+) |^{(n)} = f(t_{k,j}^+; \tilde{y}_k(t_{k,j}^+), \dots) |}, \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad (83f)$$

Durch die Gleichungen (81a) und (83f) sind dieselben Funktionen definiert wie durch (81a) , (81b) .

Der Vorteil der Verwendung von (83f) anstatt (83b) liegt auf der Hand : Es müssen auf analytischem Wege keine Ableitungen der Funktionen  $f(\dots)$  berechnet werden . Dafür folgen die Polynomkoeffizienten hier nicht so einfach wie in (83c) :

Setzt man den Ansatz (80a) in (83f) ein , ist das so entstehende Gleichungssystem nicht linear in den Koeffizientenmatrizen  $\tilde{y}_{k,i}$  ,  $i=n,n+1,\dots,q$  , falls die Funktion  $f(\dots)$  nicht linear in den  $y^{(i)}$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  ist . Nicht lineare Gleichungssysteme sind aber im allgemeinen iterativ zu lösen .

Bei der durch (83f) definierten "Integrationsmethode" liegt im Gegensatz zur Methode (83b) das Schwergewicht auf der numerischen und nicht auf der analytischen Rechenarbeit .

3. "Zwischen" den beiden Methoden (81b) , (81f) zur Berechnung der Koeffizientenmatrizen  $\tilde{y}_{k,i}$  ,  $i=1,2,\dots,q+1-n$  gibt es beliebig viele Varianten , von denen nur noch eine erwähnt werden soll , da sie - gerade bei Parameterbestimmungsaufgaben - beim Lösen der Aufgabe (73) nützlich sein kann .

Wir nehmen an , dass gilt :

$$\underline{q+1-n = 2 \cdot q^*}, \quad q^* \text{ sei positiv und ganz} \quad (83g)$$

\*) Die Beschränkung auf das Intervall  $I_k$  , wäre hier nicht nötig . Sie wird nötig , wenn die Annahme (82) wegfällt .

Man verlangt jetzt :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_{k,j}^*) |^{(n)} &= f(t_{k,j}^*; \tilde{y}_{k'}(t_{k,j}^*) |, \dots) | \\ \tilde{y}(t_{k,j}^*) |^{(n+1)} &= f(t_{k,j}^*; \tilde{y}_{k'}(t_{k,j}^*) |, \dots) |^{(1)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| j=1, 2, \dots, q^* \quad (83h)$$

Dabei müssen wir verlangen , dass die  $t_{k,j}^*, j=1, 2, \dots, q^*$  voneinander verschiedene Zeitpunkte des Intervalles  $I_{k'}$  sind ( analog zu (83e) ) .

Schliessen wir diese Zwischenbetrachtung ab mit der Frage : Was geschieht , wenn wir die Voraussetzung (82) fallen lassen , die approximierenden Funktionen aber trotzdem durch (83c) oder (83f) oder (83h) oder ... und (81a) definieren ?

Die Antwort ist einfach :

Die mit (81a) und (83b) resp. (83f) resp. (83h) resp. ... definierten Funktionen stimmen für  $t \in I_{k'}$  nur noch bis auf Terme der Ordnung  $q+1$  in  $(t_{k'+1}^* - t_{k'}^*)$  mit der exakten Lösung überein . Wir bringen dies durch die folgende Schreibweise zum Ausdruck :

$$\begin{aligned} \text{Sei } H_{k'} &:= t_{k'+1}^* - t_{k'}^* \\ \text{Dann gilt für } t \in I_{k'} &: \\ \tilde{y}_{k'}(t) |^{(i)} &= y(t) |^{(i)} + O(H_{k'}^{q+1-i}) | , i=0, 1, \dots, q \end{aligned} \quad (84)$$

Dabei ist  $\tilde{y}_{k'}(t) |$  die nach einer der Methoden (83b) , ... berechnete Approximationsfunktion .

Anmerkung : Bei Weglassen der Voraussetzung (82) stimmen natürlich die nach (83b) , (83f) , ... bestimmten Funktionen auch untereinander nur noch bis auf Terme der Ordnung  $q+1$  in  $H_{k'}$  miteinander überein . Streng genommen sollte man diese Tatsache in der Schreibweise zum Ausdruck bringen . Um den Formalismus nicht noch mehr zu belasten , verzichten wir auf solche Unterscheidungen .

Wir verzichten darauf , (84) explizite zu beweisen . Der Hinweis , dass der Beweis schulmässig mit Hilfe von (78a) erfolgt , soll genügen .

Alle Ueberlegungen , die wir auf den vorangegangenen Seiten zur Lösung der Anfangswertaufgabe (73) angestellt haben , können sinngemäss auf die Lösung der Aufgaben (74) übertragen werden . Bemerkenswert ist immerhin die Tatsache , dass die (83f) entsprechenden Gleichungssysteme linear sind . Wir werden dies dies in Kapitel 2.3.1.2 ausnützen .

Bevor wir in den Kapiteln 2.3.1.1 resp. 2.3.1.2 Algorithmen zur Lösung der lokalen Anfangswertaufgabe für nicht-lineare resp. lineare Differentialgleichungssysteme entwickeln , wollen wir eine vorläufige Klassifikation der Integrationsmethoden ( zur Lösung lokaler Anfangswertaufgaben ) angeben :

#### Integrationsmethode 1

Die Polynomkoeffizienten werden nach (83b) berechnet . Man spricht bei Verfahren dieser Art auch etwa von expliziten Taylorreihen - Verfahren , da die resultierenden Polynome effektiv identisch sind mit den nach den Termen  $q$ - ( resp.  $q'$ -)ter Ordnung abgebrochenen Taylorreihen .

#### Integrationsmethode 2

Die Polynomkoeffizienten sind Lösungen von Gleichungssystemen der Art (83f) . In dieser Lösungsmethode sind - im Kern - die klassischen ( sogenannt stark-stabilen ) "Vielschrittmethoden" enthalten . (85)

#### Integrationsmethode 3

Die Koeffizienten sind nach (83h) definiert .

### 2.3.1.1 DIE LOKALE LÖSUNG DER NICHT-LINEAREN ANFANGS- WERTAUFGABE

In diesem Abschnitt haben wir uns nur noch mit der Lösung der drei die Integrationsverfahren (85) definierenden algebraischen Gleichungssysteme (83b), (83f) und (83h) zu befassen :

Methode 1 : Gleichungssystem (83b)

Die explizite analytische Berechnung der Ableitungen der Funktion  $f(t; y|, y|^{(1)}, \dots, y|^{(n-1)})$  nach der Zeit  $t$  ist "im Prinzip" unproblematisch . In der Praxis werden jedoch die Ausdrücke für die höheren Ableitungen von  $f(\dots)$  bald einmal so kompliziert , dass man - im allgemeinen - diese Methode sehr rasch verlassen wird .

Für einige spezielle Anfangswertaufgaben der Himmelsmechanik wurden aber in letzter Zeit rekursive Methoden zur Lösung der Gleichungen (83b) angegeben , die sich sehr gut zur Programmierung eignen .

Wir wollen das Prinzip anhand eines einfachen Beispiels illustrieren . Das Beispiel wurde {A.E. Roy, p.106f, 1978} entnommen :

Beispiel 4 : Numerische Integration des Einkörperproblems mit Taylorreihen

Unter Vernachlässigung der Planetenstörungen lautet das Differentialgleichungssystem für den heliozentrischen Ortsvektor eines Himmelskörpers vernachlässigbarer Masse ( siehe Kapitel 3.4.2 ) :

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{B4.1})$$

In (B4.1) ist  $k$  die Gauss'sche Konstante ( siehe (154b) ) ,  $\vec{r}$  ist der Ortsvektor ,  $r$  der Betrag des Ortsvektor des Himmelskörpers .

Weiter gelte :

$$\vec{r}(T_0)^{(i)} = \vec{r}_{0i} \quad , \quad i=0,1 \quad (\text{B4.2})$$

Als nächstes definiert man vier Hilfsfunktionen :

$$u = k^2 \cdot r^{-3} \quad , \quad w = r^{-2} \quad , \quad \sigma = w \cdot s \quad , \quad s = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{B4.3})$$

Diese Hilfsfunktionen und die Funktion  $r(t)$  werden in Reihen entwickelt :

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{r}_{0i} \cdot (t-T_0)^i \quad , \quad u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \cdot (t-T_0)^i \quad , \quad \dots \quad , \quad \sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \cdot (t-T_0)^i \quad (\text{B4.4})$$

Mit (B4.2) berechnet man zunächst  $u_0$  ,  $w_0$  ,  $\sigma_0$  und  $s_0$  . Sodann leitet man für die Hilfsgrößen die folgenden Differentialgleichungen her :

$$\underline{u^{(1)}} = -3 \cdot u \cdot \sigma, \quad \underline{w^{(1)}} = -2 \cdot u \cdot \sigma \quad (\text{B4.5a})$$

Zudem gilt ( siehe B4.1) und (B4.3) ) :

$$\underline{\vec{r}^{(2)}} = -\underline{\vec{r}} \cdot u, \quad \underline{s} = \underline{\vec{r}} \cdot \underline{\vec{r}^{(1)}} \quad \text{sowie} \quad \underline{\sigma} = w \cdot s \quad (\text{B4.5b})$$

Setzt man die Reihenentwicklungen (B4.4) in (B4.5a,b) ein, folgen für die Koeffizienten in (B4.4) einfache Rekursionsformeln. Das Resultat, das wir nicht angeben wollen, findet man auf Seite 107 von {A.E. Roy, 1978}.

Die Wahl (B4.3) der Hilfsgrößen ist keineswegs eindeutig; wichtig ist lediglich, dass sie auf den rechten Seiten der Gleichungen (B4.5a,b) (höchstens) quadratisch auftreten.

Auf analoge Weise können Rekursionsformeln für schwierigere Aufgaben (z.B. Mehrkörperprobleme) gewonnen werden, die Formeln werden jedoch sehr komplex. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit machen wir von der Integrationsmethode 1 keinen Gebrauch.

#### Methode 2 : Gleichungssystem (83f)

Durch Einsetzen des Ansatzes (80a) in (83f) erhält man ein nicht-lineares Gleichungssystem, das im allgemeinen iterativ gelöst werden muss.

Wir unterscheiden zwei Methoden :

##### Methode 2.1

Die Gleichungen (83f) werden schulmässig linearisiert.

Dadurch wird - wie bei jeder Linearisierung - ein Iterationsprozess induziert, bei welchem die Unbekannten sukzessive bestimmt resp. verbessert werden. Jeder Iterationsprozess muss initialisiert und abgebrochen werden; d.h. es müssen erste Näherungswerte für die zu bestimmenden Unbekannten angegeben werden, und man muss entscheiden, wann eine Fortsetzung der Iterationsprozesses nicht mehr nötig/sinnvoll ist. Um beide Punkte (Initialisieren/Abbrechen) wollen wir uns vorerst nicht kümmern, und nur einen Iterationsschritt untersuchen.

Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein :

$$J := 1, 2, \dots, J^* : \text{Nummern der Iterationsschritte} \quad (86a)$$

$$\tilde{y}_{k,i}^J(t) | = \sum_{i=0}^q \tilde{y}_{k,i}^J | \cdot (t - t_{k_0})^i \quad (86b)$$

: Beim J-ten Iterationsschritt bekannte Näherung für  $\tilde{y}_{k,i}(t) |$ .

Wegen (81a) folgt zunächst :

$$\tilde{y}_{k,i}^J = y_{0i} / i! \quad , \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (86c)$$

Weiter sei :

$$f_{k'}^J(t) := f(t; \tilde{y}_{k'}^J(t), \dots) \quad , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (86d)$$

Insbesondere soll gelten :

$$f_{k',j}^J := f_{k'}^J(t_{k',j}^+) \quad , \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (86e)$$

Weiter gelte in Analogie zu (54a) :

$$\begin{array}{l} P_{\ell}^J(t), \ell=0,1,\dots,n-1 : d \times d - \text{Matrizen deren Elemen-} \\ \text{te wie folgt definiert sind :} \\ P_{\ell,ik}^J(t) := \{ f_{k',i}^J(t) \}_{y_k}^{J(\ell)} \quad , \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,d \\ k=1,2,\dots,d \\ \ell=0,1,\dots,n-1 \end{array} \end{array} \quad (86f)$$

Insbesondere sei :

$$P_{\ell j}^J := P_{\ell}^J(t_{k',j}^+) \quad , \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad , \quad \ell=0,1,\dots,n-1 \quad (86g)$$

Schliesslich und endlich setzen wir :

$$\Delta t_{k',j} := t_{k',j}^+ - t_{k'_0} \quad , \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad (86h)$$

Damit endlich zur Linearisierung der Gleichungen (83f) :

Da die linken Seiten schon linear in den Unbekannten sind ,  
haben wir lediglich die Funktionen  $f(\dots)$  in (83f) zu linearisieren .  
Dazu entwickeln wir  $f(\dots)$  in eine Taylorreihe :

$$\begin{aligned} f(t_{k',j}^+; \tilde{y}_{k',j}^+(t_{k',j}^+), \dots) &= f_{k',j}^J + \\ &+ \sum_{\ell=0}^{n-1} P_{\ell j}^J \cdot ( \tilde{y}_{k',j}^+(t_{k',j}^+) |^{(\ell)} - \tilde{y}_{k',j}^J(t_{k',j}^+) |^{(\ell)} ) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

---


$$j=1,2,\dots,q+1-n \quad (87)$$

Wir müssen jetzt (87) in (83f) einsetzen und in dem so entstehenden Gleichungssystem die  $\tilde{y}_{k'}^J(\dots) |^{(i)}$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  nach (80a) ersetzen .

Das resultierende Gleichungssystem kann wie folgt geschrieben werden :

$$\sum_{i=n}^q L_{k',ji}^J \cdot \tilde{Y}_{k',i}^J = g_{k',j}^J + \dots, \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad (88)$$

$J=1,2,\dots,J^*$

Wobei für  $i=n,n+1,\dots,q$ ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  :

$$L_{k',ji}^J = \left( \frac{i!}{(i-n)!} \cdot E - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{i!}{(i-\ell)!} \cdot \Delta t_{k',j}^{n-\ell} \cdot P_{\ell j}^J \right) \cdot \Delta t_{k',j}^{i-n} \quad (88a)$$

$$g_{k',j}^J = f_{k',j}^J - \sum_{\ell=0}^{n-1} P_{\ell j}^J \cdot \sum_{i=n}^q \frac{i!}{(i-\ell)!} \cdot \Delta t_{k',j}^{i-\ell} \cdot \tilde{Y}_{k',i}^J \quad (88b)$$

( In (88a) ist  $E$  eine  $d \times d$  - Einheitsmatrix ) .

(88) wird durch Vernachlässigung der Terme " +... " linearisiert . Die Lösungen von (88) und die Lösungen des (88) zugeordneten linearisierten Systems müssen verschieden bezeichnet werden . Es ist naheliegend , die Lösungen des linearisierten Systems als  $\tilde{Y}_{k',i}^{J+1}$  ,  $i=n,n+1,\dots,q$  zu schreiben :

$$\sum_{i=n}^q L_{k',ji}^J \cdot \tilde{Y}_{k',i}^{J+1} = g_{k',j}^J, \quad j=1,2,\dots,q+1-n \quad (89)$$

$J=1,2,\dots,J^*$

Setzt man noch

$$\tilde{Y}_{k'}^{J+1} := ( \tilde{Y}_{k',n}^{J+1}, \tilde{Y}_{k',n+1}^{J+1}, \dots, \tilde{Y}_{k',q}^{J+1} ) , \quad *) \quad (89a)$$

$$L_{k'}^J := \begin{bmatrix} L_{k',1,n}^J & , & L_{k',1,n+1}^J & , & \dots & , & L_{k',1,q}^J \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ L_{k',q+1-n,n}^J & , & \dots & , & L_{k',q+1-n,q}^J \end{bmatrix} , \quad (89b)$$

sowie

$$g_{k'}^J := ( g_{k',1}^J, g_{k',2}^J, \dots, g_{k',q+1-n}^J ) , \quad *) \quad (89c)$$

kann (89) einfacher

wie folgt ausgedrückt werden :

$$\underline{L_{k'}^J \cdot \tilde{Y}_{k'}^{J+1}} = \underline{g_{k'}^J} , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (90)$$

Mit (90) ist ein Iterationsschritt des Integrationsverfahrens 2.1 hinreichend charakterisiert .

\*)  $(\underline{a}, \underline{b}, \dots) := (a_1, a_2, \dots, a_d, b_1, b_2, \dots, b_d, \dots)$

Methode 2.2

Diese Methode folgt aus der Methode 2.1., wenn man in (88) zusätzlich zu allen Termen "+ ..." alle Summanden, die die Matrizen  $P_{\ell j}^J$ ,  $\ell=0,1,\dots,n-1$ ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  enthalten, weglässt. An Stelle von (89) erhält man so das formal viel einfachere Gleichungssystem

$$\sum_{i=n}^q \frac{i!}{(i-n)!} \cdot \Delta t_{k'j}^{i-n} \cdot \tilde{y}_{k'i}^J = f_{k'j}^J, \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,q+1-n \\ J=1,2,\dots,J^* \end{matrix} \quad (91)$$

Die Vorteile von (91) gegenüber (89) liegen auf der Hand :

- Es ist nicht nötig, die Matrizen  $P_{\ell j}^J$  zu berechnen.
- (91) besteht effektiv aus  $d$  voneinander getrennten Gleichungssystemen der Dimension  $q+1-n$  (siehe weiter unten). Damit benötigt (91) wesentlich weniger Speicherplatz als (89) resp. (90).

Die Nachteile sollten aber nicht übersehen werden :

- Die nach (91) bei einem bestimmten Iterationsschritt berechneten neuen Näherungswerte für die Koeffizienten  $\tilde{y}_{k'i}^{J+1}$ ,  $i=n,n+1,\dots,q$  stimmen nur bis auf Terme der Ordnung  $O(H_{k'})$  mit den nach (89) bestimmten neuen Koeffizienten überein<sup>\*)</sup>. Die Zahl der Iterationsschritte bei Verwendung von (91) wird also wesentlich höher als bei Verwendung von (89) sein.
- Ist  $H_{k'}$  zu gross, wird unter Umständen der durch (91) definierte Iterationsprozess nicht mehr konvergieren.

Wir führen die zur Programmierung geeignete Matrix-Schreibweise für das System (91) ein :

$$\underline{M_{k'} \cdot \tilde{Y}_{k'}^{J+1}} = F_{k'}^J \quad (92)$$

In (92) sind  $\tilde{Y}_{k'}^{J+1}$ ,  $F_{k'}^J$  Matrizen mit  $q+1-n$  Zeilen und  $d$  (siehe (10a)) Kolonnen. Die  $i$ -te Zeile von  $\tilde{Y}_{k'}^{J+1}$  ist identisch mit der Zeilenmatrix  $\tilde{y}_{k'i-1+n}^{J+1}$  (siehe (86b)), die  $j$ -te Zeile von  $F_{k'}^J$  ist identisch mit  $f_{k'j}^J$  (siehe (86e)),  $i=n,n+1,\dots,q$ ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$ .

\*) Vorausgesetzt, man geht in (89), (91) von der gleichen Näherung aus.

$M_k$  ist eine  $(q+1-n) \times (q+1-n)$  - Matrix , deren Elemente wie folgt definiert sind :

$$M_{k',jk} := \frac{(k-1+n)!}{(k-1)!} \cdot \Delta t_{k',j}^{k-1}, \quad \begin{matrix} k=1,2,\dots,q+1-n \\ j=1,2,\dots,q+1-n \end{matrix} \quad (92b)$$

Mit den Gleichungen (92) , (92a,b) ist auch ein Iterationsschritt der Methode 2.2 in ausreichender Weise charakterisiert .

Methode 3

Durch Einsetzen des Ansatzes (80a) in (83h) erhält man ein nicht lineares Gleichungssystem , das im allgemeinen iterativ gelöst werden muss .

Genau wie bei der Methode 2 unterscheiden wir auch hier zwei Verfahren , die analog zu 2.1 und 2.2 definiert sind :

Methode 3.1

Die Gleichungen (83h) müssen schulmässig linearisiert werden . Die Linearisierung der Gleichungen (83h)<sub>1</sub> unterscheidet sich "im Prinzip" durch nichts von der Linearisierung der Gleichungen (83f) , sodass (89) unverändert übernommen werden kann , wenn man nur  $(q+1-n)$  durch  $q^*$  ersetzt , und an Stelle von  $\Delta t_{k',j}$  die  $\Delta t_{k',j}^* := t_{k',j}^* - t_{k_0}$  ,  $j=1,2,\dots,q^*$  verwendet .

Schwieriger gestaltet sich die Linearisierung der Gleichungen (83h)<sub>2</sub> : Zuerst sind die rechten Seiten dieser Gleichungen nach (83d) zu ersetzen , anschliessend sind die so entstandenen Funktionen schulmässig zu linearisieren .

Aus verständlichen Gründen verzichten wir darauf , explizite Formeln für die Methode 3.1 anzugeben !

Methode 3.2

In Analogie zur Methode 2.2 ( siehe (91) ) setzt man :

$$\sum_{i=n}^q \frac{i!}{(i-n)!} \cdot (\Delta t_{k',j}^*)^{i-n} \cdot \tilde{y}_{k',i}^{J+1} = f_{k',j}^J, \quad j=1,2,\dots,q^* \quad (93)_1$$

und

$$\sum_{i=n+1}^q \frac{i!}{(i-n-1)!} \cdot (\Delta t_{k',j}^*)^{i-n-1} \cdot \tilde{Y}_{k',i}^{J+1} = f_{k',j}^J |^{(1)}, j=1,2,\dots,q^* \quad (93)_2$$

Die Vektoren  $f_{k',j}^J |^{(1)}$  sind nach (83d) mit den Argumenten  $t_{k',j}^*, Y_{k',i}^J |^{(i)}$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  zu berechnen.

Genau wie bei der Methode 2.2 können wir auch hier eine zur Programmierung geeignete Matrizenschreibweise für das System (93) angeben :

$$\underline{\underline{M'_{k'}}} \cdot \tilde{Y}_{k'}^{J+1} = \underline{\underline{F'_{k'}^J}}, \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (94)$$

$\tilde{Y}_{k'}^{J+1}$  ist nach (92a) definiert. Die beiden übrigen Matrizen haben die folgende Bedeutung :

$$F'_{k'}^J = \begin{bmatrix} f_{k',1}^J \\ f_{k',1}^{J(1)} \\ \hline f_{k',2}^J \\ f_{k',2}^{J(1)} \\ \vdots \\ f_{k',q^*}^J \\ f_{k',q^*}^{J(1)} \end{bmatrix} \quad (94a)$$

Die Matrix  $M'_{k'}$  ist eine  $(2 \cdot q^*) \times (2 \cdot q^*)$  - Matrix, deren Elemente durch die folgenden Beziehungen gegeben sind :

$$\begin{aligned} M'_{k',jk} &:= \frac{(k-1+n)!}{(k-1)!} \cdot (\Delta t_{k',j}^*)^{k-1}, \quad j=1,3,5,\dots,2 \cdot q^*-1 \\ &\quad k=1,2,\dots,2 \cdot q^* \\ M'_{k',jk} &:= \frac{(k-1+n)!}{(k-2)!} \cdot (\Delta t_{k',j}^*)^{k-2}, \quad j=2,4,6,\dots,2 \cdot q^* \\ &\quad k=2,3,\dots,2 \cdot q^* \\ M'_{k',j1} &:= 0, \quad j=2,4,6,\dots,2 \cdot q^*, \quad k=1 \end{aligned} \quad (94b)$$

Damit ist auch ein Iterationsschritt der Methode 3.2 definiert.

Erwähnenswert ist die Tatsache, dass die Matrix  $M'_{k'}$ , - genau wie übrigens auch die Matrix  $M_{k'}$  in (92) - unabhängig vom Index J ist.

Die die Methoden 2.1 , 2.2 , 3.1 und 3.2 charakterisierenden Iterationsprozesse müssen initialisiert und abgebrochen werden . Die Initialisierung ist für alle Methoden identisch :

Initialisierung :  $J := 1$  , Definition von  $y_{k'}^J(t)$  |

Aus (86c) folgt zunächst :

$$\underline{\tilde{y}_{k',i}^J} = y_{0i} / i! , \quad i=0,1,\dots,n-1 , \quad J=1 \quad (95a)$$

Wegen (73a) gilt weiter :

$$\underline{\tilde{y}_{k',n}^J} = f(t_{k_0}; y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0n-1}) / n! \quad (95b)$$

Da bei Parameterbestimmungsproblemen die Matrizen  $P_\ell(t_{k_0})$  meistens sowieso berechnet werden müssen , kann man noch die nächste Koeffizientenmatrix berechnen :

$$\underline{\tilde{y}_{k',n+1}^J} = f(t_{k_0}; y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0n-1})^{(1)} / (n+1)! , J=1 \quad (95c)$$

Die übrigen Koeffizientenmatrizen werden gleich Null gesetzt :

$$\underline{\tilde{y}_{k',i}^J} = 0 | , \quad i=n+2,n+3,\dots,q , \quad J=1 \quad (95d)$$

Wird (95c) nicht berechnet , wird auch für  $i=n+1$  (95d) verwendet .

### Abbruchkriterien

Die Integrationsmethoden 2.1 , 2.2 , 3.1 und 3.2 beruhen auf der Linearisierung der zugrundeliegenden nicht-linearen Gleichungssysteme (83f) resp. (83h) . Damit ist eigentlich schon gesagt , wie die Abbruchkriterien beschaffen sein müssen :

Man hat nämlich bei jedem Iterationsschritt zum Schluss zu prüfen , ob die Beträge der bei der Linearisierung vernachlässigten Terme alle kleiner als eine vom Programm benutzer zu definierende Toleranz  $\epsilon$  sind \*) .

Bei der Methode 2.1 berechnet man diese Terme nach (87) durch :

---

\*) Statt dessen könnte man auch Kriterien für die relativen Fehler angeben ( siehe {G. Beutler, 1982, p.158} ) .

$$\zeta_j^J := f_{k',j}^J + \sum_{\ell=0}^{n-1} P_{\ell j}^J \cdot (\tilde{y}_{k'}^{J+1}(t_{k',j}^+) |^{(\ell)} - \tilde{y}_{k'}^J(t_{k',j}^+) |^{(\ell)}) - f_{k',j}^{J+1}$$

Wegen (86c) kann man mit (88b) die  $\zeta_j^J$  auch wie folgt schreiben :

$$\zeta_j^J = g_{k',j}^J - f_{k',j}^{J+1} + \sum_{\ell=0}^{n-1} P_{\ell j}^J \cdot \sum_{i=n}^q \frac{i!}{(i-\ell)!} \cdot \Delta t_{k',j}^{i-\ell} \cdot \tilde{y}_{k',i}^{J+1} \quad (96a)$$

$$j=1, 2, \dots, q+1-n$$

Aehnliche Formeln leitet man für die Methode 3.1 ab .

Bei den Methoden 2.2 resp. 3.2 sind die vernachlässigten Terme identisch mit den Elementen der folgenden Matrizen :

$$\Delta F_{k'}^J := F_{k'}^{J+1} - F_{k'}^J \quad (\text{Methode 2.2 , siehe (92) )} \quad (96b)$$

$$\Delta F'_{k',J} := F'_{k',J+1} - F'_{k',J} \quad (\text{Methode 3.2 , siehe (94) )} \quad (96c)$$

Fassen wir zusammen :

Abbruchkriterien

$J^* = J$  und  $\tilde{y}_{k'}(t) = \tilde{y}_{k'}^{J^*+1}(t)$  , falls

bei Methode 2.1

$$|\zeta_{j,i}^J| < \varepsilon \quad , \quad j=1, 2, \dots, q+1-n \quad , \quad i=1, 2, \dots, d \quad (97a)$$

bei Methode 2.2

$$|\Delta F_{k',ji}^J| < \varepsilon \quad , \quad j=1, 2, \dots, q+1-n \quad , \quad i=1, 2, \dots, d \quad (97b)$$

bei Methode 3.2

$$|\Delta F'_{k',ji}^J| < \varepsilon \quad , \quad j=1, 2, \dots, q+1-n \quad , \quad i=1, 2, \dots, d \quad (97c)$$

Kommentare zu (97)

- Die Abbruchkriterien (97b,c) sind ausgezeichnet zur Programmierung geeignet , da die Matrizen  $F_{k'}^{J+1}, F'_{k',J+1}$  , die ja in (97b,c) gebraucht werden , sowieso beim nächsten Iterationsschritt berechnet werden müssen .
- Die Verwendung des Kriteriums (97a) bedingt die Speicherung vieler Hilfsgrößen ; das Kriterium ist somit nicht sonderlich zur Programmierung geeignet . Häufig wendet man daher

gegenüber (97a) modifizierte Kriterien an , bei denen nur eine der Matrizen  $\zeta_j$  ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  gemäss (97a) untersucht wird . So ist es möglich , die zusätzlich erforderliche Rechenzeit sowie den zusätzlich benötigten Speicherplatz in Grenzen zu halten ( siehe auch Beispiel 5 ) .

- Die Wahl von  $\epsilon$  ist problemabhängig . Auch auf diesen Punkt werden wir in Beispiel 5 eingehen müssen .

Die Zeitpunkte  $t_{k',j}^+$  resp.  $t_{k',j}^*$  ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  resp.  $q^*$

Bislang haben wir nur verlangt , dass die Punkte  $t_{k',j}^+$  voneinander verschiedene Punkte des Intervalles  $I_k$  sein sollen ( gleiches gilt sinngemäss für die Punkte  $t_{k',j}^*$  , siehe (83e) und (83h) ) .

Es wäre eine reizvolle Aufgabe , die Genauigkeit der Lösungen in Abhängigkeit von der Punktwahl zu untersuchen . In der vorliegenden Arbeit würde uns dies jedoch allzu weit vom eigentlichen Thema abbringen ; wir beschränken uns daher auf die nächstliegende Möglichkeit , werden jedoch die Integrationsalgorithmen so gestalten , dass ohne Mühe auch andere Sätze von  $t_{k',j}^+$  ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  resp.  $t_{k',j}^*$  ,  $j=1,2,\dots,q^*$  verwendet werden können .

Es gelte :

$$\underline{t_{k',j}^+ := t_{k'}^* + \frac{j-1}{q-n} \cdot H_{k'}} \quad \text{resp.} \quad \underline{t_{k',j}^* := t_{k'}^* + \frac{j-1}{q^*-1} \cdot H_{k'}} \quad (98)$$

$j = 1, 2, \dots, q+1-n$                        $j = 1, 2, \dots, q^*$

Nach (84) ist dabei  $H_{k'} = (t_{k'+1}^* - t_{k'}^*)$  die Länge des Intervalles  $I_{k'}$  ,  $t_{k'}^*$  ist die untere Grenze des Intervalles .

Im folgenden Beispiel 5 werden die Integrationsmethoden 2.1 , 2.2 und 3.2 zur Lösung des Einkörperproblems verwendet .

Die Integrationsalgorithmen sollen dabei als FORTRAN-Unterprogramme formuliert werden , mit denen man Anfangswertprobleme der folgenden Art lösen kann :

$$\underline{y^{(2)} = f(t; y)} \quad | \quad \underline{y(T_0)^{(i)} = y_{0i}} \quad | \quad i=0,1 \quad (99)$$

Die Programm - Modifikationen für allgemeinere Systeme (73a)

sind rein technischer Natur und können dem Leser überlassen werden .

Beispiel 5 : Lokale Lösung des Einkörperproblems als Anfangswertaufgabe mit den Integrationsmethoden 2.1 , 2.2 , 3.2

Aufgabe :

$$\begin{aligned} \text{Gegeben : } \vec{r}^{(2)} &= -k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{r}^{(i)}(T_0) &= \vec{r}_{0i}, \quad i=0,1 \\ T_c &= t_{k_0} := 0 \\ k &= .01720209895 \\ &\text{(Gauss'sche Konstante)} \end{aligned} \quad (B5.1a)$$

$$\text{Es sei : } M = \max_{\substack{i=1,2,3 \\ t \in I_k}} |r_i(t) - \tilde{r}_i(t)| \quad (B5.1b)$$

Wobei :  $\tilde{r}(t)$ : Approximierende Funktion , (B5.1c)  
 $\tilde{r}_i(t)$ : deren i-te Komponente

Da sich die Bewegung in der von den Vektoren  $\vec{r}_{00}$  und  $\vec{r}_{01}$  aufgespannten Ebene abspielen wird , darf man ansetzen : (B5.1)

$$\vec{r}(t) := y_1(t) \cdot \vec{r}_{00} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{01} \quad (B5.1d)$$

$$\tilde{\vec{r}}(t) := \tilde{y}_1(t) \cdot \vec{r}_{00} + \tilde{y}_2(t) \cdot \vec{r}_{01} \quad (B5.1e)$$

Durch Einsetzen von (B5.1d) in (B5.1a) folgt :

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= -k^2 \cdot y / r^3, \quad r = (s_1 \cdot y_1^2 + s_2 \cdot y_2^2 + 2 \cdot s_3 \cdot y_1 \cdot y_2)^{1/2} \\ s_1 &= \vec{r}_{00}^2, \quad s_2 = \vec{r}_{01}^2, \quad s_3 = \vec{r}_{00} \cdot \vec{r}_{01} \end{aligned} \quad (B5.1f)$$

$$\text{Wobei : } y(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y(0)^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (B5.1g)$$

Für  $\tilde{y}(t)$  | setze man :

$$\tilde{y}(t) := \tilde{y}_{k,i}(t) := \sum_{i=0}^q \tilde{y}_{k,i} \cdot (t - t_{k_0})^i \quad (B5.1h)$$

Gesucht : Eine Tabelle , die die Maxima (B5.1b) für  $q = 5,7,9$  , die Methoden 2.1 , 2.2 und 3.2 für die Intervalle  $I_{k,i} = [-20\text{Tage}, +20\text{Tage}] , [-40,40] , [-60,60]$  enthält .

Die Vektoren  $\vec{r}_{0i}, i=0,1$  sind so zu wählen , dass sie elliptischen Bahnen mit Exzentrizitäten  $e=0, .2, .4, .6$  und  $e=0.8$  , mit Halbachse  $a=2.7$  A.E. entsprechen .  $T_0$  sei einmal gleich der Periheldurchgangszeit , einmal gleich der Apheldurchgangszeit .

Zur Lösung der Aufgabe (B5.1) mussten die in Tabelle 4 zusammengestellten und kurz kommentierten Unterprogramme geschrieben werden .  
 Dabei dienen die ersten sieben der ( lokalen ) Lösung beliebiger Aufgaben der Art (99) ; nur die letzten drei charakterisieren das in (B5.1) zu lösende Einkörperproblem .

Tabelle 4

Unterprogramme zur Lösung von lokalen Anfangswertaufgaben (99) und zur Lösung der Aufgabe (B5.1)	
Name	Kurzbeschreibung
SEIDT	Definition der Teilpunkte $t_{k,j}^+$ resp. $t_{k,j}^*$ nach (98) , Definition der Grösse $H_k$ , nach (84) .
INITA	Initialisieren der Lösung nach (95a,b,c,d) . Zusätzlich werden die Fakultäten $1!$ , $2!$ , ... , $q!$ berechnet und abgespeichert ; es wird geprüft , ob $T_0$ mit einem der Teilpunkte $t_{k,j}^+$ resp. $t_{k,j}^*$ identisch ist . Trifft dies für $j=j^*$ zu , wird eine Variable $IT0 = j^*$ gesetzt . Trifft dies nicht zu , gilt $IT0=0$
YPOL	Mit dieser Subroutine können für beliebige Argumente $t$ die Funktionswerte $\tilde{y}_k(t)  ^{(i)}$ , $i=0,1,\dots,n_{\max}$ berechnet werden . $n_{\max} \leq q$ ist eine Eingabevariable .
LOKA21 LOKA22 LOKA32	Iterative Lösung der nicht-linearen Gleichungssysteme (83f) resp. (83h) mit den Methoden 2.1 ( siehe (89) , (90) ) , 2.2 ( siehe (92) ) resp. 3.2 ( siehe (94) ) . Als Resultat erhält man in allen drei Fällen die Koeffizienten $H_k^i \cdot \tilde{y}_{k,i}  $ , $i=0,1,\dots,n,n+1,\dots,q$ Als Abbruchkriterium wird bei den Methoden 2.2 , 3.2 (97b) , (97c) verwendet , bei der Methode 2.1 wird die Bedingung (97a) nur für $j=q+1-n = q-1$ geprüft .
HILF	Hilfssubroutine , die von LOKA21 zur Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems (90) gebraucht wird .
DERIV MATP DFDTP	Problemspezifische Subroutinen . Mit ihnen werden die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems (B5.1f) ( DERIV ) , die Matrizen $P..$ ( siehe (86f,g) ) ( MATP ) , resp. die partielle Ableitung der rechten Seite des Dgl.-Systems nach der Zeit $t$ bestimmt ( DFDTP ) .

Bemerkungen zu den Subroutinen in Tabelle 4

SEIDT

Mit dieser Subroutine können die Teilpunkte effektiv auch auf andere Art als in (98) gesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit werden wir davon aber keinen Gebrauch machen.

INITA

Gilt

$$T_0 = t_{k,j^*}^+ \text{ resp. } T_0 = t_{k,j^*}^* , j^* \in \{1, 2, \dots, q-1\} \text{ resp. } \dots \quad (\text{B5.2})$$

enthält das Gleichungssystem (83f) resp. das Gleichungssystem (83h) die Gleichungen (95b) resp. (95b) und (95c). Die Koeffizienten  $\tilde{y}_{k,n}$  resp.  $\tilde{y}_{k,n}$  und  $\tilde{y}_{k,n+1}$  können somit a priori bestimmt werden. Berücksichtigt man diese Tatsache, erreicht man eine beträchtliche Reduktion der Rechenzeit in LOKA..

Es sei jedoch ausdrücklich betont, dass (B5.2) nicht gelten muss.

In vielen Fällen erspart man sich durch die Wahl  $T_0 \neq t_{k,j}^+$ ,  $j=1, 2, \dots, q-1$  unangenehme Transformationen.

YPOL

Nach Abschluss der Subroutine LOKA21 resp. LOKA22 resp. LOKA32 kann YPOL zur Berechnung von Funktionswerten beliebiger Ableitungen der Funktion  $\tilde{y}_k(t)$  an beliebigen Stellen des Intervalles  $I_k$  verwendet werden.

Es ist wichtig zu wissen, dass man bei den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Integrationsverfahren nicht nur die Funktion  $y(t)$  in  $I_k$  approximiert, sondern auch die  $i=1, 2, \dots, q$ -ten Ableitungen von  $y(t)$ . Von dieser Tatsache werden wir in Kapitel 2.3.4.2 bei der automatischen Wahl der Teilpunkte  $t_k^*$ ,  $k=1, 2, \dots, m_t$  (siehe (76a)) Gebrauch machen.

LOKA21, LOKA22, LOKA32

Problematisch ist die in den Abbruchkriterien (97) vom Programmbenützer zu definierende Grösse  $\epsilon$ , die ja gleich dem maximalen in den Gleichungen (83f) resp. (83h) tolerierten Betrag der Fehler nach Abschluss der Iterationsprozesse ist.

Einerseits möchte man  $\epsilon$  möglichst klein wählen, damit in LOKA21 resp. LOKA22 resp. LOKA32 nicht unnötige Fehler in die Rechnung eingeführt werden, andererseits sollte  $\epsilon$  möglichst gross gewählt werden, damit nicht überflüssige Iterationsschritte ausgeführt werden, was mit langen Rechenzeiten verbunden ist.

Der Programmbenützer muss wissen, mit welcher Genauigkeit die Funktionen  $y(t)$  im Intervall  $I_k$  zu approximieren sind. D.h.

$$\epsilon_0 := \max_{\substack{i=1, 2, \dots, d \\ t \in I_k}} |y_i(t) - \tilde{y}_{k,i}(t)| \quad (\text{B5.4})$$

muss gegeben sein.

$\epsilon_0$  ist also der maximale in einer Komponente  $y_{k,i}(t)$  von  $y_k(t)$  in  $I_k$  tolerierte Fehler. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, das in (97) verwendete  $\epsilon$  als Funktion von  $\epsilon_0$  abzuschätzen. Dabei wollen wir uns vorerst auf die beiden durch die Gleichungen (83f) definierten Methoden 2.1 und 2.2 beschränken.

$$\text{Es sei : } \delta y_{k',i}(t) := \tilde{y}_{k'}^{J^*+2}(t) - \tilde{y}_{k'}^{J^*+1}(t) = \tilde{y}_{k'}^{J^*+2}(t) - \tilde{y}_{k'}(t) \quad (\text{B5.5})$$

Offensichtlich wird es sinnlos, den Iterationsprozess weiter fortzusetzen, wenn gilt:

$$|\delta y_{k',i}(t)| \leq \varepsilon_0, \quad i=1,2,\dots,d, \quad t \in I_{k'} \quad (\text{B5.6})$$

Die Funktionen  $\delta y_{k',i}$  sind Polynome vom Grad  $q$ . Somit sind ihre zweiten Ableitungen Polynome vom Grade  $q-2$ , für die - bei Anwendung der Abbruchkriterien (97a) resp. (97b) - die folgenden Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$|\delta y_{k',i}^{(2)}(t_{k',j}^+)| \leq \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,d, \quad j=1,2,\dots,q-1 \quad (\text{B5.7})$$

Mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange dürfen wir nun den Schluss ziehen, dass - bei Verwendung der Teilpunkte (98) - gilt:

$$|\delta y_{k',i}^{(2)}(t)| \leq 20 \cdot \varepsilon, \quad t \in I_{k'}, \quad i=1,2,\dots,d, \quad q \leq 14 \quad * \quad (\text{B5.8})$$

In Anbetracht von (86c) führt dies unmittelbar zu einer einfachen Abschätzung für  $\delta y_{k',i}(t)$  in  $I_{k'}$ :

$$|\delta y_{k',i}(t)| \leq 10 \cdot \varepsilon \cdot (t - t_{k'_0})^2 \leq 10 \cdot \varepsilon \cdot H_{k'}^2, \quad i=1,2,\dots,d \quad (\text{B5.9})$$

Durch Vergleich von (B5.6) und (B5.9) folgt für die Methoden 2.1 und 2.2 unmittelbar:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 / (10 \cdot H_{k'}^2) \quad \text{für } q \leq 14 \text{ und für die Methoden 2.1, 2.2.} \quad (\text{B5.10})$$

(B5.10) ist das gesuchte Resultat: Das in (97) gebrauchte  $\varepsilon$  ist als Funktion des bekannten  $\varepsilon_0$  (siehe (B5.4)) dargestellt.

Vollständigkeitshalber wollen wir noch eine Abschätzung für die erste Ableitung von  $y_{k',i}(t)$  in  $I_{k'}$  angeben:

$$|\delta y_{k',i}^{(1)}(t)| \leq 20 \cdot \varepsilon \cdot H_{k'}, \quad t \in I_{k'}, \quad i=1,2,\dots,d \quad (\text{B5.11})$$

Für die Methode 3.2 kommt man mit Hilfe der Interpolationsformel von Hermite (siehe z.B. {Z. Kopal, 1955, Kap. II-E}) zu den folgenden Abschätzungen:

$$|\delta y_{k',i}(t)| \leq 4 \cdot \varepsilon \cdot H_{k'}^2, \quad |\delta y_{k',i}^{(1)}(t)| \leq 8 \cdot \varepsilon \cdot H_{k'}, \quad t \in I_{k'}, \quad (\text{B5.12})$$

$$q \leq 14$$

$i=1,2,\dots,d$ , Methode 3.2.

Man könnte somit für die Methode 3.2 für  $\varepsilon$  eine etwas günstigere Abschätzung als (B5.10) angeben; wir sehen aber davon ab, und verwenden generell (B5.10) für alle drei Methoden.

Bei unserem Beispiel interessieren wir uns ausschliesslich für die maximale erreichbare Genauigkeit bei Rechnung in Doppelpräzision (siehe (69)) und setzen:

$$\varepsilon_0 = 10^{-14} \quad (\text{B5.13})$$

\* Für Abschätzungen dieser Art siehe z.B. {E. Stiefel, 1965, 7. Approximationen}.

DERIV , MATP , DFDTP

Dies sind die problemspezifischen Unterprogramme : Ist an Stelle von (B5.1) ein anderes Anfangswertproblem der Art (99) zu lösen , sind lediglich diese drei Subroutinen neu zu programmieren .

In unserem speziellen Beispiel gilt :

$$\{f\}_t = 0 \quad , \quad t \in I_k \quad (B5.14)$$

Die Subroutine DFDTP , die von INITA und LOKA32 aufgerufen wird , ist also trivial .

Die Matrix  $P_0(t)$  ( siehe (86f) ) wird in MATP berechnet . Vollständigkeithalber sei ihre explizite Gestalt angegeben :

$$P_0 = -k^2/r^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 3 \cdot y_1 \cdot \lambda_1 & , & - 3 \cdot y_1 \cdot \lambda_2 \\ - 3 \cdot y_2 \cdot \lambda_1 & , & 1 - 3 \cdot y_2 \cdot \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (B5.15)$$

wobei :  $\lambda_1 = (s_1 \cdot y_1 + s_3 \cdot y_2) / r^2$  ,  $\lambda_2 = (s_3 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2) / r^2$  (B5.15a)

Es hat keinen Sinn , alle in Tabelle 4 aufgeführten Unterprogramme wiederzugeben .

Um dem Leser wenigstens einen Eindruck von der Grössenordnung der (problem-unabhängigen) Subroutinen LOKA.. zu geben , geben wir auf der folgenden Seite die Subroutine LOKA21 an .

Bemerkungen zum FORTRAN-Unterprogramm LOKA21 ( siehe nächste Seite )

- Die wichtigsten Programmteile ( Blöcke ) sind eingerahmt und gekennzeichnet .
- In LOKA21 wird (83f) durch den Iterationsprozess (90) gelöst .  
Im Programm ist diese Iteration identisch mit der folgenden Schlaufe :

```

      . . . . .
      DO 100 ITER=1,5
      .
      .
      .
      100 CONTINUE
      . . . . .
  
```

Zu den einzelnen Blöcken :

Die Blöcke  $A_1$  ,  $A_2$  sowie die durch "<——" gekennzeichneten Instruktionen werden gebraucht um - je nachdem ob  $IT0 = 0$  oder  $IT0 \neq 0$  ist - die Unbekannten  $H_{k,i}^1$  ,  $\tilde{y}_{k,i}$  ,  $i = \underline{n}, n+1, \dots, q$  oder  $i = \underline{n+1}, n+2, \dots, q$  zu bestimmen .

In Block B wird die Matrix  $g_{k,i}^J$  ( im Programm mit G bezeichnet ) aufgestellt ( siehe (89c) ) .

In Block C wird die im Programm mit XL bezeichnete Matrix  $L_k^J$  definiert .

Die Subroutine DMINV invertiert die Matrix XL ( Block D ) .

In Block E schliesslich werden die neuen Koeffizienten berechnet .

SUBROUTINE LOKA21(Q,D,ITO,HK,T0,EPS,TKPL,YKOE,Y,  
FAK,F,H,H1,P,G,XL,LH1,LH2)

1

C  
C LOKALE LOESUNG EINER ANFANGSWERTAUFGABE  
C BESCHREIBUNG SIEHE LOKA21.TXT  
C

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)  
REAL\*8 Y(1),YKOE(1),TKPL(1)  
REAL\*8 F(1),H(1),H1(1),P(1),G(1),XL(1),FAK(1)  
INTEGER\*2 Q,D,LH1(1),LH2(1)

C NEFF : EFFEKTIVE DIMENSION DER (NICHT LINEARISIERTEN) MATRIX XL

NO=3  
IF(ITO.EQ.0)NO=2  
NEFF=(Q+1-NO)\*D

A<sub>1</sub>

C ITERATIVE LOESUNG DES SYSTEMS XL\*YKOE = G

DO 100 ITER=1,5

J=0  
DO 30 JO=1,Q-1  
IF(JO.EQ.ITO)GO TO 30  
J=J+1

A<sub>2</sub>

C 1. DEFINITION DER RECHTEN SEITE : MATRIX G

T=TKPL(JO)-T0  
CALL YPOL(Q,D,HK,FAK,T,YKOE,Y)  
CALL DERIV(TKPL(JO),D,Y,F)  
CALL MATP(TKPL(JO),D,Y,P)  
CALL HILF(NO,Q,D,HK,T,P,YKOE,H,H1)  
J00=(J-1)\*D  
DO 10 I=1,D  
G(J00+I)=F(I)-H(I)  
IF(NO.EQ.3)G(J00+I)=G(J00+I)-2\*YKOE(2\*D+I)/HK\*\*2  
10 CONTINUE

B

C 2. DEFINITION DER MATRIX XL(NEFF,NEFF)

DO 20 I=NO,Q  
I00=(I-NO)\*D  
TIM2=FAK(I+1)/FAK(I-1)  
IF(I.GT.2)TIM2=TIM2\*TK\*\*I-2  
DO 20 L1=1,D  
DO 20 L2=1,D  
I1=J00+L1+(I00+L2-1)\*NEFF  
I2=L1+(L2-1)\*D

C

C XL(J00+L1,I00+L2)=-P(L1,L2)\*TK\*\*I + DELTA(L1,L2)\*I!/(I-2)!\*TK\*\*I-2

C DELTA(L1,L2) : KRONECKER - DELTA

XL(I1)=-P(I2)\*TK\*\*I  
IF(L1.EQ.L2)XL(I1)=XL(I1)+TIM2  
XL(I1)=XL(I1)/HK\*\*I

C\*

20 CONTINUE  
30 CONTINUE

C INVERSION DER MATRIX XL :

CALL DMINV(XL,NEFF,DET,LH1,LH2)

D

C BERECHNUNG DER NEUEN KOEFFIZIENTEN :

C -1  
C YKOE = (XL) \* G  
C

DO 40 I=NO,Q  
I00=I\*D  
I01=(I-NO)\*D  
DO 40 L1=1,D  
YKOE(I00+L1)=0.D0  
DO 40 L2=1,NEFF  
YKOE(I00+L1)=YKOE(I00+L1)+XL(I01+L1+(L2-1)\*NEFF)\*G(L2)  
40 CONTINUE

E

CALL YPOL(Q,D,HK,FAK,T,YKOE,Y)  
CALL HILF(NO,Q,D,HK,T,P,YKOE,H)  
CALL DERIV(TKPL(JO),D,Y,F)

C TEST DER QUALITAET DER LINEARISIERUNG AN DER STELLE T = TKPLUS(Q-1)

XMAX=0.D0  
DO 50 I=1,D  
IF(NO.EQ.3)H(I)=H(I)+2\*YKOE(2\*D+I)/HK\*\*2  
TEST=DABS(G(J00+I)-F(I)+H(I))  
IF(TEST.GT.XMAX)XMAX=TEST  
50 CONTINUE

F

IF(XMAX.LE.EPS)RETURN  
100 CONTINUE

C DRUCKEN EINER WARNUNG , WENN KEINE KONVERGENZ ERREICHT WURDE  
TYPE \*,\*\*\* SR LOKA21 : KEINE KONVERGENZ , XMAX =',XMAX  
RETURN  
END

G

Anschliessend wird in F geprüft , ob an der Stelle  $t_k^+$  die Bedingung (97a) erfüllt ist .

Ist nach ( nur ! ) 5 Iterationsschritten (97a) immer noch nicht erfüllt , wird in Block G eine Warnung ausgedruckt .

Erwähnenswert ist die Tatsache , dass die Matrizen  $L_k^J$  sowie  $P_0^J$  in

LOKA21 kolonnenweise linearisiert sind . Dadurch erreicht man , dass LOKA21 für beliebige Probleme der Art (99) ( beliebige Dimension d , beliebige Integrationsordnung q ) gebraucht werden kann . Dass diese Linearisierung der Lesbarkeit des Programms abträglich ist , leuchtet ein . Daher wurde an einer Stelle ( Block C\* ) die nicht linearisierte Matrizenoperation durch Kommentarzeilen verdeutlicht .

Um diese Linearisierung braucht sich der Programm benützer natürlich nicht zu kümmern ; sie ist eine rein interne Angelegenheit .

Die in Block B benötigte Subroutine "HILF" , die ungefähr 10 Instruktionen enthält , wird hier nicht wiedergegeben .

Berücksichtigt man noch , dass von den drei Unterprogrammen LOKA.. das hier wiedergegebene LOKA21 das längste ist , darf festgehalten werden , dass sich die drei Integrationsmethoden 2.1 , 2.2 und 3.2 durch sehr einfache Algorithmen auszeichnen .

#### Die Programmresultate

Die in (B5.1) verlangten Resultate sind auf der folgenden Seite in den Tabellen 5a (  $T_0$  entspricht der Periheldurchgangszeit ) und 5b (  $T_0$  entspricht der Apheldurchgangszeit ) zusammengefasst .

Da es zudem wichtig ist , mit welchem Rechenaufwand diese Resultate erzielt wurden , wird in den Tabellen 6a,b festgehalten , in welcher Zeit die Lösung berechnet wurde , und wie oft die Subroutinen DERIV und MATP aufgerufen worden sind .

#### Zu den Tabellen 5a , 5b

- Die zur Berechnung der Grössen (B5.1b) benötigten "wahren" Lösungen  $\vec{r}(t)$  wurden mit der Subroutine ELEXV ( siehe Tabelle 3 , (71) ) bestimmt .
- Augenfällig ist der Unterschied zwischen den Tabellen 5a und 5b : In Tabelle 5b (  $T_0$  = Apheldurchgangszeit ) liefern alle Approximationsansätze befriedigende bis sehr gute Resultate . In Tabelle 5a (  $T_0$  = Periheldurchgangszeit ) stimmt dies nur für Exzentrizitäten  $\leq .4$  . Bei Exzentrizitäten  $\geq .5$  können nur noch die Polynomansätze mit  $q = 7$  ,  $q = 9$  in den kürzeren Intervallen  $H_k = 40$  ,  $80$  einigermaßen befriedigen - dies übrigens , obwohl in fast allen \*) Fällen die Abbruchkriterien (97a,b,c) erfüllt werden konnten .
- Als erstes Resultat sei festgehalten , dass sich bei praktisch allen Problemen der sogenannten "ersten Bahnbestimmung" ( siehe Kapitel 3.4.2 ) die beobachteten Bahnstücke mit ausreichender Genauigkeit durch die nach (81a) und (83f) resp. (83h) definierten Polynome approximieren lassen .
- Die Methoden 2.1 und 2.2 unterscheiden sich nur in der Lösungsart des nicht-linearen Gleichungssystems (83f) . Man bestimmt also nach beiden Methoden im wesentlichen dieselben Approximationspolynome .

---

\*) Die Fälle , für die dies nicht stimmt , erkennt man in Tabelle 6 anhand der sehr langen Rechenzeiten .

Tabelle 5a

$T_0$  = Periheldurchgangszeit

$H_k, e$	Maximale Fehlerbeträge in den Komponenten von $\vec{r}(t)$ , $t \in I_k$		
	$q = 5$	$q = 7$	$q = 9$
40 .0	$2 \cdot 10^{-10} / 9 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-15} / 2 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-16} / 1 \cdot 10^{-16}$
80	$1 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-12} / 4 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-16} / 3 \cdot 10^{-15}$
120	$2 \cdot 10^{-7} / 7 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-11} / 1 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-15} / 2 \cdot 10^{-13}$
40 .2	$1 \cdot 10^{-8} / 4 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-12} / 2 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-15} / 1 \cdot 10^{-13}$
80	$7 \cdot 10^{-7} / 3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-12} / 1 \cdot 10^{-10}$
120	$8 \cdot 10^{-6} / 3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-8} / 1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-9} / 6 \cdot 10^{-9}$
40 .4	$2 \cdot 10^{-7} / 9 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10} / 2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-12} / 4 \cdot 10^{-11}$
80	$2 \cdot 10^{-5} / 6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7} / 3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 10^{-8}$
120	$2 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6} / 8 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-8} / 2 \cdot 10^{-6}$
40 .6	$1 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7} / 3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-9} / 3 \cdot 10^{-8}$
80	$6 \cdot 10^{-4} / 2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5} / 5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-6} / 2 \cdot 10^{-5}$
120	$5 \cdot 10^{-3} / 1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4} / 7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5} / 7 \cdot 10^{-4}$
40 .8	$3 \cdot 10^{-3} / 6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4} / 4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-4}$
80	$7 \cdot 10^{-2} / 4 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-3} / 1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3} / 4 \cdot 10^{-2}$
120	$3 \cdot 10^{-1} / 8 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2} / 5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 5b

$T_0$  = Apheldurchgangszeit

$H_k, e$	Maximale Fehlerbeträge in den Komponenten von $\vec{r}(t)$ , $t \in I_k$		
	$q = 5$	$q = 7$	$q = 9$
40 .2	$1 \cdot 10^{-10} / 4 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-15} / 2 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-16} / 3 \cdot 10^{-16}$
80	$7 \cdot 10^{-9} / 3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-12} / 5 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-16} / 5 \cdot 10^{-15}$
120	$8 \cdot 10^{-8} / 3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-11} / 1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-14} / 3 \cdot 10^{-13}$
40 .4	$2 \cdot 10^{-11} / 8 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-15} / 1 \cdot 10^{-13}$	$4 \cdot 10^{-16} / 4 \cdot 10^{-16}$
80	$1 \cdot 10^{-9} / 6 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-12} / 3 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-15} / 2 \cdot 10^{-14}$
120	$2 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-14} / 1 \cdot 10^{-12}$
40 .6	$2 \cdot 10^{-11} / 6 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-16} / 1 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-16} / 5 \cdot 10^{-16}$
80	$1 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-13} / 3 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-16} / 2 \cdot 10^{-15}$
120	$1 \cdot 10^{-8} / 4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-12} / 7 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-15} / 1 \cdot 10^{-13}$
40 .8	$2 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-15} / 5 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-16} / 6 \cdot 10^{-16}$
80	$1 \cdot 10^{-9} / 6 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-13} / 1 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-16} / 5 \cdot 10^{-15}$
120	$2 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-11} / 3 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-14} / 3 \cdot 10^{-13}$

In den Tabellen 5a , 5b bezieht sich die erste Zahl auf die Methoden 2.1 und 2.2 , die zweite ( nach dem " / " ) auf die Methode 3.2 .

Tabellen 6a, 6b

a.)  $T_0$  = Periheldurchgangszeit

$H_k, e$	Rechenzeiten (sec)			Anzahl Aufrufe von DFRV			Anzahl Aufrufe von MWTT		
	q = 5	q = 7	q = 9	q = 5	q = 7	q = 9	q = 5	q = 7	q = 9
40 .0	4/2/2	10/4/2	21/7/7	10/24/12	14/30/10	18/40/20	8//12	12//10	16//20
80	4/2/3	10/5/3	21/8/8	10/28/16	14/42/14	18/48/24	8//16	12//14	16//24
120	4/3/4	10/5/4	31/9/10	10/32/22	14/42/16	27/56/32	8//22	12//16	24//32
40 .2	4/2/2	10/4/3	21/8/8	10/24/14	14/36/12	18/48/24	8//14	12//12	12//24
80	4/3/3	10/6/4	42/10/10	10/32/20	14/48/16	36/64/32	8//20	12//16	36//32
120	6/4/3	10/6/4	53/10/11	15/40/24	14/54/20	45/64/36	12//24	12//20	40//36
40 .4	4/2/3	10/5/3	21/8/9	10/28/16	14/42/14	18/42/14	8//16	12//14	16//28
80	8/3/4	10/7/4	32/11/12	20/40/26	14/60/18	27/72/40	16//26	12//18	24//40
120	6/4/5	15/7/5	53/13/12	15/48/32	21/60/22	45/88/40	12//32	18//22	40//40
40 .6	6/3/4	10/6/4	21/10/10	15/40/24	14/48/18	18/64/32	12//24	12//18	16//32
80	10/4/6	20/8/6	32/13/12	25/52/36	28/72/26	27/88/40	20//36	24//26	24//40
120	10/5/8	25/9/6	43/14/15	25/68/50	35/78/26	36/96/52	20//50	30//26	32//52
40 .8	10/5/8	25/8/22	42/56/15	35/72/100	36/400/52	36/400/52	20//46	36//100	32//52
80	8/17/7	25/11/7	42/20/57	20/200/42	35/102/34	36/136/200	16//42	36//34	32//200
120	10/7/6	25/15/11	53/23/29	25/92/38	35/138/52	45/160/100	20//38	30//52	40//100

b.)  $T_0$  = Apheldurchgangszeit

40 .2	4/2/2	10/4/3	21/7/7	10/20/10	14/30/10	18/40/20	8//10	12//10	16//20
80	4/2/3	10/4/3	21/8/8	10/24/14	14/36/12	18/48/24	8//14	12//12	16//24
120	4/3/3	15/5/3	21/9/9	10/32/18	21/42/14	18/56/28	8//14	18//14	16//28
40 .4	4/2/2	10/3/2	10/6/6	10/20/10	14/24/8	9/32/16	8//10	12//8	8//16
80	4/2/3	10/4/3	21/7/7	10/24/14	14/30/12	18/40/20	8//14	12//12	16//20
120	4/2/3	10/4/3	21/8/8	10/28/16	14/36/14	18/48/24	8//16	12//14	16//24
40 .6	4/2/2	10/3/2	21/6/6	10/16/10	14/24/8	18/32/16	8//10	12//8	16//16
80	4/2/2	10/4/3	21/7/7	10/24/12	14/30/12	18/40/20	8//12	12//12	16//20
120	4/2/3	10/4/3	21/8/8	10/24/16	14/36/12	18/48/24	8//16	12//12	16//24
40 .8	4/2/2	10/3/2	21/6/6	10/16/10	14/24/8	18/32/16	8//10	12//8	16//16
80	4/2/2	10/4/3	21/7/7	10/20/12	14/30/10	18/40/20	8//12	12//10	16//20
120	4/2/3	10/4/3	21/8/7	10/24/14	14/36/12	18/48/20	8//14	12//12	16//20

In den Tabellen 6a, 6b bezieht sich die erste Zahl jeweils auf die Methode 2.1, die zweite auf die Methode 2.2 und die dritte auf die Methode 3.2.

Aus diesem Grund können die Resultate für die Methoden 2.1 und 2.2 in den Tabellen 5a, 5b zusammengefasst werden.

- Es ist nicht zu übersehen, dass ganz allgemein die Methoden 2.1, 2.2 der Methode 3.2 an Genauigkeit überlegen sind (in unserem Beispiel ist 3.2 um 1 - 2 Zehnerpotenzen schlechter; dies dürfte sich auch bei andern Aufgaben bestätigen).
- Die Polynomgrade  $q = 5, 7, 9$  wurden gewählt, um die Methode 3.2 direkt mit den übrigen Methoden vergleichen zu können.

Mit einer Ausnahme (Methode 3.2,  $q = 7$ ) galt (siehe (B5.1a))

$$\text{stets: } T_0 \notin \{t_{k',1}^+, t_{k',2}^+, \dots, t_{k',q-1}^+\} \quad (\text{B5.16})$$

Man sieht, dass sich diese Tatsache keineswegs negativ auf die Rechengenauigkeit auswirkt. (Es wirkt sich hingegen negativ auf die Rechengeschwindigkeit aus).

- Die wichtigste, die Präzision limitierende Grösse ist die Exzentrizität  $e$ . In der Nähe des Aphels unterscheiden sich zwar die erreichten Genauigkeiten (in Abhängigkeit von  $e$ ) nur wenig, dafür ist dieser Unterschied in der Nähe des Perihels (Tabelle 5a) umso deutlicher.
- Nach (84) erwartet man von der Halbierung des Intervalles  $I_{k'}$  eine Verminderung der Fehler um einen Faktor  $2^{q+1}$ ; in den Tabellen 5a,b findet man dies ungefähr bestätigt. Die Reduktion der Intervalllänge (bei gleichbleibendem Polynomgrad  $q$ ) ist also ein äusserst wirksames Mittel zur Steigerung der Rechengenauigkeit.
- Die andere Methode, die Genauigkeit zu steigern, besteht darin, den Polynomgrad  $q$  (bei gleichbleibender Intervalllänge) zu erhöhen. Ganz allgemein hat die Erhöhung des Polynomgrades bei Bahnen kleiner Exzentrizität - jedenfalls in der Nähe des Perihels - den wesentlich grösseren Effekt als bei den Bahnen mit grösseren Exzentrizitäten.
- Als Halbachse haben wir stets  $a = a_0 = 2.7 \text{ A.E.}$  angenommen. Die Resultate können auf beliebige Halbachsen übertragen werden, wenn man die Intervalllängen durch

$$H_{k'}(a) = (a/a_0)^{3/2} \cdot H_{k'}(a_0) \quad (\text{B5.17})$$

ersetzt.

#### Zu den Tabellen 6a, 6b

- Innerhalb der einzelnen Methoden steigt der Rechenaufwand
  - a.) mit der Erhöhung des Polynomgrades
  - b.) mit der Vergrösserung der Intervalllänge.
- Die in den Tabellen 6a, 6b zusammengestellten Rechenzeiten sind charakteristisch für die Aufgabe (B5.1) (und selbstverständlich für den verwendeten Rechner). (B5.1) zeichnet sich dadurch aus, dass die Berechnung der Funktionen  $f(\dots)$ ,  $P_0(\dots)$  (Subroutinen DERIV, MATP) sehr wenig Zeit in Anspruch nimmt. In den meisten Fällen ist das Gegenteil der Fall. Daher wurden zusätzlich die Anzahl der Aufrufe der Unterprogramme DERIV, MATP tabelliert. Bei den meisten Problemen bestimmen diese Grössen im wesentlichen die Rechenzeit.
- Bei der speziellen Aufgabe (B5.1) ist 3.2 die schnellste, 2.1 die langsamste Methode. Das kommt davon, dass bei 2.1 bei jedem Iterationsschritt eine Matrix der Dimension  $(2 \cdot (q-1)) \times (2 \cdot (q-1))$  invertiert werden muss, während bei 2.2, 3.2 nur einmal eine Matrix der Dimension  $(q-1) \times (q-1)$  (vor dem

eigentlichen Iterationsprozess ) invertiert werden muss ( siehe (90), (89b) resp. (92), (92b) resp. (94), (94b) ) .

- Vergleicht man die Methoden 2.1 und 2.2 ( die ja im wesentlichen dieselben Resultate liefern ) , so bemerkt man , dass zwar in unserem Beispiel die Rechenzeiten eindeutig für 2.2 sprechen , dass aber die Anzahl der Funktionsaufrufe ( für DERIV + MATP ) ebenso eindeutig für 2.1 sprechen .

Die Wahl der Methode ist also stark problemabhängig .

- Die verlangte Genauigkeit ( siehe (B5.13) ) ist für die Beispiele in Tabelle 5a stark übertrieben . Man hätte vergleichbare Resultate erhalten , wenn man  $\epsilon_0$  vier bis fünf Zehnerpotenzen grösser gewählt hätte . Dadurch wären in Tabelle 6 sowohl die Rechenzeiten als auch die Anzahlen der Funktionsaufrufe stark reduziert worden . Sehr deutlich fällt diese Reduktion der Funktionsaufrufe insbesondere bei der Methode 2.1 aus .

### 2.3.1.2 LOKALE LÖSUNG DER LINEAREN ANFANGSWERTAUFGABE

Im Prinzip könnten die  $n_p$  Anfangswertaufgaben (74) mit irgendeiner der im letzten Kapitel entwickelten Methoden gelöst werden - niemand kann uns schliesslich zwingen , die Linearität der Differentialgleichungssysteme (74a) auszunützen .

Bei der Methode 3.2 würde dies freilich bedeuten , dass die Ableitungen  $z_\ell |^{(n+1)}$  von (74a) ausgehend analytisch berechnet werden müssten , eine - in Anbetracht der Definition der Matrizen  $P_i(t)$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  ( siehe (54a) ) - eher mühsame Angelegenheit . Aus diesem Grunde werden wir die Lösungsmethode 3.2 zur Lösung der Aufgaben (74) nicht in Betracht ziehen .

Die Methode 2.2 ( siehe (91), (92), (92a,b) ) kann ohne weiteres zur Integration der Gleichungen (74) verwendet werden ; man hat lediglich die Funktion  $f|$  zu ersetzen durch die Funktionen ( siehe (73a) , (74a) ) :

$$\underline{\tilde{f}_\ell | := \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) \cdot z_\ell |^{(i)} + \{f|\}_{P_\ell}} \quad (100)$$

Programmtechnisch bedeutet dies , dass in der Subroutine DERIV ( siehe Tabelle 4 ) die Funktionen  $\tilde{f}_\ell |$  an Stelle von  $f|$  zu berechnen sind .

Die Matrizen  $P_i(t) := P_i(t, y|, \dots, y|^{(n-1)})$  ,  $i=1,2,\dots,n-1$  ( siehe (54a) ) müssen bei der Lösung von (74) als bekannt vorausgesetzt werden , was bedeutet , dass (73) schon gelöst worden ist .

Dass im Ansatz (80b) ein von  $q$  verschiedener Polynomgrad  $q'$  verlangt wird, stört nicht, da in der Subroutine LOKA21 der Polynomgrad  $q$  sowieso eine wählbare (Eingabe-)Variable ist.

Die in 2.3.1.1 entwickelten Lösungsverfahren 2.1 und 2.2 unterscheiden sich lediglich in der Methode der Lösung des Gleichungssystems (83f) (siehe Iterationsprozesse (90), (92)). Bei der Lösung der  $\ell$ -ten Aufgabe (74) ist (83f) wie folgt zu ersetzen ( $q \rightarrow q'$ ,  $t_{k',j}^+ \rightarrow t_{k',j}^{'+}$ ,  $f| \rightarrow \tilde{f}_\ell|$ ):

$$\tilde{z}_{\ell k', (t_{k',j}^{'+})|}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) \cdot \tilde{z}_{\ell k', (t_{k',j}^{'+})|}^{(i)} + \{f(t_{k',j}^{'+})|\}_{P_\ell}^* \quad (101)$$

$j = 1, 2, \dots, q'+1-n$

Setzt man den Ansatz (80b) in (101) ein, erkennt man leicht, dass (101) zu einem linearen Gleichungssystem in den  $\tilde{z}_{\ell k', i}|$ ,  $i = n, n+1, \dots, q'$  wird (die ersten  $n$  Koeffizientenmatrizen sind schon nach (81b) bestimmt).

Dieses lineare Gleichungssystem können wir - in Analogie zu (90) - wie folgt schreiben:

$$\underline{L_{k'}} \cdot \underline{\tilde{z}_{\ell k', i}|} = \underline{g_{\ell k', i}|}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n_p \quad (102)$$

Die Definition von  $L_{k'}$  ist identisch mit der Definition von  $L_k^J$  in (89b), wenn man nur dort überall den Index  $J$  weglässt und  $q$  durch  $q'$  ersetzt.

Die übrigen Matrizen in (102) sind analog zu den Matrizen in (90) definiert:

$$\underline{\tilde{z}_{\ell k', i}|} := (\underline{\tilde{z}_{\ell k', n}|}, \underline{\tilde{z}_{\ell k', n+1}|}, \dots, \underline{\tilde{z}_{\ell k', q'}|}) \quad (102a)$$

$$\underline{g_{\ell k', i}|} := (\underline{g_{\ell k', 1}|}, \underline{g_{\ell k', 2}|}, \dots, \underline{g_{\ell k', q'+1-n}|}) \quad (102b)$$

Wobei:

$$\underline{g_{\ell k', j}|} := \{f(t_{k',j}^{'+})|\}_{P_\ell} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t_{k',j}^{'+}) \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{i!}{(i-k)!} \cdot (t_{k',j}^{'+} - t_{k',j}^+)^{i-k} \cdot \underline{z_{\ell k', i}|}$$

$j = 1, 2, \dots, q'+1-n$  (102c)

$$*) \underline{t_{k',j}^{'+}} := \underline{t_{k',j}^*} + \frac{j-1}{q'+1-n} \cdot H_{k'}, \quad j=1, 2, \dots, q'+1-n \quad (101a)$$

(90) und (102) unterscheiden sich also im wesentlichen in den rechten Seiten und in der Tatsache , dass (102) ohne Iterationsprozess gelöst werden kann .

Damit haben wir bereits alle Formeln bereitgestellt , um die Anfangswertprobleme (74) ( lokal ) nach der - für lineare Systeme modifizierten - Methode 2.1 zu lösen .

Sehr wichtig ist die Tatsache zu werten , dass die Matrix  $L_k$  , unabhängig vom Index  $k$  ist . Das bedeutet , dass bei der numerischen Integration von (74) nur ein mal die Matrix  $L_k$  berechnet und invertiert werden muss .

Die Lösung der  $n_p$  Aufgaben (74) besteht dann nur noch darin , für jedes  $k = 1, 2, \dots, n_p$  die Matrizen  $g_{\ell k}$  zu berechnen und die folgende Matrizenmultiplikation auszuführen :

$$\tilde{z}_{\ell k} = (L_k)^{-1} \cdot g_{\ell k} \quad , \quad \ell = 1, 2, \dots, n_p \quad (103)$$

Die Funktionen  $z_\ell(t)$  ( und allenfalls deren Ableitungen ) werden "nur" zur Berechnung der sowieso linearisierten Fehlergleichungsmatrix  $A^I$  ( siehe (29d) ) benötigt . Daher müssen diese Funktionen längst nicht mit derselben Genauigkeit approximiert werden , wie die Funktionen  $y(t)$  . ( Kleine Fehler in den  $\tilde{z}_{\ell k}(t)$  schlagen sich in einer unwesentlichen Reduktion der Konvergenzgeschwindigkeit des Prozesses (66) resp. (67) nicht aber im Resultat der Parameterbestimmungsaufgabe nieder ) .

Dieser Tatsache kann auf verschiedene Weise Rechnung getragen werden :

- In (80b) wird der Polynomgrad  $q'$  kleiner als in (80a) gewählt :

$$\underline{q'} < q \quad (104a)$$

- Die Variablen  $\tilde{z}_{\ell k}$  und die zugehörigen Koeffizienten  $\tilde{z}_{\ell k' i}$   $i = 0, 1, \dots, q'$  können durch Einfachpräzisionszahlen dargestellt werden .

$$(104b)$$

- Sind die Primärgleichungen nach der Methode 2.1 gelöst worden , setzt man zunächst  $q' = q$  und approximiert die Matrix  $(L_k)^{-1}$  wie folgt :

$$\underline{(L_{k'})^{-1}} := (L_{k'}^{J*})^{-1} \quad (104c)$$

D.h. die in (102) auftretende Matrix wird durch die in (90) beim letzten Iterationsschritt berechnete Matrix  $L_{k'}^{J*}$  approximiert. Mit dieser Massnahme erspart man sich sogar die Inversion der Matrix  $L_{k'}$ , bei der Integration von (74) !  
Anschliessend steht es uns natürlich frei, den Polynomgrad  $q'$  angemessen zu reduzieren.

In Anbetracht dieser engen Verwandtschaft zwischen der Lösung der Primärgleichungen und der zugehörigen  $n_p$  Variationsgleichungssysteme wurde zur Lösung von Problemen der Art (99) eine Subroutine LAPV21 ( lokale Lösung von Anfangswertproblemen (99) ( Primärgleichungen ) samt  $n_p$  zugehörigen Variationgleichungssystemen ) erstellt. Diese ist - zusammen mit der von LAPV21 benötigten Subroutine DFDPL - in Tabelle 7 beschrieben :

Tabelle 7

Unterprogramme zur Lösung von lokalen Anfangswertproblemen der Art (99) samt Variationsgleichungen	
Name	Kurzbeschreibung
LAPV21	Lokale Lösung von Anfangswertproblemen (99) nach der Methode 2.1. Zusätzlich Lösung von $n_p$ zugeordneten Variationsgleichungssystemen nach (103), wobei die Näherung (104c) benützt wird. Die Variationsgleichungen werden in Einfachpräzision gelöst. Als Resultat erhält man die Koeffizienten $H_{k'}^i \cdot \tilde{y}_{k',i}  , i=n, n+1, \dots, q,$ $H_{k'}^i \cdot \tilde{z}_{\ell k',i}  , i=n, n+1, \dots, q', \ell=1, 2, \dots, n_p$ $q' \leq q$
DFDPL	Berechnung von $\{f(t)   \}_{P_\ell}$ für die Parameter vom Typ 2 (siehe Tabelle 1 <sup>ℓ</sup> ).

Der erste Teil des Programms LAPV21 ist im wesentlichen identisch mit LOKA21 ( siehe Tabelle 4 ) . Im zweiten Teil werden die Matrizen  $g_{\ell k}$  ( siehe (102) , (102b) ) berechnet ( dazu wird die Subroutine DFDPL  $q+1-n$  mal durchlaufen )<sup>\*)</sup>, und die Matrizenmultiplikationen (103) werden ausgeführt .

Bemerkenswert ist es , dass dieser zweite Programmteil weder die Subroutine DERIV noch die Subroutine MATP ( die gemäss Tabelle 4 definiert sind ) aufruft .

In dieser Arbeit werden wir in den als Anfangswertaufgaben formulierten angewandten Parameterbestimmungsbeispielen ausschliesslich die Subroutine LAPV21 verwenden . Das bedeutet aber nicht , dass dieses Vorgehen unter allen Umständen das wirtschaftlichste ist ; es ist aber von der Programmstruktur her gesehen bestimmt das einfachste .

### 2.3.2 DIE LOKALE RANDWERTAUFGABE

Bei diesem Aufgabentyp wird angenommen , dass sämtliche den Randwerten zugeordneten Zeiten ( Epochen )  $T_i$  ,  $i=1,2,\dots,n$  ( siehe (73c) , (74c) ) in ein und demselben der in (76a,b) definierten Teilintervalle liegen :

$$\underline{T_i} \in I_{k'} \quad , \quad k' \in \{1,2,\dots,m_t\} \quad (105)$$

Wir verwenden dieselben Ansätze (76c) für die approximierenden Funktionen , wie bei den lokalen Anfangswertaufgaben . Ebenso werden die Bedingungsgleichungen (83f) resp. (101) unverändert übernommen . Die wesentliche Aenderung gegenüber der Anfangswertaufgabe besteht darin , dass die Gleichungen (81a) resp. (81b) durch die folgenden Relationen ersetzt werden müssen :

$$\tilde{y}_{k'}(T_i) = \tilde{y}_{1i} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (106a)$$

$$\tilde{z}_{\ell k'}(T_i) = \tilde{z}_{\ell k' i} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (106b)$$

Setzt man die Ansätze (76c) in (106a,b) ein , erkennt man leicht , dass (106a,b) lineare Systeme von je  $n$  Matrizengleichungen in den Koeffizientenmatrizen  $\tilde{y}_{i k'}$  resp.  $\tilde{z}_{\ell k' i}$  ,

\*) falls überhaupt Parameter vom Typ 2 vorhanden sind ...

$i=0,1,\dots,q$  resp.  $q'$  ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  darstellen .

Es ist also bei den lokalen Randwertaufgaben nicht möglich , die ersten  $n$  Koeffizienten wie bei der Anfangswertaufgabe ( siehe (81a,b) ) a priori anzugeben . Vielmehr müssen die Gleichungen (106) zusammen mit den Gleichungen (83f) resp. (83h) resp. (101) ( bei linearen Systemen ) zu einem einzigen Gleichungssystem vereinigt werden , das man dann im wesentlichen nach den in den Kapiteln 2.3.1.1 , 2.3.1.2 Methoden lösen kann .

Im folgenden beschränken wir uns darauf , die Lösungsalgorithmen - ohne die schulmässige Herleitung - anzugeben :

Nicht-lineare lokale Randwertaufgaben

Methode 2.1 : Gleichungssystem (83f) , (106a)

Die Gleichungen (83f) werden - genau wie in (87) - schulmässig linearisiert ; es resultiert , in Analogie zu (90) , ein Iterationsprozess , dessen  $J$ -ter Schritt durch das folgende Matrixgleichungssystem charakterisiert wird :

$$\underline{L_{k'R}^J} \cdot \underline{\tilde{Y}_{k'R}^{J+1}} = \underline{g_{k'R}^J} \quad , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (107)$$

Wobei :  $\underline{\tilde{Y}_{k'R}^{J+1}} := ( \underline{\tilde{y}_{k'0}}, \underline{\tilde{y}_{k'1}}, \dots, \underline{\tilde{y}_{k'q}} ) \quad (107a)$

$$\underline{g_{k'R}^J} := ( \underline{y_{11}}, \underline{y_{12}}, \dots, \underline{y_{1n}}, \underline{g_{k'1R}^J}, \underline{g_{k'2R}^J}, \dots, \underline{g_{k',q+1-n,R}^J} ) \quad (107b)$$

$$g_{k',jR} := f_{k',j}^J - \sum_{\ell=0}^{n-1} p_{\ell j}^J \cdot \tilde{y}_{k'}^J(t_{kj}^+) \quad (107c)$$

$$\Delta T_i := T_i - t_{k'_0} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (107d)$$

$$\underline{L_{k'R}^J} = \begin{bmatrix} E & , \Delta T_1 \cdot E, \dots, (\Delta T_1)^q \cdot E \\ E & , \Delta T_2 \cdot E, \dots, (\Delta T_2)^q \cdot E \\ \vdots & \vdots \\ E & , \Delta T_n \cdot E, \dots, (\Delta T_n)^q \cdot E \\ \underline{L_{k',10}^J}, \underline{L_{k',11}^J}, \dots, \underline{L_{k',1q}^J} \\ \vdots \\ \underline{L_{k',q+1-n,0}^J}, \dots, \underline{L_{k',q+1-n,q}^J} \end{bmatrix} \quad (107e)$$

$$L_{k'ji}^J = - \sum_{\ell=0}^i \frac{i!}{(i-\ell)!} \cdot \Delta t_{k'j}^{i-\ell} \cdot p_{\ell j}^J \quad , \quad \begin{matrix} i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,q+1-n \end{matrix} \quad (107f)$$

Die übrigen in (107..) verwendeten Symbole sind in (86..) und (88a) definiert .

Methode 2.2 : Gleichungssystem (83f) , (106a)

Gelöst wird also das gleiche System wie bei der Methode 2.1 . Dabei werden die Gleichungen (83f) nicht schulmässig , sondern nach (91) linearisiert . Als Lösung erhält man wiederum einen Iterationsprozess , dessen J-ter Iterationsschritt durch das folgende Matrix-Gleichungssystem ( vergleiche (92) ) charakterisiert ist :

$$\underline{M_{k'R}} \cdot \tilde{Y}_{k'R}^{*J+1} = F_{k'R}^J \quad (108)$$

Wobei :  $\tilde{Y}_{k'R}^{*J+1}$  eine Matrix mit  $q+1$  Zeilen und  $d$  Kolonnen , deren  $i+1$ -te Zeile mit  $\tilde{y}_{k'i}$  identisch ist .  
 $F_{k'R}^J$  ist eine Matrix mit  $q+1$  Zeilen und  $d$  Kolonnen . Dabei sind die ersten  $n$  Zeilen identisch mit den Matrizen  $y_{1i}$  ,  $i=1,2,\dots,n$  ( siehe (73c) ; Die letzten  $q+1-n$  Zeilen sind identisch mit den Vektoren  $f_{k'j}^J$  ,  $j=1,2,\dots,q+1-n$  ( siehe (86e) ) .

und :

$$M_{k'R} = \begin{bmatrix} 1, \Delta T_1, \dots, \Delta T_1^{n-1}, \Delta T_1^n, \dots, \Delta T_1^q \\ 1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_2^{n-1}, \Delta T_2^n, \dots, \Delta T_2^q \\ \vdots \\ 1, \Delta T_n, \dots, \Delta T_n^{n-1}, \Delta T_n^n, \dots, \Delta T_n^q \\ 0, 0, \dots, 0, \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 0, \quad M_{k'} \end{bmatrix} \quad (108b)$$

Dabei ist in (108b)  $M_{k'}$  nach (92b) definiert , die  $\Delta T_i$  ,  $i=1,2,\dots,n$  sind durch (107d) gegeben .

Methode 3.2 : Gleichungssystem (83h) , (106a)

Auch dieses Gleichungssystem wird iterativ gelöst . In Analogie zu (94) erhält man :

$$\underline{M'_{k'R}} \cdot \tilde{Y}_{k'R}^{*J+1} = F_{k'}^J \quad , \quad J=1,2,\dots,J^* \quad (109)$$

Dabei ist  $\tilde{Y}_{k'R}^{*J+1}$  schon in (108a) definiert worden .  
 Die Matrix  $M'_{k'R}$  unterscheidet sich von  $M_{k'R}$  nur  
 dadurch , dass in (108b) an Stelle von  $M_k$ , die  
 nach (94b) definierte Matrix  $M'_k$ , zu verwenden  
 ist .

(109a)

$F'_{k'R}{}^J$  ist eine Matrix mit  $q+1$  Zeilen und  $d$  Kolon-  
 nen , deren  $n$  erste Zeilen identisch mit den  $n$   
 ersten Zeilen von  $F_{k'R}{}^J$  sind ( siehe (108a) ) ,  
 deren letzte  $q+1-n$  Zeilen dagegen sind identisch  
 mit der in (94a) definierten Matrix  $F_{k'}{}^J$  .

### Initialisieren

Die durch (107) resp. (108) resp. (109) charakterisierten  
 Iterationsprozesse müssen initialisiert werden . Diese  
 Initialisierung muss sich von der in (95) gegebenen Ini-  
 tialisierung der Anfangswertaufgaben unterscheiden , da  
 die Vektoren  $y_{0i}|$  ,  $i=1,2,\dots,n-1$  nicht gegeben sind .  
 Hingegen kann man immer ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades  
 definieren , das die Bedingungen (73c) erfüllt ( besser :  
 für jede Komponente ... ) .

Bei speziellen Differentialgleichungssystemen der Art

$$\underline{y|^{(n)} = f(t;y|)} \quad (110)$$

kann man als erste Näherung sogar ein  
 Polynom vom Grad  $2 \cdot n - 1$  angeben :

$$y^*(t)| := \sum_{i=0}^{2 \cdot n - 1} y_i^*| \cdot (t - t_{k_0})^i \quad (110a)$$

Dabei sind die Koeffizienten durch die folgenden Gleichungen  
 definiert :

$$y^*(T_i)| = y_{1i}| , \quad y^*(T_i)|^{(n)} = f(T_i, y_{1i}|) , \quad i=1,2,\dots,n \quad (110b)$$

Die Iterationsprozesse (107), (108), (109) werden dann durch

$$\begin{aligned} y_{k'i}| &= y_i^*| , \quad i=0,1,\dots,2 \cdot n - 1 \\ y_{k'i}| &= 0| , \quad i=2 \cdot n, 2 \cdot n + 1, \dots, q \end{aligned} \quad (110c)$$

gestartet .

Bei allgemeineren Aufgaben ist  $y^*(t)|$  nur vom Grad  $n-1$  , die  
 Koeffizienten sind durch (110b)<sub>1</sub> definiert .

Abbruchkriterien

Die Abbruchkriterien (97) können sinngemäss übernommen werden .

Lineare lokale Randwertaufgaben

Sinngemäss gilt das gleiche , wie bei der Lösung der linearen Anfangswertaufgabe : Es lassen sich alle drei Methoden 2.1 , 2.2 , 3.2 zur Lösung der  $n_p$  linearen Randwertaufgaben (74) verwenden . Allerdings gilt auch hier , dass die Methode 3.2 verlangt , dass die  $z_{\ell k'} |^{(n+1)}$  analytisch berechnet werden müssen , was bei einigermaßen anspruchsvollen Aufgaben eine mühsame Angelegenheit ist . Daher schenken wir in diesem Zusammenhang der Methode 3.2 keine Beachtung .

Unverändert kann die Methode 2.2 übernommen werden , wenn man nur  $q$  durch  $q'$  ersetzt .

Die Methode 2.1 lässt sich - analog zu (102) - durch die folgende Matrix-Gleichung beschreiben :

$$\underline{L_{k'R}} \cdot \underline{\tilde{Z}_{\ell k'R}} = \underline{g_{\ell k'R}} \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (111)$$

Wobei für  $\ell=1,2,\dots,n_p$  :

$$\underline{\tilde{Z}_{\ell k'R}} := ( \underline{\tilde{z}_{\ell k'0}}, \underline{\tilde{z}_{\ell k'1}}, \dots, \underline{\tilde{z}_{\ell k'q'}} ) \quad (111a)$$

$$\underline{g_{\ell k'R}} := ( \underline{z_{\ell 11}}, \underline{z_{\ell 12}}, \dots, \underline{z_{\ell 1n}}, \underline{\{f(t'_{k'1})\}_{p_\ell}}, \dots, \underline{\{f(t'_{k'q+1-n})\}_{p_\ell}} ) \quad (111b)$$

$\ell=1,2,\dots,n_p$

Die Matrix  $L_{k'R}$  ist nach (107e) definiert (  $q$  durch  $q'$  ersetzen , Iterationsindex  $J$  weglassen ) .

Wichtig ist auch hier , dass die Matrix  $L_{k'R}$  vom Index  $\ell$  unabhängig ist . Das bedeutet , dass man zur Lösung der  $n_p$  Randwertaufgaben (74) nur ein mal die Matrix  $L_{k'R}$  zu invertieren hat . Die Lösung der  $n_p$  Aufgaben besteht anschliessend nur noch aus den folgenden Matrizenmultiplikationen :

$$\underline{\tilde{Z}_{\ell k'R}} = (\underline{L_{k'R}})^{-1} \cdot \underline{g_{\ell k'R}} \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (112)$$

Die Lösungen der Randwertaufgaben (74) werden lediglich zur Berechnung der Matrix-Elemente  $A^I$  benötigt . Daher kommt man

bei den Funktionen  $\tilde{z}_{\ell k'}(t)$  mit einer geringeren Genauigkeit aus als bei den Funktionen  $\tilde{y}(t)$ .

Diesem Umstand trägt man - genau wie bei der Lösung der Anfangswertaufgabe - durch (104a), (104b) und, falls (73) mit Methode 2.1 gelöst wurde, durch (104c) Rechnung.

In diesem Fall ist es auch günstig, eine Subroutine LRPV21 zu schreiben, in der die Randwertaufgabe (73) und die  $n_p$  Randwertaufgaben (74) in einem Zug gelöst werden.

(In LRPV21 steht L für lokal, R für Randwertproblem, P für Primärgleichungen V für Variationsgleichungen und 21 schliesslich für Methode 2.1).

Diese und weitere Subroutinen zur Lösung von lokalen Randwertaufgaben sind in Tabelle 8 beschrieben. Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf die folgenden Aufgaben:

$$y^{(2)} = f(t; y) \mid, \quad y(T_1) \mid = y_{11} \mid, \quad y(T_2) \mid = y_{12} \mid \quad (113)$$

Tabelle 8

Subroutinen zur Lösung von lokalen Randwertaufgaben der Art (113)	
Name	Kurzbeschreibung
INITR	Initialisieren der Iterationsprozesse (107), (108) resp. (109) nach (110a,b,c).
LOKR21 LOKR22 LOKR32	Iterative Lösung der Gleichungssysteme (83f) + (106a) resp. (83h) + (106a) nach (107), (108) resp. (109). Als Resultat erhält man in allen 3 Fällen: $H_{k'}^i \cdot \tilde{y}_{k',i} \mid, \quad i=0,1,\dots,q$ Als Abbruchkriterien dienen (97a,b,c), wobei bei Methode 2.1 (97a) nur für $j=(q-1)/2$ geprüft wird.
LRPV21	Lokale Lösung von Randwertaufgaben (113) nach der Methode 2.1. Zusätzlich Lösung von $n_p$ zugeordneten Variationsgleichungssystemen (74) nach (113), wobei $(L_{k',R})^{-1} = (L_{k',R}^{J*})^{-1}$ .

Einige Bemerkungen zu Tabelle 8

- In INITR wird zusätzlich geprüft , ob die Epochen  $T_i$  ,  $i=1,2,\dots,n$  mit einem der in (83f) resp. (83h) verwendeten Teilpunkte identisch sind . Trifft dies zu werden Indices gleich 1 gesetzt und den Subroutinen LOKR.. übergeben , was zu einer Reduktion der Rechenzeiten führt .
- Problematisch ist auch hier die in den Abbruchkriterien (97) gebrauchte Grösse  $\varepsilon$  . Man weist aber leicht nach , dass für die speziellen Probleme (113) die Abschätzung (B5.10) für alle Methoden ( 2.1 , 2.2 , 3.2 ) übernommen werden darf :

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 / (10 \cdot H_k^2) , \quad q \leq 14 , \quad \text{Methoden 2.1, 2.2, 3.2} \quad (114)$$

- Dabei ist  $\varepsilon_0$  ( siehe (B5.4) ) der maximale in den Komponenten des Lösungsvektors  $y(t)$  tolerierte Fehler .
- Zur Lösung von Randwertproblemen werden zusätzlich zu den Programmen der Tabelle 8 die in Tabelle 4 beschriebenen Unterprogramme SETDT , YPOL , HILF gebraucht . Vom Programmbenützer zu schreiben sind die problemspezifischen Unterprogramme DERIV , MATP , DFDTP ( siehe Tabelle 4 ) sowie DFDPL ( siehe Tabelle 7 ) . Dabei ist DFDPL nur dann zu programmieren , falls LRPV21 gebraucht wird , und falls Parameter vom Typ 2 zu bestimmen sind .
  - Die Subroutinen LOKR21 , LOKR22 , LOKR32 haben ungefähr den Umfang der in Beispiel 5 wiedergegebenen Subroutine LOKA21 ; LRPV21 dagegen ist ca um 1/3 länger . Die Subroutinen und die zugehörigen Beschreibungen können auf Wunsch beim Autor bezogen werden . Wir verzichten daher darauf , an dieser Stelle eine der Subroutinen wiederzugeben .

Als Illustration für die lokale Lösung von Randwertaufgaben wählen wir wiederum das gleiche Differentialgleichungssystem wie in Beispiel 5 ( Einkörperproblem ) :

Beispiel 6 : Lokale Lösung des Einkörperproblems als Randwert-  
aufgabe mit den Integrationsmethoden 2.1 , 2.2 , 3.2

Aufgabe :

$$\begin{aligned} \text{Gegeben : } \vec{r}^{(2)} &= -k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, k=.01720209895 \\ \vec{r}(T_i) &= \vec{r}_{1i}, i=1,2 \\ T_1 &= -H_{k_1}/2, T_2 = H_{k_1}/2 \\ t_{k_0} &= (T_1 + T_2)/2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B6.1a})$$

Transformation :  $\vec{r}(t) := y_1(t) \cdot \vec{r}_{11} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{12}$  (B6.1b)

Mit  $(y(t)|)^T := (y_1(t), y_2(t))$  folgt : (B6.1c)

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= -k^2 \cdot \frac{y}{r^3}, s_1 := \vec{r}_{11}^2, s_2 := \vec{r}_{12}^2 \\ r &= (s_1 \cdot y_1^2 + s_2 \cdot y_2^2 + 2 \cdot s_3 \cdot y_1 \cdot y_2)^{1/2}, s_3 := \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{12} \end{aligned} \quad (\text{B6.1d})$$

(B6.1)

und :  $(y(T_1)|)^T = (1,0), (y(T_2)|)^T = (0,1)$  (B6.1e)

Ansatz :  $\tilde{y}_{k,i}(t) := \sum_{i=0}^q \tilde{y}_{k,i} \cdot (t-t_{k_0})^i$  (B6.1f)

Gesucht : Eine Tabelle , die die Maxima (B5.1b) für  $q=5,7,9$  ,  
die Methoden 2.1 , 2.2 , 3.2 , und für  
 $H_{k_1} := 40, 80, 120$  Tage enthält .  
Die Vektoren  $\vec{r}_{1i}, i=1,2$  sind so zu wählen , dass sie  
elliptischen Bahnen mit Halbachsen  $a=2.7$  A.E. und  
Exzentrizitäten  $e = .0, .2, .4, .6$  und  $.8$  entsprechen .  
 $t_{k_0}$  , der Mittelpunkt des Intervalles  $I_{k_1}$  , sei ein-  
mal identisch mit der Periheldurchgangszeit , einmal  
mit der Apheldurchgangszeit .

Bemerkungen zur Aufgabe (B6.1)

- Das Differentialgleichungssystem ( siehe (B6.1d) , (B5.1f) ) ist formal identisch mit dem Differentialgleichungssystem von Aufgabe 5 . Das bedeutet , dass die Subroutinen DERIV , MATP , DFDTP von Beispiel 5 unverändert übernommen werden können .
- Selbstverständlich haben die  $s_1, s_2, s_3$  und somit die Lösungsvektoren  $y(t)|$  in den Beispielen 5 , 6 verschiedene Bedeutungen . In Beispiel 5 sind die Komponenten von  $y(t)|$  identisch mit den in der Literatur wohlbekannten Funktionen  $F(t)$  ,  $G(t)$  ( siehe z.B. {K.Stumpff, Bd.I, §40} ) , in Beispiel 6 sind sie identisch mit den bei der Gauss'schen Bahnbestimmung verwendeten Funktionen  $n_i(t)$  ,  $i=1,3$  ( siehe z.B. {K.Stumpff, Bd.I, §79} ) .
- In Beispiel 5 haben wir  $\epsilon_0$  ( siehe (B5.4) , (B5.13) ) gleich  $10^{-14}$  gesetzt ; wir haben anschliessend gesehen , dass dies für die meisten Beispiele - in Anbetracht der mit dem Ansatz (B6.1f) erreichbaren

Genauigkeiten - stark übertrieben war . Daher beschränken wir uns in diesem Beispiel auf

$$\underline{\varepsilon_0 = 10^{-7}} \tag{B6.2}$$

Natürlich müssen wir jetzt damit rechnen , dass wir in einigen Fällen nicht mehr mit den Tabellen 5a,b vergleichbar gute Resultate erzielen werden ; dafür erwarten wir einen geringeren Rechenaufwand .

Resultate ( Tabellen 9a,b , 10a,b )

- Die Resultate der Methoden 2.1 und 2.2 sind nahezu identisch ; sie konnten somit in den Tabellen 9a,b zusammengefasst werden .
- Dass die Resultate in Anbetracht der verlangten Genauigkeit (B6.2) fast "zu gut" sind , liegt an der sehr schnellen Konvergenz der verwendeten Methoden in den günstigen Fällen ( Approximation im Aphel , kleine Exzentrizitäten+Approximation im Perihel ) .
- Vergleicht man die Tabellen 9a,b mit den Tabellen 5a,b , stellt man für Fehler  $\geq 10^{-10}$  - mit zwei weiter unten diskutierten Ausnahmen - eine sehr gute Uebereinstimmung fest . Diese Uebereinstimmung wäre praktisch vollkommen ( auch für die kleinsten Fehler ) , wenn wir als Genauigkeit (B5.13) und nicht (B6.2) gefordert hätten . Von der Qualität der Approximation her gesehen ist es also unerheblich , ob eine Aufgabe als Anfangs- oder als Randwertaufgabe formuliert wird .
- Durch Verwendung von (B6.2) an Stelle von (B5.13) erreicht man - vor allem bei Bahnen mit kleinen Exzentrizitäten und bei den Approximationen im Aphel - eine beträchtliche Reduktion der Rechenzeiten . So ist beispielsweise bei der Methode 2.1 in Tabelle 10b die Anzahl der nötigen Iterationsschritte beim Prozess (107) immer = 1 (!) . Im übrigen ist nicht zu übersehen , dass der Rechenaufwand pro Iterationsschritt ( bei gleichem Polynomgrad q ) in Beispiel 6 etwas grösser ist , als in Beispiel 5 . Dies hängt damit zusammen , dass bei den Randwertaufgaben die zu invertierenden Matrizen grössere Dimension haben als bei den Randwertaufgaben .
- Schwierigkeiten stellten sich offensichtlich bei den Approximationen der beiden folgenden Bahnstücke ein :

$$e = .8 \quad , \quad H_{k_1} = 80 \tag{B6.3a}$$

$t_{k_0} =$  Periheldurchgangszeit

$$e = .8 \quad , \quad H_{k_1} = 120 \tag{B6.3b}$$

Die hier erzielten Approximationen sind wesentlich schlechter als in den entsprechenden Fällen von Beispiel 5 .

Der Grund ist darin zu suchen , dass

- a. durch die Problemstellung (B6.1a) effektiv keine eindeutige Lösung definiert ist , und dass
- b. die Initialisierung (110a,b,c) nicht in allen Fällen gut genug ist , um die richtige Lösung "anzupeilen" .

Diese Schwierigkeiten werden verständlich , wenn wir die geometrische Situation für beide Fälle (B6.3a,b) in der Bahnebene skizzieren :

Tabelle 9a

$t_{k_0}' =$  Periheldurchgangszeit

$H_{k_0}'$	e	Maximale Fehlerbeträge in den Komponenten von $\vec{r}(t)$ , $t \in I_{k_0}'$		
		q = 5	q = 7	q = 9
40	.0	$2 \cdot 10^{-10} / 9 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-12} / 2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12} / 2 \cdot 10^{-12}$
80		$2 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-9} / 5 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-9} / 9 \cdot 10^{-11}$
120		$2 \cdot 10^{-7} / 6 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-11} / 1 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-15} / 1 \cdot 10^{-9}$
40	.2	$1 \cdot 10^{-8} / 4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-11} / 2 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-13}$
80		$9 \cdot 10^{-7} / 2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-12} / 1 \cdot 10^{-11}$
120		$1 \cdot 10^{-4} / 3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6} / 9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8} / 5 \cdot 10^{-5}$
40	.4	$3 \cdot 10^{-7} / 9 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10} / 1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-12} / 3 \cdot 10^{-11}$
80		$2 \cdot 10^{-5} / 5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7} / 3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-9} / 3 \cdot 10^{-8}$
120		$2 \cdot 10^{-4} / 5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6} / 6 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-8} / 1 \cdot 10^{-6}$
40	.6	$1 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7} / 2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-9} / 3 \cdot 10^{-8}$
80		$5 \cdot 10^{-4} / 1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-7} / 2 \cdot 10^{-5}$
120		$3 \cdot 10^{-3} / 1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4} / 4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-4}$
40	.8	$2 \cdot 10^{-3} / 5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4} / 2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5} / 2 \cdot 10^{-4}$
80		$7 \cdot 10^{-1} / 5 \cdot 10^{0*})$	$6 \cdot 10^{-1} / 1 \cdot 10^{1*})$	$6 \cdot 10^{-1} / 2 \cdot 10^{-2}$
120		$1 \cdot 10^0 / 1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0 / 1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0 / 1 \cdot 10^0$

Tabelle 9b

$t_{k_0}' =$  Apheldurchgangszeit

$H_{k_0}'$	e	Maximale Fehlerbeträge in den Komponenten von $\vec{r}(t)$ , $t \in I_{k_0}'$		
		q = 5	q = 7	q = 9
40	.2	$2 \cdot 10^{-10} / 4 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-14} / 3 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-14} / 7 \cdot 10^{-14}$
80		$1 \cdot 10^{-8} / 3 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-11} / 5 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-13}$
120		$1 \cdot 10^{-7} / 3 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-10} / 1 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-10} / 3 \cdot 10^{-12}$
40	.4	$3 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-15} / 3 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-16} / 2 \cdot 10^{-12}$
80		$2 \cdot 10^{-9} / 6 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-12} / 3 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-13} / 4 \cdot 10^{-12}$
120		$2 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-11} / 8 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-11} / 5 \cdot 10^{-12}$
40	.6	$2 \cdot 10^{-11} / 6 \cdot 10^{-10}$	$7 \cdot 10^{-16} / 2 \cdot 10^{-12}$	$9 \cdot 10^{-16} / 2 \cdot 10^{-12}$
80		$1 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-13} / 5 \cdot 10^{-12}$	$9 \cdot 10^{-13} / 2 \cdot 10^{-12}$
120		$2 \cdot 10^{-8} / 4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-11} / 6 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11} / 2 \cdot 10^{-12}$
40	.8	$3 \cdot 10^{-11} / 9 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-15} / 1 \cdot 10^{-12}$	$9 \cdot 10^{-16} / 1 \cdot 10^{-12}$
80		$2 \cdot 10^{-9} / 6 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-13} / 1 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-13} / 9 \cdot 10^{-13}$
120		$2 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-11} / 3 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-11} / 1 \cdot 10^{-13}$

In den Tabellen 9a,b bezieht sich die erste Zahl auf die Methoden 2.1 und 2.2, die zweite auf die Methode 3.2.

\*) Keine befriedigende Lösung bei Methode 3.2.

Tabelle 10a, 10b

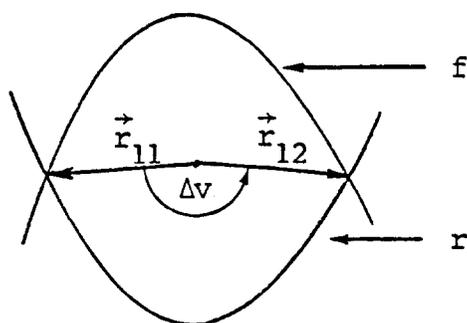
a.)  $t_{k_0} =$  Perldurchgangszeit

$H_{k_0} e$	Rechenzeiten (sec)			Anzahl Aufrufe von DIRIV			Anzahl Aufrufe von MWTP		
	q = 5	q = 7	q = 9	q = 5	q = 7	q = 9	q = 5	q = 7	q = 9
40	3/1/1	7/2/2	13/4/5	5/8/2	7/14/5	9/20/8	5//6	7//9	9//12
80	3/1/2	7/4/3	13/6/7	5/12/2	7/22/6	9/32/12	5//8	7//12	9//20
120	6/2/2	14/4/4	27/7/8	10/14/2	14/26/8	18/38/14	10//10	14//18	18//24
40	3/1/1	7/3/3	13/5/6	5/10/2	7/18/6	9/26/10	5//6	7//12	9//16
80	6/2/2	14/4/4	27/7/8	10/14/2	14/26/8	18/38/14	10//10	14//18	18//24
120	6/2/2	14/5/5	27/9/10	10/18/2	14/34/10	18/50/18	10//12	14//24	18//32
40	6/1/2	14/4/4	27/6/7	10/12/2	14/22/7	18/32/12	10//8	14//15	18//20
80	6/2/2	14/5/5	27/9/11	10/18/2	14/34/10	18/50/18	10//12	14//24	18//32
120	9/3/3	21/7/7	40/13/15	15/26/2	21/50/14	27/74/26	15//16	21//36	27//48
40	6/2/2	14/5/5	27/4/10	10/18/2	14/34/9	18/50/18	10//12	14//21	18//32
80	9/4/3	21/9/10	40/17/20	15/34/2	21/66/18	27/98/34	15//16	21//48	27//64
120	13/8/3	29/19/25	58/36/41	20/72/2	28/142/46	36/212/70	20//18	28//132	36//136
40	12/7/3	28/16/21	55/29/34	70/60/2	28/118/37	36/176/58	20//18	28//105	36//112
80	16/13/4	38/29/30	72/52/60	25/102/2	35/202/52	45/302/102	25//22	35//150	45//200
120	16/13/4	38/29/30	72/52/60	25/102/2	35/202/52	45/302/102	25//22	35//150	45//200

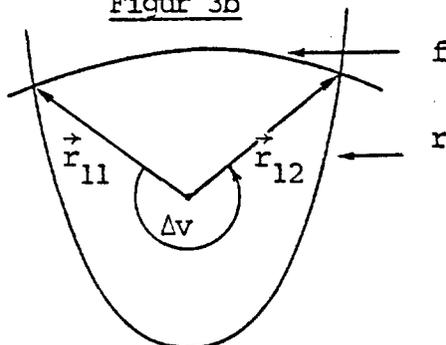
b.)  $t_{k_0} =$  Apheldurchgangszeit

40	3/1/1	7/2/2	13/4/5	5/8/2	7/14/5	9/20/8	5//4	7//9	9//12
80	3/1/1	7/3/3	13/5/6	5/10/2	7/18/6	9/26/10	5//6	7//12	9//16
120	3/1/2	7/3/3	13/6/7	5/12/2	7/22/7	9/32/12	5//8	7//15	9//20
40	3/1/1	7/2/2	13/4/4	5/6/2	7/10/4	9/14/6	5//4	7//6	9//8
80	3/1/1	7/2/2	13/4/5	5/8/2	7/14/5	9/20/8	5//6	7//12	9//16
120	3/1/1	7/3/3	13/5/6	5/10/2	7/18/6	9/26/10	5//6	7//12	9//16
40	3/1/1	7/2/2	13/4/4	5/6/2	7/10/4	9/14/6	5//4	7//6	9//8
80	3/1/1	7/2/2	13/4/5	5/8/2	7/14/5	9/20/8	5//6	7//12	9//16
120	3/1/1	7/3/3	13/5/6	5/10/2	7/18/6	9/26/10	5//6	7//12	9//16
40	3/1/1	7/2/2	13/4/4	5/6/2	7/10/2	9/14/6	5//4	7//6	9//8
80	3/1/1	7/2/2	13/4/5	5/8/2	7/14/5	9/20/8	5//6	7//12	9//16
120	3/1/1	7/3/3	13/5/6	5/10/2	7/18/6	9/26/10	5//6	7//12	9//16

Figur 3a



Figur 3b



Legende

r : "richtige" Lösung

f : "falsche" Lösung

$\vec{r}_{1i}$  : Gegebene Randvektoren (  $i=1,2$  )

$\Delta v$  : Der in der "richtigen" Bahn in der Zeit (  $T_2 - T_1$  ) überstrichen Winkel . Dabei gilt :

$\Delta v = 175^\circ$  in Figur 3a ,

$\Delta v = 209^\circ$  in Figur 3b .

Der Fall (B6.3a) ist offensichtlich besonders problematisch , da die beiden Randvektoren nahezu kollinear sind . Dies hat zur Folge , dass bei der Methode 3.2 in den in Tabelle 9a mit \*) markierten Fällen effektiv keine vernünftige Lösung gefunden wird .

Im Fall (B6.3b) hingegen wird von allen Methoden konsequent die "falsche Lösung" approximiert !

- Wie umgeht man Probleme dieser Art ?

Nennenswert sind zwei Auswege :

a. Man definiert eine gegenüber (110a,b,c) verbesserte Initialisierung . Dies bedeutet allerdings , dass man über gewisse a priori-Kenntnisse des Lösungsvektors  $y(t) |$  verfügen muss .

b. Man besteht nicht darauf , die Endpunkte des Intervalles  $I_k$  , als  $T_i, i=1,2$  (siehe (73c)) zu wählen .

Setzt man im speziellen Beispiel  $T_1 = -H_k/4, T_2 = H_k/4$  (B6.4)

sind alle Schwierigkeiten beseitigt , und man erhält auch für die beiden Fälle (B6.3) mit Tabelle 5a vergleichbare Resultate .

Auf die beiden Beispiele 5 und 6 zurückblickend können wir festhalten :

1. Durch die Approximationsansätze (76) lassen sich - lokal - relativ lange Bahnstücke zufriedenstellend approximieren ; dies unabhängig davon , ob eine Aufgabe als Anfangs- oder als Randwertproblem formuliert wurde .
2. Die Approximation ist im Aphel wesentlich günstiger als im Perihel .
3. Bei stark exzentrischen Bahnen ist es sinnlos , in Aphel und Perihel die gleichen Intervalllängen zu verwenden .
4. Der Rechenaufwand steigt mit der Verlängerung des Intervalles und bei der Erhöhung des Polynomgrades (siehe Tabellen 6a,b , 9a,b) . Daher ist es häufig vernünftiger , ein Intervall zu unterteilen , und nicht den Polynomgrad zu erhöhen - darauf werden wir in Kapitel 2.3.4.2 zurückkommen .

### 2.3.3 ALLGEMEINE LÖSUNG DER ANFANGSWERTAUFGABE

In Kapitel 2.3.1 haben wir erläutert , wie die Anfangswertaufgaben (73) , (74) in demjenigen Teilintervall  $I_{k'}$  , zu lösen sind , in dem sich die Ausgangsepoche  $T_0$  befindet ( siehe (73b) ) .

Im volliegenden Kapitel müssen wir uns mit der approximativen Lösung von (73) , (74) in den übrigen Teilintervallen  $I_k$  ,  $k=1,2,\dots,m_t$  ,  $k \neq k'$  beschäftigen .

Da die Ueberlegungen zur Lösung der  $n_p$  Aufgaben (74) identisch mit denjenigen zur Lösung von (73) sind , können wir uns hier auf die Diskussion der allgemeinen Lösung von (73) beschränken .

Die Lösungsansätze haben wir schon in (76c) vorweggenommen :

$$t \in I_k : \tilde{y}(t) | := \tilde{Y}_k(t) | = \sum_{i=0}^q \tilde{Y}_{ki} | \cdot (t-t_{k_0})^i \quad (115)$$

$\tilde{Y}_k(t) |$  ist die numerische Approximation von  $y(t) |$  im Intervall  $I_k$  . Es geht also - genau gleich wie im Intervall  $I_{k'}$  , - "nur" noch darum , die Koeffizienten  $\tilde{Y}_{ki} | , i=0,1,\dots,q$  zu bestimmen .

Ganz offensichtlich könnten wir die in Kapitel 2.3.1.1 entwickelten Methoden 2.1 , 2.2 , 3.2 unverändert übernehmen , wenn wir an irgendeiner Stelle  $t_{k_0}$  des Intervalles  $I_k$  die Funktionswerte  $y(t_{k_0}) |^{(i)}$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  angeben könnten . Dies ist natürlich nicht möglich ; wir können aber - zunächst in den  $I_k$  , angrenzenden Intervallen  $I_{k'+1}$  an den Stellen  $t_{k'+1}^*$  resp.  $t_k^*$  , ( siehe (76a) ) - gleichwertige Information angeben , indem wir verlangen , dass die approximierende Funktion  $\tilde{y}(t) |$  und deren (n-1) erste Ableitungen an den Stellen  $t_{k'+1}^*$  ,  $t_k^*$  , stetig sind ( man überlegt sich leicht , dass  $\tilde{y}(t) |$  dann in jedem Punkt t des Intervalles I stetig und mindestens (n-1) mal differenzierbar ist ) .

Die Forderung der Stetigkeit der n-1 ersten Ableitungen führt zu den Bedingungsgleichungen :

$$\tilde{Y}_{k'+1}(t_{k'+1}^*) |^{(i)} = \tilde{Y}_k(t_{k'+1}^*) |^{(i)} , i=0,1,\dots,n-1 \quad (116)$$

$$\text{resp. } \underline{\tilde{y}_{k'-1}(t_{k'}^*) |^{(i)}} = \tilde{y}_{k'}(t_{k'}^*) |^{(i)}, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (117)$$

Die rechten Seiten von (116) , (117) sind bekannt , falls die Anfangswertaufgabe (73) in  $I_k$  , gelöst worden ist .

Setzt man nun

$$t_{(k'+1)_0} := t_{k'+1}^* \quad \text{und} \quad t_{(k'-1)_0} := t_{k'}^* , \quad (118)$$

erhält man durch

Einsetzen von (115) in (116) resp. (117) direkt die ersten n Koeffizientenmatrizen  $\tilde{y}_{ki} |$  ,  $i=0,1,\dots,n-1$  für  $k=k'-1$  und  $k=k'+1$  :

$$\tilde{y}_{k'+1,i} | = \tilde{y}_{k'}(t_{k'+1}^*) |^{(i)} / i! , \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (119a)$$

$$\tilde{y}_{k'-1,i} | = \tilde{y}_{k'}(t_{k'}^*) |^{(i)} / i! , \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (119b)$$

Die Gleichungen (119a,b) sind die den Gleichungen (81a) entsprechenden Beziehungen in den Intervallen  $I_{k' \pm 1}$  . Die übrigen Koeffizienten  $\tilde{y}_{k' \pm 1,i} |$  ,  $i=n,n+1,\dots,q$  werden nun völlig analog wie in Kapitel 2.3.1.1 bestimmt : Wir fordern , dass die Funktionen  $\tilde{y}_k(t) |$  das Differentialgleichungssystem (73a) an  $q+1-n$  verschiedenen Stellen des Intervalles  $I_k$  exakt erfüllen , oder wir fordern , dass diese Funktionen an  $(q+1-n)/2$  Stellen des Intervalles  $I_k$  das Differentialgleichungssystem und dessen erste Ableitung nach der Zeit  $t$  exakt erfüllen ; dies für  $k=k'+1$  und  $k=k'-1$  :

Methode 2 : ( siehe (83f) ) :

$$\underline{\tilde{y}_k(t_{kj}^+) |^{(n)} = f(t_{kj}^+; \tilde{y}_k(t_{kj}^+) |, \dots, \tilde{y}_k(t_{kj}^+) |^{(n-1)}) |} \quad (120)$$

$$j = 1, 2, \dots, q+1-n , \quad k=k' \pm 1$$

Methode 3 : ( siehe (83h) ) :

$$\tilde{y}_k(t_{kj}^*) |^{(n)} = f(t_{kj}^*; \tilde{y}_k(t_{kj}^*) |, \dots, \tilde{y}_k(t_{kj}^*) |^{(n-1)}) | \quad (121)$$

$$\tilde{y}_k(t_{kj}^*) |^{(n+1)} = f(t_{kj}^*; \tilde{y}_k(t_{kj}^*) |, \dots, \tilde{y}_k(t_{kj}^*) |^{(n-1)}) |^{(1)}$$

$$j = 1, 2, \dots, (q+1-n)/2 , \quad k=k' \pm 1$$

Die Koeffizienten  $\tilde{y}_{ki} |$  ,  $i=n,n+1,\dots,q$  erhält man , indem man den Ansatz (115) in (120) resp. (121) einsetzt , und die so resultierenden ( im allgemeinen nicht linearen ) Gleichungssysteme nach den  $\tilde{y}_{ki} |$  ,  $i=n,n+1,\dots,q$  auflöst .

Die Methoden zur Lösung von (120) sind identisch mit den Methoden zur Lösung von (83f) ( Methoden 2.1 , Methoden 2.2 ) , die Methoden zur Lösung von (121) sind identisch mit der Methode zur Lösung von (83h) ( Methode 3.2 ) .

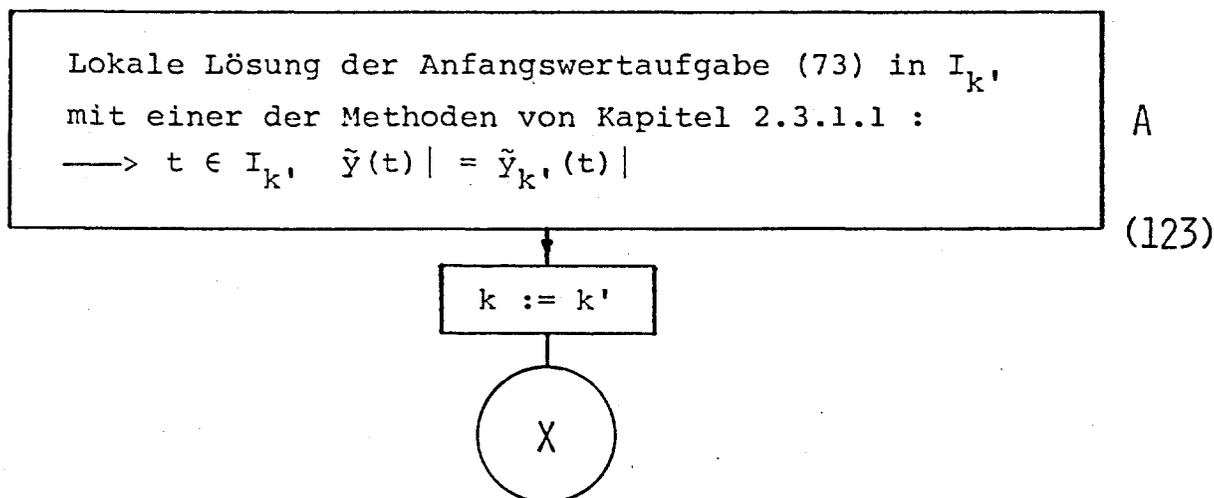
Damit haben wir bereits die Lösung  $\tilde{y}(t)|$  in den Teilintervallen  $I_{k'-1}, I_{k'}, I_{k'+1}$  definiert . Das weitere Vorgehen dürfte jetzt klar sein : Man verlangt Stetigkeit und  $n-1$  - fache Differenzierbarkeit der Funktion  $\tilde{y}(t)|$  in allen Teilpunkten  $t_k^*$  ,  $k=(1), 2, \dots, m_t-1, (m_t)$  . Dadurch erhält man in jedem Teilintervall Bedingungsgleichungen der Art (116) resp. (117) und darauffolgend Gleichungen der Art (119a,b) . Die restlichen Koeffizienten folgen dann durch Lösung der Gleichungen (120) resp. (121) nach den diversen in Kapitel 2.3.1.1 entwickelten Methoden .

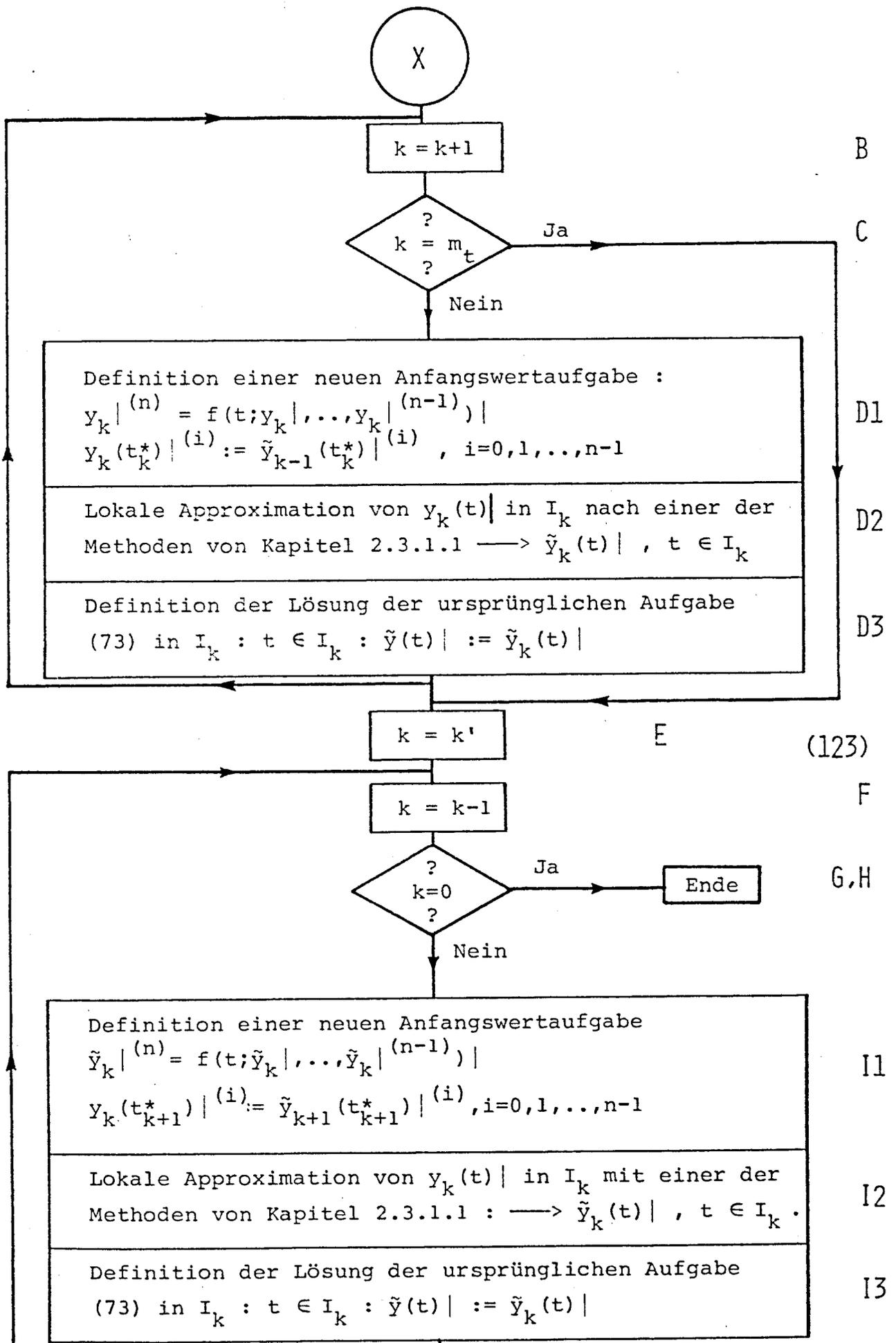
Wegen der Gleichungen vom Typ (119) dürfen wir auch sagen , dass  $\tilde{y}(t)|$  im Intervall  $I_k$  eine lokale Approximation im Sinne von 2.3.1.1 des folgenden Anfangswertproblems ist :

$$\left. \begin{aligned} y_k |^{(n)} &= f(t; y_k |, \dots, y_k |^{(n-1)}) | \\ y_k(t_k^*) |^{(i)} &= \tilde{y}_{k-1}(t_k^*) |^{(i)} , \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad \text{für } k > k' \\ \text{resp.} \\ y_k(t_{k+1}^*) |^{(i)} &= \tilde{y}_{k+1}(t_{k+1}^*) |^{(i)} , \quad i=\dots \quad \text{für } k < k' \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Damit können wir die Lösung der Anfangswertaufgabe (73) im folgenden Schema fixieren :

Allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe (73) in I





\*)  $t_k^*$ ,  $k=1,2,\dots,m_t$  : Teilpunkte des Intesvalles I nach (76a,b)

Kommentare zum Blockschema (123)

- Es dürfte einleuchten , dass man die allgemeine Lösung der lokalen Randwertaufgabe ( siehe Kapitel 2.3.2 ) praktisch auf gleiche Weise gewinnt :

Man muss lediglich in Block A in Schema (123) die lokale Randwertaufgabe in  $I_k$ , nach den Methoden von Kapitel 2.3.2 lösen . Die restlichen Blöcke von (123) können dann unverändert übernommen werden .

- In den Blöcken D2 und I2 müssen die Anfangswertaufgaben D1 lokal mit einer der Methoden von Kapitel 2.3.1.1 gelöst werden .

Selbstverständlich können die zugehörigen Iterationsprozesse weiterhin ( sinngemäss ) nach (95) initialisiert werden . Wesentlich besser sind jedoch die folgenden

Ansätze :

$$k > k' : J := 1 : \tilde{y}_{ki}^J | := \tilde{y}_{k-1} (t_k^*) |^{(i)} / i! , i=0,1,\dots,q \quad (124a)$$

$$k < k' : J := 1 : \tilde{y}_{ki}^J | := \tilde{y}_{k+1} (t_{k+1}^*) |^{(i)} / i! , i=0,1,\dots,q \quad (124b)$$

Die Initialisierung (124) ist (95) weit überlegen : Verwendet man (124) und Methode 2.1 , ist es praktisch nie nötig , mehr als einen Iterationsschritt zu machen . Es gilt also im Normalfall ( bei Verwendung der Methode 2.1 )  $J^* = 1$  ( siehe (97) ) . Selbstverständlich gilt dies nur , falls die Intervallunterteilung (76a,b) "vernünftig" gewählt wurde ; damit werden wir uns in Kapitel 2.3.4.2 zu befassen haben .

- Das Schema zur allgemeinen Lösung der  $n_p$  linearen Anfangswertaufgaben (74) unterscheidet sich nur in unwesentlichen formalen Details von (123) ; es ist daher hier nicht gesondert aufgeführt .
- Programmtechnisch unterscheidet sich die Integration in positiver Zeitrichtung (  $k > k'$  ) nur unwesentlich von der Integration in negativer Zeitrichtung (  $k < k'$  ) : Bei der lokalen Lösung von I1 hat man bloss die Zeiten  $t_k^*$  ,  $t_{k+1}^*$  in ihrer logischen Bedeutung ( gegenüber der Lösung von D1 ) miteinander zu vertauschen !

### 2.3.4 FEHLERBETRACHTUNGEN , AUTOMATISCHE INTERVALLEINTEILUNG

---

Bisher haben wir stets angenommen , dass die Unterteilung des Intervalles  $I$  ( siehe (76a,b) ) von vornherein gegeben ist .

Zieht man die Beispiele 5 und 6 in Betracht , so sieht man , dass es eine fast unlösbare Aufgabe ist , für beliebige Probleme eine sinnvolle Intervallunterteilung a priori anzugeben ( natürlich gibt es Spezialfälle , in denen dies möglich ist - beispielsweise ist es bei kreisähnlichen Bahnen sinnvoll ,  $I$  in Teilintervalle gleicher Länge zu unterteilen ) .

Ziel dieses Abschnittes aber ist es , für die Aufgaben der Himmelsmechanik zum mindesten , für beliebige Intervalle  $I$  im Laufe der Integration eine sinnvolle , automatische (d.h. programmgesteuerte) Intervalleinteilung vorzunehmen .

Ueberlegungen dieser Art sind eng mit den Fehlern der numerischen Approximation gekoppelt . Wir kommen daher nicht darum herum , einige Fehlerbetrachtungen anzustellen . Dabei werden wir völlig von den bei jeder numerischen Integration auftretenden Rundungsfehlern absehen ; de facto nehmen wir also an , dass alle auftretenden Zahlen durch "unendlich viele Ziffern" dargestellt werden - in Anbetracht von (69) bestimmt leicht übertrieben .

Wir unterscheiden zwischen dem lokalen und dem globalen Fehler :

a. Lokaler Fehler :

$$\Delta y_k(t) | := y_k(t) | - \tilde{y}_k(t) | , \quad t \in I_k \quad (125a)$$

b. Globaler Fehler :

$$\Delta y(t) | := y(t) | - \tilde{y}(t) | , \quad t \in I \quad (125b)$$

Zur Erinnerung :  $y(t) |$  resp.  $y_k(t) |$  sind die exakten Lösungen der Anfangswertaufgaben (73) resp. (123), D1 oder I1 ;  $\tilde{y}(t) |$  resp.  $\tilde{y}_k(t) |$  sind die numerischen Approximationen der entsprechenden exakten Lösungen .

### 2.3.4.1 DIE LOKALEN FEHLER

Zur Vereinfachung der Schreibweise beschränken wir uns hier und im folgenden auf die Integration in positiver Zeitrichtung, also auf die Integration in den Teilintervallen  $I_k$ ,  $k=k', k'+1, \dots, m_t$ .

Die lokale Approximation  $\tilde{y}_k(t)|$  wird gebraucht, um im Punkt  $t_{k+1}^*$  die Anfangsbedingungen  $\tilde{y}_k(t_{k+1}^*)|^{(i)}$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  für die Anfangswertaufgabe des nächsten Teilintervalles  $I_{k+1}$  zu berechnen (siehe (123), D1). Es ist daher von grösster Bedeutung, zuverlässige Abschätzungen für die lokalen Fehler  $\Delta y_k(t_{k+1}^*)|^{(i)}$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  herzuleiten:

$\tilde{y}_k(t)|$  ist für  $t \in I_k$  - bis auf Terme der Ordnung  $q+1$  in  $H_k$  - identisch mit einer Taylorreihe bis und mit Ordnung  $q$ . Um den Fehler dieser Approximation möglichst gut abzuschätzen, müssten wir die Ableitungen  $y_k(t)|^{(q+1)}$  im Intervall  $I_k$  abschätzen. Für diese Grössen aber liefert unsere numerische Approximation  $\tilde{y}_k(t)|$  keine Näherungswerte. Hingegen dürfen wir die  $y_k(t)|^{(i)}$ ,  $i=0, 1, \dots, q$  - bis auf Terme der Ordnung  $q+1-i$  in  $H_k$  - den  $\tilde{y}_k(t)|^{(i)}$ ,  $i=0, 1, \dots, q$  gleichsetzen. Was liegt also näher, als die Beträge der  $\Delta y_k(t_{k+1}^*)|^{(i)}$  mit dem letzten Term der Entwicklung (76c) (für  $t=t_{k+1}^*$ ) abzuschätzen? Es ist klar, dass dies eine sehr pessimistische Abschätzung ist, ist der letzte Term von (76c) doch im wesentlichen gleich dem Fehler der nach den Termen  $q-1$  - ter Ordnung abgebrochenen Taylorreihe von  $y_k(t)|$  (entwickelt um  $t_k^*$ ).

Wir dürfen also annehmen, dass die folgenden Ungleichungen gelten:

$$|\Delta y_{k,j}^{(i)}(t_{k+1}^*)| \leq \frac{q!}{(q-i)!} \cdot |\tilde{y}_{kq,j}| \cdot H_k^{q-i}, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (126)$$

$j=1, 2, \dots, d$

(126) liefert für die automatische Intervallunterteilung den entscheidenden Zusammenhang zwischen dem lokalen Fehler (auf der linken Seite) und der Intervalllänge  $H_k$  (auf der rechten Seite):

### 2.3.4.2 AUTOMATISCHE INTERVALLUNTERTEILUNG

Sei :  $\epsilon_{ki}$  : Der maximal in den Komponenten von  $\tilde{y}_k(t_{k+1}^*) |^{(i)}$  tolerierte lokale Fehler , (127a)  
 $i = 0, 1, \dots, n-1$  .

Es muss also gelten :

$$|\Delta y_{k,j}^{(i)}(t_{k+1}^*)| \leq \epsilon_{ki} , i=0,1,\dots,n-1 , j=1,2,\dots,d \quad (127b)$$

Wegen (126) ist (127b) erfüllt , falls die folgenden Relationen gelten :

$$\frac{q!}{(q-i)!} \cdot |\tilde{y}_{kq,j}| \cdot H_k^{q-i} \leq \epsilon_{ki} , i=0,1,\dots,n-1, j=1,2,\dots,d \quad (127c)$$

(127c) könnte direkt zur Abschätzung der maximal zulässigen Intervalllänge gebraucht werden , falls die Matrix  $\tilde{y}_{kq}$  vor der Lösung der Anfangswertaufgabe (123), D1 bekannt wäre . Dies ist zwar nicht der Fall , aber wir kennen für  $k > k'$  schon eine gute Näherung für diese Matrix ( siehe Initialisierung (124a) ) :

$$\tilde{y}_{kq} = \tilde{y}_{kq}^1 = \tilde{y}_{k-1}(t_k^*) |^{(q)} / q! = \tilde{y}_{k-1,q} \quad (127d)$$

Damit aber können wir  $H_k$  vor der Lösung der Anfangswertaufgabe (123), D1 wie folgt abschätzen :

Automatische Wahl von  $H_k$

$$\text{Sei : } H_{kij} := \left( \epsilon_{ki} \cdot \frac{(q-i)!}{q!} \cdot \frac{1}{|\tilde{y}_{k-1,q,j}|} \right)^{1/(q-i)} \quad (128a)$$

$$j=1,2,\dots,d , i=0,1,\dots,n-1$$

Die maximal zulässige Intervalllänge  $H_k$  ist dann wie folgt festgelegt : (128)

$$H_k := \min_{\substack{i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,d}} ( H_{kij} )$$

Wir halten also fest :

Es ist nicht nötig , die Intervallunterteilung (76a,b) a priori anzugeben ; diese kann vielmehr im Laufe der Integration nach (128) geschätzt werden . Voraussetzung ist "nur" , dass wir "sinnvolle" maximal zulässige lokale Fehler  $\varepsilon_{ki}$  ,  $k = 1, 2, \dots, m_t$  ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  angeben können . Dies ist eine grosse Erleichterung für den Programmbenutzer : dieser hat nur noch eine erste Schätzung für  $H_k$  , anzugeben . Die einfachste Variante ist dabei die ,  $H_k$  , "zu klein" zu wählen ; die automatische Unterteilung (128) wird dann sehr rasch auf vernünftige Intervalllängen einschwenken .

An Stelle von (128) können auch andere Schätzverfahren für die  $H_k$  verwendet werden : Man kann beispielsweise verlangen , dass der maximale Fehler einer Funktion der Anfangsbedingungen eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf ; auch dadurch ist eine Bedingung für  $H_k$  gegeben ( siehe Beispiel 7 ) .

### 2.3.4.3 DER GLOBALE FEHLER

Zunächst folgt unmittelbar durch passende Erweiterung von (125b) :

$$\Delta y(t) | = \sum_{\ell=k'+1}^k ( |y_{\ell-1}(t)| - |y_{\ell}(t)| ) + \Delta y_k(t) | , t \in I_k \quad (129)$$

Sodann kann gezeigt werden , dass ein einzelner Summand in (129) als Linearkombination der Fehler der betreffenden Anfangsbedingungen geschrieben werden kann : \*)

$$|y_{\ell-1}(t) - y_{\ell}(t)| = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^d c_{\ell ij}(t) \cdot \Delta y_{\ell, j}^{(i)}(t^*) \quad (129a)$$

Durch (129a) wird also der Einfluss der lokalen Fehler in den Anfangsbedingungen des  $\ell$ -ten Teilintervalls auf die Lösung zu späteren Zeiten  $t$  festgelegt . Um nun die  $\varepsilon_{ki}$  ,  $i=0, 1, \dots, n-1, k=1, 2, \dots, m_t$  vernünftig wählen zu können , sollten die  $c_{\ell ij}(t)$  alle bekannt sein : Man könnte dann die maximal tolerierten lokalen Fehler so wählen , dass ihr Einfluss auf die Lösung im ganzen Intervall  $I$  einen gewissen Betrag nicht überschreitet .

\*) siehe z.B. {G.Beutler, 1979, Kap.4} .

Der geneigte Leser merkt aber bestimmt, dass ein solches Projekt eher aufwendig ist.

Wir beschränken uns daher hier darauf, auf die wichtigste Eigenschaft des globalen Fehlers hinzuweisen:

Halbiert man bei einer bestimmten Integration die verwendeten Teilintervalle und führt - bei gleichem Polynomgrad  $q$  - die Integration mit den halbierten Intervallen durch,

werden die lokalen Fehler in den Anfangswerten  $y_k(t_{k+1}^*) |^{(i)}$  um einen Faktor  $2^{q+1-i}$  verkleinert, die Anzahl der Summanden in (129) wird aber nur verdoppelt. Man darf daher erwarten, dass der globale Fehler  $\Delta y(t) |$  um einen Faktor  $2^{q+1-n}$  verkleinert wird.

Beispiel 7 : Allgemeine Lösung des Einkörperproblems als Anfangswertaufgabe, Verwendung der Methode 2.1

Aufgabe : Man löse die Anfangswertaufgabe (B5.1a) im Intervall

$$I = [0, 4 \cdot U], \quad U = \text{Umlaufszeit des Himmelskörpers.} \quad (B7.1a)$$

Für  $\vec{r}(t)$  übernehme man den Ansatz (B5.1d) :

$$\vec{r}(t) := y_1(t) \cdot \vec{r}_{00} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{01} \quad (B7.1b)$$

Den Vektor  $(y(t) |)^T := (y_1(t), y_2(t))$ , Lösung der Anfangswertaufgabe (B5.1f), (B5.1g), approximiere man stückweise durch Polynome vom Grad  $q$ .

Dabei sollen die Längen der Teilintervalle so gewählt werden, dass der durch die lokalen Fehler in den Anfangsbedingungen in der Halbachse  $a$  induzierte Fehler kleiner als eine (wählbare) Grösse  $\epsilon$  ist. (B7.1c)

Die  $\vec{r}_{0i}, i=0,1$  sollen einmal so gewählt werden, dass sie (B7.1)

- a. einer Kreisbahn mit Radius  $a = 2.7$  A.E. entsprechen, einmal so, dass sie (B7.1d)
- b. einer elliptischen Bahn mit Halbachse  $a = 2.7$  A.E. und Exzentrizität  $e = 0.8$  entsprechen.

$T_0 = 0$  sei gleich der Periheldurchgangszeit.

Für  $q = 9$  und  $\epsilon = 10^{-8}$  drucke man eine Tabelle der Art :

$$t_i := i \cdot \frac{U}{5}, k(t_i), \Delta M(t_i), \Delta v(t_i), n_{\text{call}}(t_i), H_k, \quad i=1,2,\dots,20 \quad (B7.1e)$$

Wo :  $k(t_i)$  : Nummer des Teilintervalls für das  $t_i \in I_k$  gilt.

$\Delta M(t_i)$  : Fehler in der mittleren Anomalie z.Z.  $t_i$

$\Delta v(t_i)$  : " " " wahren " "  $t_i$

$n_{\text{call}}$  : Anzahl der Aufrufe von DERIV bis zur Zeit  $t_i$ .

Bemerkungen zur Wahl der  $H_k$  nach (B7.1c)

Anstatt die Intervalllängen nach (128) abzuschätzen - was ohne weiteres möglich wäre - verwenden wir (B7.1c) . Dies bedarf einer Begründung :

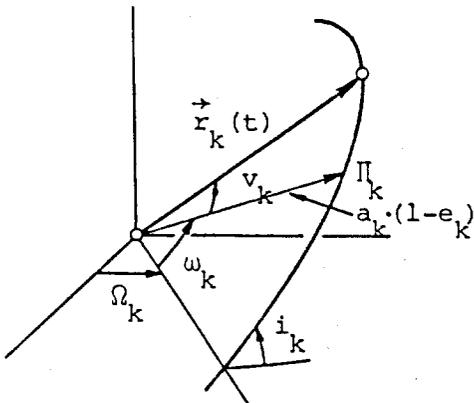
- Jedem Satz von Vektoren  $\tilde{y}_{k-1}(t^*)|^{(i)}$ ,  $i=0,1$  entspricht nach (B7.1b) genau ein Orts- und Geschwindigkeitsvektor :

$$\tilde{r}_k^{(i)} := \tilde{r}_k(t^*)^{(i)} = \tilde{y}_{k-1,1}(t^*) \cdot \vec{r}_{00} + \tilde{y}_{k-1,2} \cdot \vec{r}_{01}, \quad i=0,1 \quad (B7.2)$$

- Jedem Satz von Orts- und Geschwindigkeitsvektoren (B7.2) wiederum entspricht genau eine Bahn  $\vec{r}_k(t)$  . In unseren Beispielen sind alle Bahnen elliptische Bahnen .
- Jede elliptische Bahn wird durch 6 Bahnelemente eindeutig festgelegt ( siehe Figur 4 ) :

Figur 4

Legende



- $\Pi_k$  : Perihel
- $\Omega_k$  : Knotenlänge
- $\omega_k$  : Perihelabstand
- $i_k$  : Neigung der Bahnebene gegen Referenzebene ( Ekliptikebene , siehe Kap. 2.4.1 )
- $a_k$  : Halbachse der Ellipse
- $e_k$  : Numerische Exzentrizität
- $T_{pk}$  : Periheldurchgangszeit
- $\vec{r}_k(t)$  : Ortsvektor des Himmelskörpers zur Zeit t .

- Der Ortsvektor  $\vec{r}_k(t)$  wird wie folgt berechnet :

$$\vec{r}_k(t) = R_3(-\Omega) \cdot R_1(-i) \cdot R_3(-\omega) \cdot \begin{bmatrix} r_k(t) \cdot \cos(v_k) \\ r_k(t) \cdot \sin(v_k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B7.3)$$

In (B7.3) sind die  $R_i(w)$  Drehmatrizen mit der  $i$ -ten Achse als Drehachse und  $w$  als Drehwinkel ( siehe Kap. 2.4.1 ) ,  $r_k(t)$  ist der Betrag des Radiusvektors ,  $v_k$  ist die sogen. wahre Anomalie , die wie folgt berechnet wird :

- Berechnung der wahren Anomalie ( die Formeln können in jedem Himmelsmechanik-Lehrbuch nachgeschlagen werden ) :

$$n_k: \text{ mittlere Bewegung : } n_k = k/a_k^{3/2}, \quad k = \text{Gauss'sche Konst.} \quad (B7.4)$$

$$M_k: \text{ mittlere Anomalie : } M_k = (t - T_{pk}) \cdot n_k \quad (B7.5)$$

$E_k$  : exzentrische Anomalie ; diese ist Lösung der Keplergleichung :

$$E_k = M_k + e_k \cdot \sin(E_k) \quad (B7.6)$$

$$v_k: \text{ wahre Anomale : } \tan(v_k/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan(E_k/2) \quad (B7.7)$$

- Berechnung von  $r_k(t)$  :  $r_k(t) = \frac{a \cdot (1-e^2)}{1+e \cdot \cos(v_k)} = a \cdot (1-e \cdot \cos(E_k))$  (B7.8)

Tabellen 11a,b

BAHNELEMENTE A= 2.7 E= 0.00  
 ORDNUNG DER INTEGRATION Q= 9 TOL.FEHLER IN A/SCHRITT= 0.100-07

T	K	DA	DM	DV	NCALL	HK
324.10	6	0.405E-13	-0.162E-11	-0.162E-11	54	78.70
648.19	10	0.590E-13	-0.472E-11	-0.471E-11	90	78.70
972.29	14	0.158E-12	-0.189E-10	-0.189E-10	126	78.70
1296.39	18	0.211E-12	-0.338E-10	-0.338E-10	162	78.70
1620.48	22	0.217E-12	-0.435E-10	-0.435E-10	198	78.70
1944.58	26	0.226E-12	-0.541E-10	-0.541E-10	234	78.70
2268.67	30	0.189E-12	-0.530E-10	-0.530E-10	270	78.70
2592.77	34	0.234E-12	-0.750E-10	-0.750E-10	306	78.70
2916.87	38	0.234E-12	-0.841E-10	-0.841E-10	342	78.70
3240.96	43	0.192E-12	-0.769E-10	-0.769E-10	387	78.70
3565.06	47	0.157E-12	-0.690E-10	-0.690E-10	423	78.70
3889.16	51	0.195E-12	-0.936E-10	-0.936E-10	459	78.70
4213.25	55	0.208E-12	-0.108E-09	-0.108E-09	495	78.70
4537.35	59	0.219E-12	-0.122E-09	-0.122E-09	531	78.70
4861.44	63	0.203E-12	-0.122E-09	-0.122E-09	567	78.70
5185.54	67	0.289E-12	-0.185E-09	-0.185E-09	603	78.70
5509.64	71	0.399E-12	-0.271E-09	-0.271E-09	639	78.70
5833.73	76	0.388E-12	-0.279E-09	-0.279E-09	684	78.70
6157.83	80	0.407E-12	-0.310E-09	-0.310E-09	720	78.70
6481.93	84	0.458E-12	-0.367E-09	-0.367E-09	756	78.70

BAHNELEMENTE A= 2.7 E= 0.80  
 ORDNUNG DER INTEGRATION Q= 9 TOL.FEHLER IN A/SCHRITT= 0.100-07

T	K	DA	DM	DV	NCALL	HK
324.10	41	-0.405E-12	0.205E-11	0.199E-10	369	37.19
648.19	47	-0.825E-12	-0.937E-11	0.141E-10	423	74.84
972.29	51	-0.368E-12	-0.498E-10	-0.164E-10	459	87.63
1296.39	55	0.417E-11	-0.444E-09	0.254E-09	495	53.62
1620.48	88	0.114E-10	-0.885E-09	-0.133E-07	792	1.86
1944.58	128	0.110E-10	-0.134E-08	-0.121E-08	1152	36.50
2268.67	134	0.106E-10	-0.181E-08	-0.547E-09	1206	73.86
2592.77	138	0.109E-10	-0.229E-08	-0.250E-09	1242	88.44
2916.87	142	0.154E-10	-0.315E-08	0.830E-10	1278	54.88
3240.96	176	0.223E-10	-0.406E-08	-0.609E-07	1584	1.74
3565.06	216	0.215E-10	-0.493E-08	-0.321E-08	1944	38.63
3889.16	222	0.211E-10	-0.582E-08	-0.154E-08	1998	76.88
4213.25	225	0.212E-10	-0.670E-08	-0.907E-09	2025	90.79
4537.35	230	0.266E-10	-0.802E-08	-0.752E-09	2070	51.02
4861.44	263	0.346E-10	-0.932E-08	-0.140E-06	2367	1.81
5185.54	303	0.460E-10	-0.112E-07	-0.604E-08	2727	38.48
5509.64	309	0.456E-10	-0.130E-07	-0.314E-08	2781	76.66
5833.73	312	0.457E-10	-0.149E-07	-0.233E-08	2808	90.85
6157.83	317	0.511E-10	-0.172E-07	-0.321E-08	2853	51.30
6481.93	350	0.621E-10	-0.195E-07	-0.292E-06	3150	1.81

- Es gilt also :

$$\underline{\vec{r}_k^{(i)}, i=0,1 \longrightarrow a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \omega_k, T_{pk}}$$

Insbesondere gilt :

$$\frac{k^2}{a_k} = - \left( \frac{\vec{r}_k^{(1)}}{r_k} \right)^2 + \frac{2 \cdot k^2}{r_k} \quad (B7.9)$$

- Durch die lokalen Fehler in den  $\vec{y}_{k-1}(t_k^*)|^{(i)}, i=0,1$  werden ( siehe (B7.2)) Fehler in die  $\vec{r}_k^{(i)}$  eingeführt . Dies wiederum bedeutet , dass die Bahnelemente der neuen Bahn  $\vec{r}_k(t)$  verfälscht werden .

- Der Fehler in der Halbachse  $a_k$  ist der wichtigste unter den Fehlern in den Bahnelementen , da dadurch ein Fehler in die mittlere Bewegung ( siehe (B7.4) ) eingeführt wird ; dies wiederum bewirkt linear mit der Zeit  $t$  anwachsende Fehler in der mittleren und in der wahren Anomalie und somit auch im Ortsvektor ( siehe (B7.3) ) .  
Damit dürfte auch der Sinn von (B7.1c) klar werden : Mit (B7.1c) kann die wichtigste Fehlerquelle gezielt kontrolliert werden .

Es sei :  $\delta a_k$  : der durch die lokalen Integrationsfehler im (k-1)-ten Teilintervall neu in die Halbachse eingeführte Fehler . (B7.10)

Aus (B7.4) folgt :

$$\underline{\delta n_k = - \frac{3}{2} \cdot \frac{n_k}{a_k} \cdot \delta a_k} \quad (B7.11)$$

Daraus folgt wegen (B7.5) :  $\underline{\delta M_k = (t-t_k^*) \cdot \delta n_k}$  (B7.12)

Aus (B7.6,7) folgen schliesslich die durch  $\delta a_k$  in  $E_k, v_k$  induzierten Fehler ( bei der Herleitung der untenstehenden Formeln wird angenommen , dass die Winkel  $\delta E_k$  und  $\delta v_k$  klein sind ) :  
Zunächst folgt mit der Keplergleichung (B7.6) :

$$\underline{\delta E_k = \frac{\delta M_k}{(1-e \cdot \cos(E_k))}} \quad (B7.13)$$

Damit folgt :  $\underline{\delta v_k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\cos^2(v_k/2)}{\cos^2(E_k/2)} \cdot \delta E_k}$  (B7.14)

Mit (B7.8) , (B7.3) können sodann die Fehler im Ortsvektor zu beliebigen Zeiten  $t$  berechnet werden . Bei schwach exzentrischen Bahnen ist der Fehler im Betrag des Radiusvektors ( siehe (B7.8) ) vernachlässigbar ( genauer proportional  $e$  ) gegen die Fehler in  $\cos(v_k)$  ,  $\sin(v_k)$  . Es entsteht dann der Eindruck , der Himmelskörper laufe in der durch die ursprünglichen Anfangsbedingungen definierten Bahnkurve "zu schnell" oder "zu langsam" .

- Ausgehend von (B7.9) berechnen wir nun den Fehler in der Halbachse  $a_k$  , der durch die Integration im (k-1)-ten Teilintervall an der Stelle  $t_k^*$  eingeführt wird :

Es ist :  $\underline{\delta a_k \cdot \frac{k^2}{a_k^2} = 2 \cdot \frac{\vec{r}_k^{(1)}}{r_k} \cdot \delta \vec{r}_k^{(1)} + 2 \cdot \frac{k^2}{r_k^3} \cdot \vec{r}_k \cdot \delta \vec{r}_k}$  (B7.15)

Die  $\delta \vec{r}_k^{(i)}$ ,  $i=0,1$  sind die lokalen Fehler von  $\vec{r}_{k-1}^{(i)}(t_k^*)$ , die wir - wie bei der Herleitung von (128) - durch den letzten Term der Entwicklung (76c) abschätzen (siehe (B7.2), (76c,d)) :

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_k^{(i)} &= \frac{q^i}{(q-i)!} \cdot (\tilde{y}_{k-1,q,1} \cdot \vec{r}_{00} + \tilde{y}_{k-1,q,2} \cdot \vec{r}_{01}) \cdot H_k^{q-i} \\ &=: \frac{q^i}{(q-i)!} \cdot \delta \vec{r}_k^* \cdot H_k^{q-i}, \quad i=0,1 \end{aligned} \quad (B7.16)$$

Setzt man (B7.16) in (B7.15) ein, darf man schreiben :

$$\delta a_k = \gamma_k \cdot H_k^q \quad (B7.17)$$

$$\text{Wo : } \gamma_k := 2 \cdot q \cdot \frac{a_k^2}{k^2 \cdot H_k} \cdot \vec{r}_k^{(1)} \cdot \delta \vec{r}_k^* + 2 \cdot \frac{a_k^2}{r_k^3} \cdot \vec{r}_k \cdot \delta \vec{r}_k^* \quad (B7.17a)$$

Die Forderung (B7.1c) führt somit zur Gleichung :

$$H_k = \left( \frac{\varepsilon_0}{|\gamma_k|} \right)^{1/q} \quad (B7.18)$$

Es gilt zu beachten, dass  $\gamma_k$  eine Funktion von  $H_k$  ist (siehe (B7.17b)), dass also (B7.18) iterativ gelöst werden muss.

#### Resultate (Tabellen 11a, 11b)

- Die Tabellen 11a,b wurden mit dem zur Lösung der Aufgabe 7 entwickelten Fortran-Programm erzeugt.  
Die Bedeutung der einzelnen Kolonnen :  
DA :  $a_1 - a_k$  in astronomischen Einheiten .  
DM :  $M_1^1 - M_k^k$  in Grad ( Altgrad )  
DV :  $v_1^1 - v_k^k$  in Grad .  
( Bedeutung von  $M_k, v_k$  siehe (B7.5), (B7.7) ) .
- NCALL : Anzahl der Aufrufe der Subroutine DERIV bis zum k-ten Teilintervall  $\approx$  Anzahl Aufrufe von MATP .
- HK :  $H_k =$  Länge des k-ten Teilintervalles .
- Die Umlaufzeit des Probekörpers beträgt ( in beiden Fällen ) 1620.5 Tage .
- Wir sehen, dass die automatische Intervallunterteilung nach (B7.1c), (B7.18) den Erwartungen qualitativ entspricht :
  - Bei der Kreisbahn ( Tabelle 11a ) wird das Intervall I ( s. (B7.1a) ) in Teilintervalle gleicher Länge unterteilt . Erstaunlich ist freilich, wie genau diese gleiche Länge eingehalten wird !
  - Bei der stark exzentrischen Bahn in Tabelle 11b ergibt sich ein grundlegend anderes Bild : Die Intervalllängen variieren von ca. 1.7 Tagen im Perihel bis zu ca. 90 Tagen im Aphel . Es wäre also völlig unsinnig, in diesem Beispiel mit Teilintervallen gleicher Länge zu arbeiten, müsste man doch - um mit Tabelle 11b vergleichbare Resultate zu erhalten -  $H_k = H = 1.7$  Tage verwenden . Dies würde bedeuten, dass man I in 3813 Teilintervalle anstatt in 350 Teilintervalle aufteilen müsste ; dies würde den Rechenaufwand mehr als verzehnfachen !
- Vergleicht man die Kolonnen NCALL und HK in den Tabellen 11a und 11b miteinander, stellt man fest, dass für  $e = 0.8$  die numerische Rechenarbeit ungefähr 4 mal grösser ist als bei einer Kreisbahn .

Diese Verhältniszahl wird bei grösseren Exzentrizitäten noch wesentlich grösser.

Diese Tatsache hat zu Versuchen geführt, die Aufgabestellung so umzuformulieren, dass man auch bei stark exzentrischen Bahnen die gleichen "idyllischen" Verhältnisse wie bei einer Kreisbahn hat.

Beachtenswert sind die von E. Stiefel vorgeschlagenen "Regularisierungsmethoden" (siehe z.B. {E. Stiefel, 1970}). Diese und ähnliche Verfahren beruhen sämtlich darauf, dass man gewisse Eigenschaften der analytischen Lösung von (B5.1) - die ja bekannt ist - ausnützt.

Die einfachste, wirksamste, aber nicht unbedingt schnellste Methode, solchen Schwierigkeiten auszuweichen, ist die folgende:

1. Die exakte Lösung von Aufgabe (B5.1) ist bekannt.
2. Wir nehmen an, dass an Stelle von (B5.1a) das folgende System gelöst werden soll:

$$\ddot{\vec{r}}^*(t) = -k^2 \cdot \frac{\vec{r}^*}{r^{*3}} + \vec{f}(t, \vec{r}^*)$$

wobei  $\vec{f}(\cdot)$  eine im Vergleich zum ersten Term kleine Störkraft sei. Die Anfangsbedingungen seien die gleichen wie in Aufgabe (B5.1a).

3. Anstatt die Gleichung (B5.1a) zu lösen, stellt man eine Differentialgleichung für die Differenz  $\vec{r}^*(t) - \vec{r}(t)$  auf und löst diese. Man darf annehmen, dass  $\vec{r}^*$  und  $\vec{r}$  in einer kleinen Umgebung von  $T_0$  relativ gut miteinander übereinstimmen, so dass die Intervalllänge bei der Lösung des Differentialgleichungssystems für  $\vec{r}^*(t) - \vec{r}(t)$  grösser ist als bei der Lösung des Differentialgleichungssystems für  $\vec{r}^*(t)$  oder für  $\vec{r}(t)$ .
4. Das unter 1. bis 3. beschriebene Procedere kann auf jedes der in den Punkten  $t_k^*$ ,  $k=1, 2, \dots, m$  definierte Anfangswertproblem angewandt werden. (siehe (123)<sup>t</sup>, D1, I1).

- Wenden wir uns den übrigen Kolonnen der Tabellen 11a, 11b zu:

a. Kolonne DA:

$$\text{Es gilt: } DA(k) := a_1 - a_k = \sum_{\lambda=2}^k (a_{\lambda-1} - a_{\lambda}) \quad (B7.19)$$

Wegen (B7.1e) dürfen wir die folgende Abschätzung vornehmen:

$$|DA(k)| \leq (k-1) \cdot \epsilon_0 = (k-1) \cdot 10^{-8} \quad (B7.20)$$

In den Tabellen 11a, 11b sehen wir, dass (B7.20) sehr wohl erfüllt ist: Die tatsächlichen Fehler sind durchwegs um etwa 5 bis 6 Zehnerpotenzen kleiner als die nach (B7.20) erwarteten Beträge! Dies ist die Folge unserer pessimistischen Schätzung der lokalen Fehler.

In der Tat hätte man im Beispiel der Tabelle 11a die  $H_k$  ungefähr doppelt so gross wählen können, bis die erwarteten und tatsächlichen Fehler der gleichen Grössenordnung sind.

Für spezielle Aufgaben (z.B. kreisähnliche Bahnen) könnte man auf einfache Art und Weise realistischere Abschätzungen vornehmen; aus Platzgründen müssen wir aber auf die weitere Behandlung solcher rein technischer Probleme verzichten.

b. Kolonne DM

Mit (B7.11) und (B7.12) dürfen wir - leicht vereinfachend - abschätzen:

$$|DM(t_k^*)| = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{a} \cdot \epsilon_0 \cdot \sum_{\ell=2}^k (t_k^* - t_{\ell}^*) \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{n}{a} \cdot (t_k^* - t_1^*)^2 \cdot \epsilon_0 \quad (B7.21)$$

Mit (B7.21) schätzt man  $\delta M(t)$  im Bogenmass ab. Soll diese Grösse in Altgrad abgeschätzt werden, hat man (B7.21) mit  $180/\pi$  zu multiplizieren.

Den Tabellen 11a, 11b entnimmt man, dass - wie nach (B7.21) zu erwarten - der Fehler  $|\delta M(t)| \sim (t-t_1)^2$  anwächst, dass aber die mit den Tabellen 11a,b berechneten Proportionalitätskonstanten viel kleiner als erwartet sind. Der Grund dafür ist wiederum in der pessimistischen Schätzung für die lokalen Integrationsfehler zu suchen.

c. Kolonne DV

Mit (B7.14) und (B7.13) folgt:

$$\delta v(t) = \frac{\sqrt{1+e_k} \cdot \cos^2(v_k/2) \cdot \delta M(t)}{\sqrt{1-e_k} \cdot \cos^2(E_k/2) (1-e \cdot \cos(E_k))} \quad (\text{B7.22})$$

Für Kreisbahnen gilt also  $\delta v(t) = \delta M(t)$ , für elliptische Bahnen ist  $|\delta v(t)|$  im Perihel (bei einem bestimmten  $\delta M$ ) maximal; für  $e = .8$  gilt im Perihel beispielsweise  $\delta v(t) = 15 \cdot \delta M(t)$  - was man in Tabelle 11b verifizieren kann - für  $e = .95$  gilt im Perihel  $\delta v(t) = 125 \cdot \delta M(t)$ .

- Abschliessend sei betont, dass die Anzahl der Iterationsschritte bei der Lösung der lokalen Anfangswertprobleme nach (90) (Methode 2.1) in keinem einzigen Teilintervall grösser als 1 war! (Dabei wurden die Anfangswertaufgaben nach (124a) initialisiert, das  $\epsilon$  für das Abbruchkriterium (97a) wurde nach (B5.10), (B7.1e) berechnet).

Das heisst aber, dass man bei der Verwendung der Integrationsmethode 2.1 - bei vernünftiger Wahl der Intervalllängen nach (128) oder nach (B7.1c) - keine Angst vor "endlosen Iterationsprozessen" und somit vor allzugrossen Rechenzeiten haben muss.

Damit zurück zum Haupttext:

### 2.3.5 SCHLUSSBEMERKUNGEN

In Kapitel 2.3 haben wir Verfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen behandelt.

Dabei haben wir unterschieden zwischen linearen/nicht linearen Differentialgleichungssystemen sowie zwischen Anfangs- und (lokalen) Randwertproblemen. (Die Lösung allgemeiner Randwertaufgaben haben wir ausgelassen (siehe dazu {G. Beutler, 1982, Kap. 6.2.2.2})).

Im Intervall  $I$  (beliebiger Länge) haben wir die Lösungsfunktionen stückweise durch Polynome vom Grad  $q$  resp.  $q'$  approximiert (siehe (76)): Das Intervall  $I$  wurde in Teilintervalle  $I_k, k=1,2,\dots,m_t$  unterteilt, in jedem Teilintervall wurde eine Anfangswertaufgabe resp. eine lokale Rand-

wertaufgabe definiert und gelöst ( siehe Blockschema (123) ) . Die approximierenden Funktionen werden so bestimmt , dass sie denselben Anfangs- resp. Randbedingungen genügen , wie die exakte Lösung der betreffenden Aufgabe , und dass sie - an gewissen Stellen des Intervalles  $I_k$  - das zu lösende Differentialgleichungssystem exakt erfüllen ( bei Methode 3.2 verlangt man zusätzlich , dass die approximierenden Funktionen die ersten Ableitungen des Differentialgleichungssystems an gewissen Stellen von  $I_k$  erfüllen ) . Dieses Vorgehen führt zu algebraischen Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der Ansätze (76c) . Diese Gleichungen sind linear , wenn das betreffende Differentialgleichungssystem linear ist , sie sind nicht linear , wenn das Differentialgleichungssystem nicht linear ist . Im zweiten Fall müssen die Gleichungssysteme für die Koeffizienten iterativ gelöst werden .

Die Unterteilung des Intervalles  $I$  in Teilintervalle  $I_k$  ,  $k = 1, 2, \dots, m_t$  wurde vorerst als a priori gegeben angenommen . In Kapitel 2.3.4 haben wir gezeigt , wie man das Intervall  $I$  im Laufe der Rechnung automatisch ( d.h. programmgesteuert ) unterteilen kann . Die angegebene Unterteilung ist sehr konservativ ; der lokale Integrationsfehler wird mit dem  $q$ -ten Term der um den Punkt  $t_k^*$  resp.  $t_{k+1}^*$  ( siehe (76a,b) ) entwickelten Taylorreihe der exakten Lösung der lokalen Aufgabe (123), D1 resp. D2 abgeschätzt . Diese Abschätzung ist pessimistisch , da im Ansatz (76b) dieser Term noch berücksichtigt wird .

Halten wir abschliessend fest :

Unsere Lösungsansätze (76) sind direkt der Approximationstheorie entnommen . Durch die Verwendung von Polynomen als approximierende Funktionen ( siehe (76d) ) kommen wir zu sehr einfachen Fehlerabschätzungen ( die approximierenden Funktionen sind im wesentlichen den durch die ersten  $q$  Terme der um  $t_k^*$  resp.  $t_{k+1}^*$  entwickelten Taylorreihen der betreffenden exakten Lösungen gleichzusetzen ) .

Ansätze dieser Art werden neuerdings auch unter dem Schlagwort "expansion methods" zusammengefasst {G.Hall, J.M.Watt, 1976,chapter 19} .

Man kann jedoch zeigen , dass alle sogenannt stark stabilen Vielschrittverfahren im wesentlichen als Spezialfälle in der hier unter anderen angegebenen Methode 2.2 enthalten sind . Aus Platzgründen verzichten wir darauf , dies explizite zu zeigen , verweisen aber auf eine frühere Behandlung dieses Themas {G. Beutler , 1979 , Kap. 3.6} .

## 2.4 KOORDINATENSYSTEME UND BEOBACHTUNGEN

---

### 2.4.1 DIE VERWENDETEN KOORDINATENSYSTEME UND DIE TRANSFORMATIONEN ZWISCHEN IHNEN

---

Der im folgenden angegebene Formalismus zur Beschreibung von Vektoren im dreidimensionalen euklidischen Raum ist im wesentlichen mit demjenigen von I. Bauersima identisch ( siehe {I. Bauersima , 1976 , Anhang} ) :

Mit  $E^3$  wird der dreidimensionale euklidische Raum bezeichnet , Vektoren im  $E^3$  werden durch kleine lateinische oder griechische Buchstaben , versehen mit einem Vektorpfeil "  $\vec{\phantom{r}}$  " , dargestellt ( Beispiel  $\vec{r}$  ) .

In  $E^3$  ist eine orthonormale Basis B durch drei orthogonale Einheitsvektoren  $\vec{e}_{iB}, i=1,2,3$  festgelegt . (130a)

Dabei setzen wir immer rechtsorientierte Systeme voraus : In der durch  $\vec{e}_{1B}$  und  $\vec{e}_{2B}$  aufgespannten Ebene geht  $\vec{e}_{1B}$  durch eine Drehung um  $+\pi/2$  ( positiver Drehsinn = Gegenuhrzeigersinn ) über in  $\vec{e}_{2B}$  ; dabei muss der Vektor  $\vec{e}_{3B}$  zum Betrachter hinweisen ( vgl. Figur 5 ) . (130b)

Jeder Vektor in  $E^3$  kann als Linearkombination der drei Basisvektoren (130a) dargestellt werden :

$$\vec{r} = r_{B,1} \cdot \vec{e}_{1B} + r_{B,2} \cdot \vec{e}_{2B} + r_{B,3} \cdot \vec{e}_{3B} \quad (130c)$$

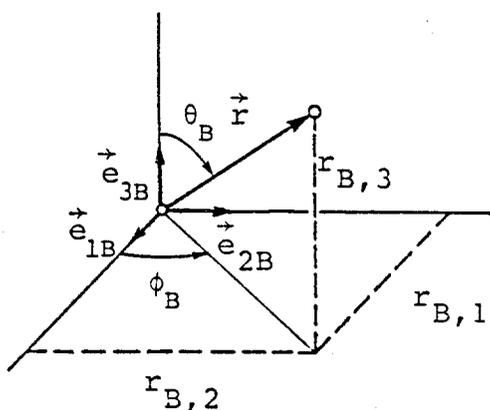
Die Skalare  $r_{B,i}, i=1,2,3$  heissen rechtwinklige kartesische Koordinaten des Vektors  $\vec{r}$  bezüglich der Basis  $B$ . (130d)

Die Komponentenmatrix  $r_B |$  eines Vektors  $\vec{r}$  bezüglich der Basis  $B$  ist die aus den Komponenten  $r_{B,i}, i=1,2,3$  gebildete Spaltenmatrix :

$$r_B | := \begin{bmatrix} r_{B,1} \\ r_{B,2} \\ r_{B,3} \end{bmatrix} \quad (130e)$$

Anstelle von rechtwinkligen Koordinaten verwendet man häufig Kugelkoordinaten ( siehe Figur 5 ) :

Figur 5



Legende

- $\vec{e}_{iB}, i=1,2,3$  : Basisvektoren
- $\vec{r}$  : Vektor
- $r_{B,i}, i=1,2,3$  : rechtwinklige kartesische Koordinaten von  $\vec{r}_B$  bezüglich  $B$ .
- $r, \phi_B, \theta_B$  : Kugelkoordinaten von  $\vec{r}_B$  bezüglich  $B$ .

Dabei gilt :

$$r_B | = r \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_B) & \sin(\theta_B) \\ \sin(\phi_B) & \sin(\theta_B) \\ & \cos(\theta_B) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} r_B &= (r_{1B}^2 + r_{2B}^2 + r_{3B}^2)^{1/2} \\ \phi_B &= \arctan(r_{2B}/r_{1B}) \\ \theta_B &= \arccos(r_{3B}/r_B) \end{aligned} \quad (130e)$$

Es gibt beliebig viele Basen der Art (130a) . Sind  $B_1$  und  $B_2$  zwei solche Basen , so gilt :

$$r_{B_2} | = R \cdot r_{B_1} |, \quad r_{B_1} | = R^T \cdot r_{B_2} | \quad (130f)$$

Dabei ist  $R$  eine Drehmatrix (  $3 \times 3$ -Matrix ) ,  $R^T$  ist die dazu transponierte ( zugleich inverse ) Matrix .

Man kann zeigen , dass jede Drehmatrix  $R$  als Produkt von ( maximal drei ) sogenannten partikulären Drehmatrizen

$R_i(w_i)$  ( die eine Drehung um  $w_i$  mit dem  $i$ -ten Basisvektor als Drehachse beschreiben ) dargestellt werden kann .

Die partikuläre Drehmatrix  $R_i(w_i)$  lässt sich durch den folgenden einfachen Algorithmus berechnen :

$$\begin{array}{l}
 1.) R_{i,kk} = \cos(w_i) , k=1,2,3 \\
 2.) R_{i,12} = R_{i,23} = R_{i,31} = \sin(w_i) \\
 3.) R_{i,21} = R_{i,32} = R_{i,13} = -\sin(w_i) \\
 4.) R_{i,ik} = R_{i,ki} = 0 , k=1,2,3 \\
 5.) R_{i,ii} = 1
 \end{array} \quad (130g)$$

Der Algorithmus (130g) wurde in der Subroutine DDREH (siehe Tabelle 3) verwendet .

Vom Standpunkt des Naturwissenschaftlers aus gesehen ist durch (130a) ein Koordinatensystem noch nicht eindeutig festgelegt : Man muss zusätzlich dessen Ursprung  $O_B$  ( Nullpunkt ) angeben .

Unter einem Koordinatensystem verstehen wir im folgenden einen Koordinatenursprung  $O_B$  und eine Basis  $B$  . (130h)

Zudem definieren wir - wie üblich - den Ortsvektor eines Punktes  $P$  in  $E^3$  bezüglich des Koordinatensystems  $(O_B, B)$  als Vektor  $\overrightarrow{O_B P}$  . (130i)

Bei der Festlegung der Koordinatensysteme in der Astronomie spielt die Tradition eine sehr wichtige Rolle . Von Bedeutung sind insbesondere die Aequatorebene und die Ekliptikebene :

Die Aequatorebene ( normal zur Rotationsachse des Erdkörpers ) und die Ekliptikebene ( definiert durch den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes Erde-Mond bezüglich der Sonne ) ändern ständig ihre Lage im Raum . Es ist daher notwendig , ihre Lagen zu wohldefinierten Epochen zu beziehen , wobei es üblich ist , für beide Ebenen dieselbe Epoche zu verwenden . Es ist zudem gebräuchlich , sogenannte Normalepochen  $E_0$  ( z.B. 1950.0 , 1975.0 , 2000.0 ) anzunehmen . Diese sind bekanntlich als diejenigen Zeiten in der Nähe des entsprechenden bürgerlichen Jahresanfangs definiert , zu denen die mittlere Länge

der Sonne - berechnet nach {Explanatory Supplement, Kap.4B} -  $280^\circ$  beträgt ( = Bessel'scher Jahresanfang ) .

Damit kommen wir endlich zur Festlegung der im folgenden benötigten Koordinatensysteme :

KS0 : "Ruhesystem der Fixsterne". , realisiert durch den Fundamentalkatalog {FK4} .

KS0 ist ein kartesisches Rechtssystem , dessen Ursprung ( wegen der grossen Entfernung der Fixsterne meistens nicht näher spezifiziert ) mit dem Schwerpunkt des Sonnensystems identifiziert werden darf , dessen Fundamentalebene ( Ebene der beiden ersten orthonormalen Basisvektoren ) parallel zur mittleren Erdäquatorebene zu einer Normalepoche  $E_0$  ist , und dessen erster Basisvektor in der Schnittgeraden der mittleren Aequatorebene mit der mittleren Ekliptikebene zur Epoche  $E_0$  liegt ( in Richtung zum Frühlingspunkt ) ; die dritte Achse zeigt ungefähr zum Polarstern .

(131)

Von diesem Koordinatensystem wird bei der Herleitung der Grundgleichungen ( siehe Kapitel 3.2 ) die Rede sein .

KS1 : Mittleres heliozentrisches Aequatorsystem zur Epoche  $E_0$  .

Die Basisvektoren dieses Systems sind identisch mit den Basisvektoren von KS0 , sein Ursprung liegt im Sonnenmittelpunkt .

(132a)

KS2 : Mittleres heliozentrisches Ekliptiksystem zur Epoche  $E_0$  .

Dieses System folgt aus dem System KS0 durch eine partikuläre Drehung um  $\epsilon(E_0)$  ( der mittleren Schiefe der Ekliptik zur Zeit  $E_0$  ) um die erste Koordinatenachse .

(132b)

Es seien :  $r_{B_i}$  : Komponentenmatrizen eines Vektors  $\vec{r}$  bezüglich der oben (und i.f.) eingeführten Koordinatensysteme ,  $i=1,2,\dots$

(132c)<sub>1</sub>

Dann gilt :

$$\begin{aligned} r_{B_2} | &= R_1(\varepsilon(E_0)) \cdot r_{B_1} | \\ r_{B_1} | &= R_1^T(\varepsilon(E_0)) \cdot r_{B_2} | = R_1(-\varepsilon(E_0)) \cdot r_{B_1} | \end{aligned} \quad (132c)$$

Dabei gilt in guter Näherung ( siehe {Explanatory Supplement, Kap. 4B} ) :

$$\varepsilon(E_0) = 23^{\circ}26'44".84 - 0".46845 \cdot (E_0 - 1950.0) \quad (132d)$$

KS1 und KS2 sind die in der klassischen Himmelsmechanik ( Kapitel 3 ) am häufigsten gebrauchten Systeme .

KS3 : Mittleres geozentrisches Aequatorsystem zu einer Epoche E .

Sein Ursprung liegt im Schwerpunkt des Erdkörpers , seine Basisvektoren sind identisch mit denjenigen von KS0 ( siehe (132a) ) . (133)

KS4 : Geozentrisches erdfestes System . Wir übernehmen die in der Satellitengeodäsie gebräuchliche

Definition : KS4 ist ein kartesisches Rechtssystem , dessen Ursprung gleich dem Schwerpunkt der Erde ist , dessen dritte Koordinatenachse gleich dem mittleren Pol der Erde im Zeitintervall 1900 bis 1905 ist ( OCI - Pol ) , und dessen erste Achse  $75^{\circ}03'55".94$  östlich des U.S. Naval Observatory liegt . (134)

Die Systeme KS3 und KS4 werden wir bei der Besprechung von Problemen der Satellitengeodäsie ( Kapitel 4 ) benötigen .

Transformation KS3  $\longleftrightarrow$  KS4

Da sowohl KS3 als auch KS4 rechtsorientierte kartesische Systeme mit demselben Ursprung ( Geozentrum ) sind , besteht die Transformation zwischen ihnen lediglich aus einer Drehung :

Seien :  $r_{B_i} |$  ,  $i=3,4$  die Komponentenmatrizen eines Vektors  $\vec{r}$  bezüglich der Koordinatensysteme KS3 resp. KS4 ( siehe (132c)<sub>1</sub> ) .

Dann gilt :

$$\underline{r_{B_4}} = R(t) \cdot r_{B_3} \quad , \quad \underline{r_{B_3}} = R(t)^T \cdot r_{B_4} \quad (135)$$

Die Drehmatrix  $R(t)$  kann ihrerseits als Produkt von vier bekannten Drehmatrizen geschrieben werden :

$$\underline{R(t)} = X^T(t) \cdot \Theta(t) \cdot N(t) \cdot P(t) \quad (135a)$$

Im folgenden soll die Bedeutung der einzelnen Drehmatrizen kurz angegeben werden - ohne auf die explizite Berechnung der einzelnen Matrizen einzugehen . Es soll jedoch betont werden , dass die Algorithmen zur Berechnung der einzelnen Matrizen relativ einfach sind . Man darf heute voraussetzen , dass sie in Form von Unterprogrammen in den einschlägigen Programmbibliotheken fundamental-astronomischen , geodätischen und himmelsmechanischen Inhalts vorhanden sind .

$P(t)$  : Präzessionsmatrix . Diese beschreibt die Transformation vom mittleren System einer Normalepoche  $E_0$  ins mittlere System der Epoche  $t$  . In der hier gebrauchten Subroutine PRAE ( siehe Tabelle 3 ) wird als Normalepoche  $E_0 = 1950.0$  gebraucht .

( Zur Berechnung von  $P(t)$  siehe z.B. {I. Bauersima, 1976,p.19} ) .

$N(t)$  : Nutationsmatrix . Transformation vom mittleren System der Epoche  $t$  ins wahre System der Epoche  $t$  ( System , dessen dritte Achse gleich der Erdachse z.Z.  $t$  ist . Explizite Berechnung siehe {I.Bauersima,1976,p.19} ) .

$\Theta(t)$  : Sternzeitmatrix . Diese beschreibt den Uebergang vom wahren System der Epoche  $t$  in das geographische System .  $\Theta(t)$  ist eine partikuläre Drehmatrix einer Drehung um die dritte Koordinatenachse , wobei der Drehwinkel gleich der wahren Sternzeit des Nullmeridians ist .

$X(t)$  : Polschwankungsmatrix . Durch die Matrix  $X(t)$  wird das geographische System ins erdfeste System KS4 ( siehe (134) ) transformiert . Die Matrix  $X(t)$  ist gleich dem Produkt zweier partikulärer Drehmatrizen :  $X(t) = R_1(y) \cdot R_2(x)$  , wobei  $x, y$  die

Koordinaten des wahren in bezug auf den mittleren Pol zur Zeit  $t$  sind .

## 2.4.2 DIE WICHTIGSTEN BEOBACHTUNGSARTEN

---

### 2.4.2.1 RICHTUNGSBEOBACHTUNGEN

---

Von alters her haben Astronomen die Richtungen von ihren Observatorien auf der Erdoberfläche zu den Himmelskörpern des Planetensystems gemessen . Dabei wurden früher fast ausschliesslich scheinbare Positionen bestimmt : Man richtete sein Instrument auf das Beobachtungsobjekt , notierte die Beobachtungszeit und las die Teilkreise des Instrumentes ab . Die scheinbare Richtung bezieht sich also auf ein topozentrisches , erdfestes System . Es galt zu berücksichtigen , dass sie durch Refraktion und Aberration beeinflusst war und somit nicht unmittelbar geometrisch interpretiert werden konnte .

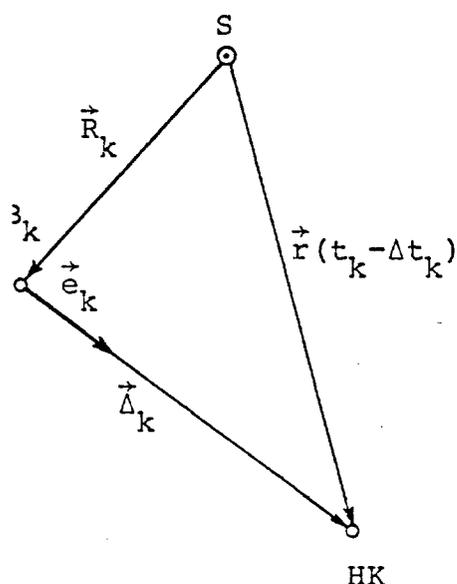
Heute werden Richtungen zu den Himmelskörpern des Planetensystems und zu den künstlichen Erdsatelliten fast ausschliesslich auf photographischem Weg ( neuerdings auch mittels Televisionaufzeichnungen ) bestimmt : Zur Beobachtungszeit wird eine Photographie des Himmelsausschnittes gemacht , der den betreffenden Himmelskörper ( Kleinplanet , Komet , Erdsatellit etc. ) enthält ; das Bild des Himmelskörpers - in diesem Zusammenhang auch Messobjekt genannt - wird relativ zu den Bildern der Sterne in der Umgebung auf der Photoplatte vermessen . Da die Polarkoordinaten der Umgebungssterne im System KSl den grossen Sternkatalogen entnommen werden können , kann anschliessend die Richtung zum Messobjekt in diesem Koordinatensystem berechnet werden .

Bei dieser relativen Positionsbestimmung sind Effekte wie Refraktion und Aberration nur von sekundärer Bedeutung , da sie in erster Näherung für Messobjekt und Hintergrundsterne gleich sind ( die unterschiedlichen Auswirkungen dieser Terme auf Messobjekt/Sterne lassen sich sehr genau als differentielle Korrekturen modellieren ) .

Als Resultat erhält man die sogenannte astrometrische oder astrographische Richtung , die die folgende geometrische Bedeutung hat :

Definition : Die astrometrische Richtung vom Beobachtungsort  $B_k$  zu einem Himmelskörper HK zur Beobachtungszeit  $t_k$  ist gleich der geometrischen Richtung vom Beobachter zur Zeit  $t_k$  zum Himmelskörper zur Zeit  $t_k - \Delta t_k$  , wobei  $\Delta t_k$  die Zeit ist , die das Licht zum Durchlaufen der Strecke  $\Delta_k$  ( siehe Figur 6 ) benötigt . (136)

Figur 6



Legende

S : Sonnenmittelpunkt ( Ursprung der Systeme KS1 , KS2 (siehe (132a,b)) .

$B_k$  : Beobachtungsort , von dem aus die k-te Beobachtung gemacht wurde .

$\vec{R}_k$  : Ortsvektor des Beobachters z.Z.  $t_k$  (=Beobachtungszeit) .

HK: Beobachteter Himmelskörper .

$\vec{r}(t_k - \Delta t_k)$  : Heliozentrischer Ortsvektor von HK z.Z.  $t_k - \Delta t_k$  .

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_k &:= \vec{r}(t_k - \Delta t_k) - \vec{R}_k \\ \Delta_k &:= |\vec{\Delta}_k| \end{aligned} \quad (137a)$$

$$\Delta t_k := \Delta_k / c ,$$

c = Lichtgeschwindigkeit

$$\vec{e}_k := \vec{\Delta}_k / \Delta_k \quad (137b)$$

Die astrometrische Richtung zur Zeit  $t_k$  wird durch den Einheitsvektor (137b) definiert . Ein Einheitsvektor wiederum ist durch zwei Angaben - beispielsweise durch seine Polarkoordinaten bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems - eindeutig bestimmt .

Normalerweise wird  $\vec{e}_k$  durch die Rektaszension  $\alpha_k$  und durch die Deklination  $\delta_k$  definiert ; diese Winkel entsprechen "im wesentlichen" den Polarwinkeln im KS1 (  $\phi_{B_1} \rightarrow \alpha$  ,  $\theta_{B_1} \rightarrow \pi/2 - \delta$  ) .

Gemäss (3) haben wir zu unterscheiden zwischen den beobachteten Funktionen und den (mit Fehlern behafteten) Beobachtungen selbst :

$$\begin{array}{l}
 \alpha_k = \alpha_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) \\
 \delta_k = \delta_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) \\
 \alpha'_k = \text{Beobachteter Funktionswert von } \alpha_k(\dots) \\
 \delta'_k = \text{Beobachteter Funktionswert von } \delta_k(\dots)
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Beobachtete Funktionen} \end{array} \right| \quad (138)$$

Pro beobachtete Richtung erhalten wir also zwei beobachtete Funktionen im Sinne von (3) .

Natürlich stellt sich die Frage , ob tatsächlich die Grössen  $\alpha_k, \delta_k$  beobachtet worden sind . Streng genommen müssen wir diese Frage verneinen , sind doch in Tat und Wahrheit die effektiv gemessenen Grössen mit "mehr oder weniger kartesischen Koordinaten" in der Film/Plattenebene zu identifizieren . Dabei ist die genaue Definition der effektiv gemessenen Grössen instrumentenabhängig .

Es wäre korrekter , diese ebenen Koordinaten als beobachtete Funktionen in die Parameterbestimmung einzuführen - ein Vorhaben , das allerdings zum Scheitern verurteilt ist , da Richtungen traditionell nur durch die Polarwinkel  $\alpha'_k, \delta'_k$  sowie durch einen (geschätzten) mittleren Fehler

$$\sigma_k = \sigma_k(\delta'_k) = \sigma_k(\alpha'_k \cdot \cos \delta'_k) \quad (139)$$

und durch die Beobachtungszeit  $t_k$  charakterisiert werden . In Anbetracht dieser Situation ist es das Korrekteste , weiterhin  $\alpha_k$  und  $\delta_k$  als beobachtete Funktionen zu betrachten und

$$\underline{g_{k1} := 1/\sigma_k^2} \quad \text{und} \quad \underline{g_{k2} := \cos^2 \delta'_k / \sigma_k^2} \quad (140)$$

als Gewichte der beobachteten Deklinationen resp. Rektaszensionen zu verwenden . Werden nur Richtungsbeobachtungen einer einzigen Station verwendet , darf der Faktor  $1/\sigma_k^2$  in (140) weggelassen werden .

Abschliessend wollen wir noch die explizite Gestalt der den Beobachtungen  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$  zugeordneten Fehlergleichungen angeben .

Nach (28) gilt :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \{\alpha_k^I\}_{p_\ell} \cdot (p_\ell^{I+1} - p_\ell^I) - (\alpha_k^I - \alpha_k^I) &= \rho_j^I \\ \sum_{\ell=1}^n \{\delta_k^I\}_{p_\ell} \cdot (p_\ell^{I+1} - p_\ell^I) - (\delta_k^I - \delta_k^I) &= \rho_{j+1}^I \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

( Zur Erinnerung :  $\alpha_k^I = \alpha_k(p_1^I, p_2^I, \dots, p_{n_p}^I)$ ,  $\delta_k^I = \dots$  sind nach (23) die beim I-ten Iterationsschritt bei der Lösung einer Parameterbestimmungsaufgabe bekannt Funktionswerte ) .

Die einzelnen Terme in (141) werden wie folgt berechnet :

$$\alpha_k^I = \arctan ( \Delta_{k,2}^I / \Delta_{k,1}^I ) , \quad \delta_k^I = \arcsin ( \Delta_{k,3}^I / \Delta_k^I ) \quad (141a)$$

( Siehe (137a) , (130e) ) .

Die partiellen Ableitungen in (141) werden mit Hilfe der Kettenregel berechnet :

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_k^I\}_{p_\ell} &= \sum_{j=1}^3 \{\alpha_k^I\}_{\Delta_{k,j}^I} \cdot \{\Delta_{k,j}^I\}_{p_\ell} \\ \{\delta_k^I\}_{p_\ell} &= \sum_{j=1}^3 \{\delta_k^I\}_{\Delta_{k,j}^I} \cdot \{\Delta_{k,j}^I\}_{p_\ell} \end{aligned} \right\} \quad (141b)$$

$$\text{Wobei : } \{\Delta_{k,j}^I\}_{p_\ell} = \{r_{,j}(t_k - \Delta t_k^I)\}_{p_\ell} - \{R_{k,j}^I\}_{p_\ell}, \quad j=1,2,3 \quad (141c)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{und : } \{\alpha_k^I\}_{\Delta_{k,1}^I} &= -\Delta_{k,2}^I / ((\Delta_{k,1}^I)^2 + (\Delta_{k,2}^I)^2) \\ \{\alpha_k^I\}_{\Delta_{k,2}^I} &= \Delta_{k,1}^I / ((\Delta_{k,1}^I)^2 + (\Delta_{k,2}^I)^2) \\ \{\alpha_k^I\}_{\Delta_{k,3}^I} &= 0 \\ \{\delta_k^I\}_{\Delta_{k,1}^I} &= -\Delta_{k,1}^I \cdot \Delta_{k,3}^I / ((\Delta_k^I)^2 \cdot ((\Delta_{k,1}^I)^2 + (\Delta_{k,2}^I)^2)^{1/2}) \\ \{\delta_k^I\}_{\Delta_{k,2}^I} &= -\Delta_{k,2}^I \cdot \Delta_{k,3}^I / ((\Delta_k^I)^2 \cdot ((\Delta_{k,1}^I)^2 + (\Delta_{k,2}^I)^2)^{1/2}) \\ \{\delta_k^I\}_{\Delta_{k,3}^I} &= ((\Delta_{k,1}^I)^2 + (\Delta_{k,2}^I)^2)^{1/2} / (\Delta_k^I)^2 \end{aligned} \right\} \quad (141d)$$

## 2.4.2.2 FLUGZEITMESSUNG ELEKTROMAGNETISCHER SIGNALE

Im Gegensatz zu den Richtungsbeobachtungen handelt es sich hierbei um eine relativ "junge" Beobachtungsart :

- Mit kurzen LASER - Lichtblitzen werden die Entfernungen zu künstlichen Erdsatelliten und zum Mond gemessen ,
- mit Radarpulsen werden die Distanzen zu den benachbarten Planeten bestimmt .

Wir verwenden die folgende

Definition : Unter einer Flugzeitmessung zur Beobachtungszeit  $t_j$  verstehen wir die mit der Uhr des Beobachters gemessene Laufzeit eines elektromagnetischen Signals , das zur Zeit  $t_j$  den Beobachtungsort verlässt , zur Zeit  $t_j + \Delta t_j$  am beobachteten Himmelskörper reflektiert wird , um anschliessend - zur Zeit  $t_j + \Delta t_{j_1}$  wieder am gleichen Beobachtungsort detektiert zu werden . Die gemessene Funktion ist  $\Delta t_{j_1}$  .

(142)

Es ist klar , dass man zur Interpretation der Messungen im Grunde genommen die allgemeine Relativitätstheorie heranziehen sollte : zum einen sind die Massen der Planeten und der Sonne zu beachten , zum andern überlegt man sich , dass die Bewegung der Beobachtungsstation während des Intervalles  $\Delta t_{j_1}$  nicht geradlinig-gleichförmig ist .

Die beteiligten Massen und die Beschleunigungen der Beobachtungsorte während  $\Delta t_{j_1}$  sind aber so klein , dass man in den meisten Parameterbestimmungsaufgaben annehmen darf , dass die Beobachtung (142) in einem Inertialsystem im Sinne der speziellen Relativitätstheorie durchgeführt wurde , dessen Ursprung  $\vec{R}(t)$  sich wie folgt bewegt :

$$\vec{R}(t) := \vec{R}_j(t) + (t - t_j) \cdot \vec{V}_j \quad (143a)$$

Wobei :  $\vec{R}_j(t)$  : Ortsvektor des Beobachters z.Z.  $t$

$$\vec{V}_j := (\vec{R}_j(t_j + \Delta t_{j_1}) - \vec{R}_j(t_j)) / \Delta t_{j_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V_j^2}{c^2}} \quad (143b)$$

Das korrekte Vorgehen ist jetzt klar : Man transformiert  $\vec{r}(t)$  und  $t$  nach der speziellen Relativitätstheorie in das "Beobachtersystem" , dessen Koordinatenachsen parallel zu den Achsen des verwendeten Bahnkoordinatensystems sind , und dessen Ursprung sich nach (143) bewegt . Die notwendige Transformation setzt sich zusammen aus einer Translation und einer Lorentztransformation , die bis auf Terme der Ordnung  $V_j^2/c^2$  durch eine Galilei-Transformation ( im speziellen Fall eine Identität ) genähert werden kann :

Sei :  $\vec{\Delta}_j(t)$  : Bahn des beobachteten Himmelskörpers  
im Beobachtersystem .

$$\text{Dann gilt : } \vec{\Delta}_j(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}_j(t), \quad (t=t') \quad (144)$$

Weiter überlegt man sich , dass  $\Delta t_{j_1} = 2 \cdot \Delta t_j$  gilt . Die beobachtete Funktion kann also in klassischer (nicht-relativistischer) Näherung wie folgt geschrieben werden :

$$\Delta t_{j_1} = 2 \cdot |\vec{r}(t_j + \Delta t_j) - \vec{R}_j(t_j + \Delta t_j)| / c \quad (145)$$

$$c : \text{Lichtgeschwindigkeit} \quad (145a)$$

Verwendet man an Stelle der klassischen Näherung (144) eine korrekte Lorentztransformation , treten in (145) kleine Korrekturterme  $\sim V_j^2/c^2$  auf , die wir jedoch nicht explizit angeben wollen .

Aus der allgemeinen Gestalt der Fehlergleichungen (28) folgt für die beobachteten Funktionen (145) :

$$\sum_{\ell=1}^n \{ \Delta t_{j_1}^I \}_{p_\ell} \cdot (p_\ell^{I+1} - p_\ell^I) - (\Delta t_{j_1}^I - \Delta t_{j_1}^I) = \rho_j^I \quad (146)$$

Dabei werden die einzelnen Terme in (146) wie folgt berechnet :

$$\Delta t_{j_1}^I = 2 \cdot |\vec{r}^I(t_j + \Delta t_j^I) - \vec{R}_j^I(t_j + \Delta t_j^I)| / c \quad (146a)$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen in (146) muss einmal mehr die Kettenregel verwendet werden :

$$\{ \Delta t_{j_1}^I \}_{p_\ell} = \sum_{k=1}^3 \{ \Delta t_{j_1}^I \}_{\Delta_{j,k}^I} \cdot \{ \Delta_{j,k}^I \}_{p_\ell} \quad (146b)$$

$$\text{Wobei : } \vec{\Delta}_j^I := \vec{r}^I(t_j + \Delta t_j^I) - \vec{R}_j(t_j + \Delta t_j^I) \quad (146c)$$

Damit gilt ( siehe (146a) ) :

$$\{ \Delta t_{j_1}^I \}_{\Delta_{j,k}^I} = 2 \cdot \Delta_{j,k}^I / |\vec{\Delta}_j^I| / c, \quad k=1,2,3 \quad (146d)$$

Schliesslich gilt wegen (143a,b) unter Vernachlässigung von Termen  $\sim v_j^2/c^2$  :

$$\{ \vec{\Delta}_j^I \}_{p_\ell} = \{ \vec{r}^I(t_j + \Delta t_j^I) - (\vec{R}_j(t_j + \Delta t_{j_1}^I) + \vec{R}_j(t_j)) / 2 \}_{p_\ell} \quad (146e)$$

### 2.4.2.3 MESSUNG DES INTEGRIERTEN DOPPLEREFFEKTES EINES VOM BEOBACHTETEN HIMMELSKÖRPER AUSGESANDTEN PERIODISCHEN SIGNALS ( MESSUNG VON DISTANZDIFFERENZEN )

Diese Beobachtungstechnik hat in den siebziger Jahren in der Satellitengeodäsie - nicht zuletzt dank ihrer Zuverlässigkeit und ihrer Wetterunabhängigkeit - eine ausserordentliche Bedeutung erlangt . Mit der Einführung des Global Positioning System (GPS) wird diese Beobachtungstechnik noch wesentlich verbessert werden ; ausserdem ist anzunehmen , dass ähnliche Systeme auch in künstlichen interplanetaren Raumsonden Verwendung finden werden . Die folgenden Ausführungen beziehen sich jedoch lediglich auf das "U.S. Navy Navigational Satellite System (NNSS)" . Zu diesem System gibt es - entsprechend der grossen praktischen Bedeutung dieser Beobachtungsart - eine wahre Flut von Fachliteratur . Auf diese sei der Leser verwiesen , dem die sich ausschliesslich auf das Prinzipielle beschränkende Diskussion in der vorliegenden Arbeit nicht ausreicht ( für eine elementare und gründliche Behandlung siehe {D.E. Wells,1974} ) .

Das Prinzip der Messung ist einfach : Der beobachtete Satellit sendet ein periodisches Signal bekannter Frequenz  $f_s$  aus , welches von Empfängern (Beobachtungsstationen) auf der Erdoberfläche (oder in andern künstlichen Satelliten) registriert wird . Dabei ist die registrierte Frequenz

$f_r = f_r(t)$  nur dann gleich der vom Satelliten ausgesandten Frequenz  $f_s$ , wenn die Radialgeschwindigkeit zwischen Satellit und Empfangsstation gleich Null ist. Die Differenz  $f_r(t) - f_s$  ist also ein Mass für diese Radialgeschwindigkeit. Nun ist es technisch nicht einfach, die Frequenzen  $f_r(t)$  mit hoher Genauigkeit zu messen. Aus diesem Grunde wird nicht die Radialgeschwindigkeit, sondern die Distanzdifferenz zwischen Satellit und Empfänger während den Zeitintervallen  $[t_j, t_j + \Delta t]$  gemessen. Vom mathematischen Standpunkt aus beurteilt bedeutet dies das Ersetzen eines Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten. Beim NNSS werden diese Zeitintervalle durch den Satelliten selbst generiert, indem dem Periodischen Signal der Frequenz  $f_s$  zu den Zeiten  $t_0 + j \cdot \Delta t$ ,  $j=1,2,\dots$  Zeitmarken überlagert werden, die dazu dienen, die Dopplierzähler zu starten resp. zu stoppen. (Für die NNSS-Satelliten gilt übrigens  $\Delta t \approx 4.6 \text{ sec}$ ).

Die von einer Beobachtungsstation mit Nr.  $i$  zur Zeit  $t_j$  gemessene Funktion beträgt (per Definitionem):

$$N_j = \int_{t_j + \Delta t_{j1}}^{t_j + \Delta t + \Delta t_{j2}} (f_g - f_r(t')) \cdot dt' \quad (147)$$

Dabei ist  $f_g$  eine vom Empfänger generierte Frequenz der gleichen Grössenordnung wie  $f_s$ ;  $\Delta t_{ji}$ ,  $i=1,2$  sind die Laufzeiten des Start- resp. Stoppsignals zwischen Satellit und Empfänger.

Das Integral (147) kann ausgewertet werden.

Zunächst gilt (mit den gleichen Integrationsgrenzen wie in (147)):

$$\int_{\dots}^{\dots} f_g \cdot dt' = f_g \cdot (\Delta t + \Delta t_{j2} - \Delta t_{j1}) \quad (147a)$$

Weiter ist die Zahl der beim Empfänger im Zeitintervall  $[t_j + \Delta t_{j1}, t_j + \Delta t + \Delta t_{j2}]$  registrierten Perioden gleich der Anzahl der beim Satelliten im Intervall  $[t_j, t_j + \Delta t]$  emittierten Perioden:

$$\int_{t_j + \Delta t_{j1}}^{t_j + \Delta t + \Delta t_{j2}} f_r(t') \cdot dt' = f_s \cdot \Delta t \quad (147b)$$

$$t_j + \Delta t_{j1}$$

Setzt man (147a,b) in (147) ein , so folgt das formal einfache Resultat :

$$\underline{N_j = \Delta t \cdot (f_g - f_s) + f_g \cdot (\Delta t_{j2} - \Delta t_{j1})} \quad (147c)$$

Bei der Beobachtung künstlicher Erdsatelliten sind die Signallaufzeiten sehr kurz ( einige Millisec. ) , so dass man annehmen darf , dass sich die Beobachtungsstationen während dieser Zeiten geradlinig gleichförmig bewegen . Unter dieser Voraussetzung können die  $\Delta t_{ji}$  ,  $i=1,2$  im System des Beobachters wie folgt berechnet werden :

$$\underline{\Delta t_{ji} = |\vec{r}(t_j + (i-1) \cdot \Delta t) - \vec{R}(t_j + (i-1) \cdot \Delta t)| / c , i=1,2} \quad (147d)$$

In (147d) stecken noch weitere vereinfachende Annahmen , z.B. die , dass die Refraktion in der Troposphäre und in der Ionosphäre der Erde vernachlässigbar sind . Diese und andere Effekte müssen bei der Verarbeitung von reellen Beobachtungen in Form von Korrekturtermen berücksichtigt werden ( siehe {D.E. Wells,1974} ) .

In der Praxis wird übrigens beim NNSS das Stoppsignal der  $j$ -ten Beobachtung zugleich als Startsignal der  $(j+1)$ -ten Beobachtung verwendet , sodass die einzelnen Beobachtungen effektiv nicht unabhängig voneinander sind . Normalerweise wird diese Abhängigkeit jedoch nicht berücksichtigt .

Abschliessend kann noch die dieser Dopplerbeobachtungsmethode zugeordnete Fehlergleichung für die Beobachtung Nr.  $j$  angegeben werden :

$$\underline{\sum_{\ell=1}^n \{N_j^I\} p_{\ell} \cdot (p_{\ell}^{I+1} - p_{\ell}^I) - (N_j^I - N_j^I) = \rho_j^I} \quad (148)$$

$N_j^I$  wird (näherungsweise) nach (147c,d) berechnet , die Berechnung der partiellen Ableitungen verläuft analog wie in (146) .

### 3. PARAMETERBESTIMMUNGSPROBLEME DER KLASSISCHEN HIMMELSMCHANIK

---

#### 3.1 DIE AXIOME DER KLASSISCHEN MECHANIK UND DAS NEWTON'SCHE GRAVITATIONSGESETZ

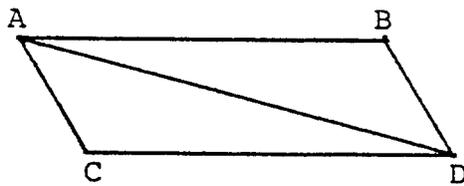
---

Newton beginnt sein Werk "Philosophiae naturalis principia mathematica" {I. Newton,1687} mit einem Kapitel "Erklärungen" . Dort erläutert er Begriffe wie Masse , Bewegungsgrösse (=Impuls) und Kraft . Weitere Begriffe wie Raum , Zeit und Ort werden als allgemein bekannt vorausgesetzt . Im zweiten Kapitel "Grundsätze oder Gesetze der Bewegung" werden die drei bekannten Axiome formuliert , die wir an dieser Stelle wörtlich aus der deutschen Uebersetzung des Werkes von Newton zitieren {J.Ph. Wolfers,1872} :

1. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung , wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird , seinen Zustand zu ändern .
2. Die Aenderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie , nach welcher jene Kraft einwirkt .
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich , oder die Wirkungen zweier Körper auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung .

(149)

Newton lässt diesen Gesetzen ( heute spricht man korrekter von Axiomen ) mehrere sogenannte Zusätze folgen , von denen wir die beiden ersten , in welchem das Superpositionsprinzip der Kräfte definiert wird - wiederum aus {J.Ph. Wolfers,1872} - zitieren wollen .



Zusatz 1 : Ein Körper beschreibt in derselben Zeit , durch Verbindung zweier Kräfte die Diagonale eines Parallelogrammes , in welcher er , vermöge der einzelnen Kräfte die Seiten beschrieben haben würde .

Zusatz 2 : Hieraus ergibt sich die Zerlegung der geradlinig wirkenden Kräfte AD , aus irgend welchen zwei schiefwirkenden AB und BD und umgekehrt die Zerlegung einer geradlinigen Kraft AD in die beliebigen schiefen AB und BD . Diese Zerlegung wird in der Mechanik vollständig bestätigt . (149a)

Schliesslich formuliert Newton in demselben Werk {I. Newton, 1687} sein Gravitationsgesetz ( wir verzichten zugunsten einer durchsichtigeren Formulierung auf eine wörtliche Wiedergabe ) :

Newton'sches Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Massen wirkt eine Anziehungskraft , die dem Produkt ihrer Massen direkt , dem Quadrat ihrer Entfernung indirekt proportional ist . (150)

(150) gilt streng genommen nur für sogenannte Massenpunkte oder für kugelsymmetrische Massenverteilungen . Da die Massenverteilungen der Sonne und der Planeten nahezu kugelsymmetrisch sind , und da die gegenseitigen Abstände dieser Himmelskörper sehr gross sind im Vergleich zu deren Durchmessern , kann (150) für praktisch alle Aufgaben der klassischen Himmelsmechanik als ausreichend gute Näherung verwendet werden . ( Dass (150) die gegenseitige Anziehung eines Kleinplaneten (oder Kometen) und eines grossen Planeten (oder der Sonne) genügend gut beschreibt , ist in Anbetracht der Kleinheit des ersteren sowieso evident ) .

Den Newton'schen Axiomen ist implizite ein Inertialsystem zugrunde gelegt worden . Darunter ist eine Zeitskala (nach Newton die absolute Zeit) und ein kartesisches Koordinatensystem des dreidimensionalen euklidischen Raumes zu verstehen , das gegenüber dem Newton'schen absoluten Raum nicht rotiert {M. Schürer,1937} .

Es stellt sich natürlich die Frage nach der Realisierung resp. nach der Realisierbarkeit eines solchen Inertialsystems . Dieses Problem , das von I. Bauersima {I. Bauersima, 1976} in extenso behandelt worden ist , interessiert in der vorliegenden Arbeit nur am Rande ( siehe immerhin Kapitel 3.4.1 ) . Wo nichts anderes erwähnt wird , werden wir in dieser Arbeit das in (131) definierte "Ruhesystem der Fixsterne" (KS0) als genügend gute Näherung für ein Inertialsystem verwenden . ( Siehe dazu auch {I. Bauersima,1976,p.8} ) . Als Näherungen für die "absolute Zeit" stehen heute Ephemeridenzeit und Atomzeit zur Verfügung - erstere allerdings nur a posteriori . ( Definition der Ephemeridenzeit siehe {Explanatory Supplement,1961,p.69} , Definition der Atomzeit siehe z.B. {B.I.H.,1981} , {I. Bauersima,1980} .

Heute weiss man , dass die aus dem Axiomensystem (149) und aus dem Gravitationsgesetz (150) folgende Theorie der Planetenbewegung lediglich eine Näherung der aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgenden Theorie der Planetenbewegung ist .

Die Newton'sche Näherung ist allerdings sehr gut : Einzig die Periheldrehungen der inneren Planeten ( bei Merkur die bekannten 43" pro Jahrhundert ) können durch die aus (149) , (149a) und (150) folgende Newton'sche Mechanik des Planetensystems nicht erklärt werden .

Vergleicht man die Einfachheit der Newton'schen Axiome und des Newton'schen Gravitationsgesetzes mit dem doch sehr anspruchsvollen mathematischen Apparat der allgemeinen Relativitätstheorie , leuchtet es ein , dass der Praktiker noch auf lange Sicht der Newton'schen Formulierung den Vorzug geben wird . Dies ist bestimmt bei Parameterbestimmungsaufgaben

gerechtfertigt : Präzise Beobachtungen sind ja erst im relativ kurzen Zeitintervall der letzten 300 Jahre gemacht worden . Für solche vergleichsweise kurze Zeitintervalle ist es immer erlaubt ; die aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgenden Periheldrehungen den nach der Newton'schen Theorie berechneten Planetenephemeriden zu überlagern , oder aber die Grundgleichungen "leicht zu modifizieren" :

a. Formel für die Berechnung der Periheldrehungen :

$$\Delta\omega = 3 \cdot n \cdot \frac{k^2}{p \cdot c^2} \text{ (Bogenmass/Tag)} \quad (151)$$

Wo :  $\Delta\omega = \omega_{\text{relat.}} - \omega_{\text{klassisch}}$

k = Gauss'sche Konstante

a = Halbachse der Bahnellipse

p =  $a \cdot (1 - e^2)$  : Parameter der Ellipse (151a)

e : Numerische Exzentrizität

n =  $k/a^{3/2}$  : mittlere Bewegung

c = 173.14463 A.E./Tag : Lichtgeschwindigkeit

b. Modifikation der Grundgleichungen

Diese Grundgleichungen werden im nächsten Kapitel hergeleitet ( siehe (156) , (156a) ) . Die relativistischen Effekte werden in ausreichender Genauigkeit erfasst , wenn die Hauptterme (siehe (156a)) auf folgende Weise modifiziert werden :

Newton'scher Hauptterm	Relativistischer Hauptterm	
$-k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$	$-k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \cdot \left( 1 + 3 \cdot \frac{k^2 \cdot p_i}{r_i^2 \cdot c^2} \right)$	(152)
i = 1, 2, ..., N		

$p_i$  ist - wie in (151a) - der Parameter der betreffenden Ellipse . Wegen der Kleinheit der relativistischen Effekte ist es weder in (151) noch in (152) nötig , die Bahnelemente resp. Bahnparameter näher zu spezifizieren ( oskulierende/mittlere ) .

(151) resp. (152) sind Konsequenzen der Schwarzschild-Lösung

der allgemeinen Relativitätstheorie ( näheres dazu siehe z.B. {Adler,Bazin,Schiffer,1965,Kap.6} ) .

Fassen wir zusammen :

- Heute weiss man , dass die Planetenephemeriden allgemein-relativistisch berechnet werden müssten .
- Die Abweichungen gegenüber den nach der Newton'schen Theorie berechneten Planetenephemeriden sind für relativ kurze Zeitintervalle ( kürzer als ca. 1000 Jahre ) so klein , dass man sie durch eines der beiden folgenden "Rezepte" in ausreichender Näherung erfasst : (153)
  - a. Man rechnet nach der Newton'schen Theorie und korrigiert anschliessend die Ephemeriden nach (151) .
  - b. Man modifiziert die Grundgleichungen nach (152) .

Im übrigen leuchtet es ein , dass diese Korrekturen nur dann angebracht werden müssen , wenn tatsächlich über lange Zeitintervalle unter Einbezug der inneren Planeten (Merkur,Venus) integriert werden muss .

Im folgenden werden wir den relativistischen Korrekturen keine Beachtung mehr schenken .

### 3.2 DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER HIMMELSMCHANIK DES PLANETEN-SYSTEMS

---

Unter dem Ausdruck "Grundgleichungen der Himmelsmechanik des Planetensystems" verstehen wir in der vorliegenden Arbeit die Gesamtheit aller Bewegungsgleichungen aller Himmelskörper unseres Sonnensystems ( Sonne , Planeten , Planetoiden Kometen , Monde der Planeten ) . Dabei ist klar , dass wir es bei konkreten Problemstellungen immer nur mit einer Teilmenge dieser Grundgleichungen zu tun haben werden .

Wir leiten die Grundgleichungen direkt aus (149) , (149a) und (150) her . Das bedeutet , dass wir diese Gleichungen bezüglich eines Inertialsystems aufstellen müssen . Als bestmögliche Näherung für ein solches Inertialsystem steht uns

das in (131) definierte KS0 zur Verfügung . Anschliessend transformieren wir die Grundgleichungen in ein nicht inertiales heliozentrisches System . Wichtig ist dabei lediglich , dass dieses neue Koordinatensystem gegenüber dem Inertialsystem nicht rotiert . Wir können es mit dem KS1 oder mit dem KS2 identifizieren .

In Tabelle 12 fassen wir die verwendeten Bezeichnungen zusammen :

Tabelle 12

Himmelskörper	Masse	Ortsvektoren	
		KS0	KS1,KS2
Sonne	$m_0$	$\vec{x}_0$	$\vec{0}$
Planeten Planetoiden Kometen ...	$m_i$	$\vec{x}_i$	$\vec{r}_i := \vec{x}_i - \vec{x}_0$ $r_i :=  \vec{r}_i $
$i = 1, 2, \dots, N$			

(154)

Bemerkungen und Ergänzungen zu Tabelle 12

N ist die totale Anzahl der Himmelskörper des Planetensystems exklusive die Sonne .

Die physikalische Bedeutung der Vektoren  $\vec{r}_i$  ist (koordinatensystemunabhängig) durch  $\vec{r}_i := \vec{x}_i - \vec{x}_0$  ,  $i=1,2,\dots,N$  gegeben ; zusätzlich darf man sie als Ortsvektoren der Systeme KS1 , KS2 auffassen ( siehe (132a,b) ) .

Zeit- , Längen- und Masseneinheiten werden wie folgt gewählt :

Zeiteinheit : $1^d = 1$ Ephemeridentag	(154a)
Längeneinheit: 1 A.E. = 1 Astronomische Einheit	
Masseneinheit: 1 Sonnenmasse = $1.9891 \cdot 10^{30}$ kg	

( Die metrischen Aequivalente für die Einheiten wurden dem IAU(1976)-System der astronomischen Konstanten entnommen ) .

Mit den Einheiten (154a) ist die Gravitationskonstante gleich dem Quadrat der Gauss'schen Konstanten  $k$  :

$$k = 0.01720209895 \quad (154b)$$

Die Vektoren  $\vec{x}_i$ ,  $\vec{r}_i$  sind Funktionen der Ephemeridenzeit  $t$ . Die Ableitungen dieser Vektoren nach  $t$  definieren wir wie üblich durch :

$$\vec{x}_i^{(\ell)} = \frac{d^\ell}{dt^\ell}(\vec{x}_i), \quad \vec{r}_i^{(\ell)} = \frac{d^\ell}{dt^\ell}(\vec{r}_i), \quad i=(0),1,2,\dots,N \quad (154c)$$

$\ell=0,1,\dots$

Damit endlich zur Aufstellung der Grundgleichungen :

Figur 7

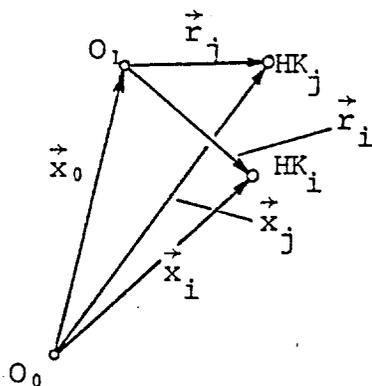
Legende

$O_0$  : Ursprung des KS0 ( siehe (131) )  
 $O_1$  : Ursprung des KS1 und des KS2  
 (= Sonnenmittelpunkt )

$HK_i, HK_j$  : Zwei beliebige Himmelskörper des Sonnensystems ( exklusive Sonne ) .

$\vec{x}_i, \vec{x}_j$  : deren Ortsvektoren im KS0 ,

$\vec{r}_i, \vec{r}_j$  : deren Ortsvektoren im KS1 resp. KS2 .



Nach dem zweiten Newton'schen Axiom in (149) ist die Änderung der Bewegung - in heutiger Sprechweise die Ableitung des Impulses nach der Zeit  $t$  - der resultierenden Kraft gleichzusetzen ( und dies für jeden Himmelskörper des Planetensystems ) . Diese resultierende Kraft wiederum berechnet man mit den Zusätzen (149a) als vektorielle Summe der nach (150) berechneten Gravitationskräfte aller übrigen Körper des Planetensystems .

Falls man annehmen darf , dass sämtliche Himmelskörper eine kugelsymmetrische Massenverteilung aufweisen , gilt :

$$(m_i \cdot \vec{x}_i^{(1)})^{(1)} = -k^2 \cdot m_i \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}, \quad i=0,1,\dots,N \quad (155a)$$

Da in der Newton'schen Mechanik die Massen  $m_i, i=0,1,\dots,N$  konstant sind, dürfen wir einfacher schreiben:

$$\ddot{\vec{x}}_i^{(2)} = -k^2 \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}, \quad i=0,1,\dots,N \quad (155b)$$

(155b) ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit insgesamt  $3 \cdot (N+1)$  Gleichungen. Wir nennen es das Grundgleichungssystem der klassischen Himmelsmechanik bezüglich des Inertialsystems.

Subtrahiert man das Differentialgleichungssystem für den Ortsvektor  $\vec{x}_0$  der Sonne von allen übrigen Gleichungen (155b), erhält man unverzüglich das System der Grundgleichungen bezüglich des heliozentrischen Systems:

$$\ddot{\vec{r}}_i^{(2)} = -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (156)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

(156) ist ein gewöhnliches, explizites Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit  $3 \cdot N$  Gleichungen. Wie allgemein üblich führen wir für die Terme auf der rechten Seite von (156) die folgenden Bezeichnungen ein:

$$-k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} : \text{Hauptterm der auf den } i\text{-ten Himmelskörper ausgeübten Kraft ( pro Masseneinheit )}$$

$$-k^2 \cdot m_j \cdot \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) : \text{Die vom Himmelskörper Nr. } j \text{ auf den Himmelskörper Nr. } i \text{ ausgeübte Störkraft ( pro Masseneinheit ) .} \quad (156a)$$

Anmerkung : Normalerweise interessieren nur die Lösungen des Systems (156) , nicht aber die Lösungen von (155b) . Die Lösungen von (155b) können jedoch auf einfachste Art und Weise mit Hilfe der Lösungen von (156) rekonstruiert werden :

Man multipliziere das i-te Teilsystem (155b) mit  $m_i$  und addiere alle so entstandenen Gleichungssysteme . Man weist leicht nach , dass gilt :

$$\sum_{i=0}^N m_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i^{(2)} = \vec{0} \quad , \quad \vec{0} : \text{Nullvektor} \quad (157a)$$

(157a) kann zweimal integriert werden :

$$\sum_{i=0}^N m_i \cdot \dot{\vec{x}}_i = \dot{\vec{X}}_{00} + \dot{\vec{X}}_{01} \cdot (t-t_0) \quad (157b)$$

(157b) bringt die wohlbekannte Tatsache zum Ausdruck , dass sich der Schwerpunkt des Gesamtsonnensystems - in jedem beliebigen Inertialsystem - geradlinig gleichförmig bewegt .

In unserem speziellen Inertialsystem KS0 ( siehe (131) ) gilt insbesondere

$$\dot{\vec{X}}_{0i} = \vec{0} \quad , \quad i=0,1 \quad (157c)$$

Damit aber folgt :

$$\sum_{i=0}^N m_i \cdot \dot{\vec{x}}_i \stackrel{(154)}{=} \sum_{i=0}^N m_i \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{x}}_0) = \vec{0} \quad , \quad (\dot{\vec{r}}_0 = \vec{0})$$

oder :

$$\dot{\vec{x}}_0 = - \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{\left( \sum_{i=0}^N m_i \right)} \quad (157d)$$

Mit (157d) und (154) wiederum folgen die Lösungen für die Ortsvektoren des Inertialsystems KS0 :

$$\underline{\vec{x}}_i = \underline{\vec{r}}_i + \underline{\vec{x}}_0 \quad (157e)$$

Dem Differentialgleichungssystem (156) entspricht in jedem heliozentrischen Koordinatensystem ein Differentialgleichungssystem für die den Ortsvektoren  $\vec{r}_i(t)$  zugeordneten Spaltenmatrizen  $r_{iB_k}(t)$  ( vergleiche (130e) ) .

Genau genommen löst man bei konkreten Problemstellungen die Differentialgleichungssysteme für die den heliozentrischen Ortsvektoren in einem bestimmten Koordinatensystem  $B_k$  zugeordneten Komponentenmatrizen .

Das System für die Komponentenmatrizen folgt aus (156) , wenn man die Vektoren durch die entsprechenden Matrizen ersetzt :

$$\begin{aligned} r_{iB_k} |^{(2)} &= -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \frac{r_{iB_k} |}{r_i^3} \\ &- k^2 \cdot \sum_{j=1}^N m_j \cdot \left( \frac{d_{ijB_k} |}{d_{ij}^3} + \frac{r_{jB_k} |}{r_j^3} \right) =: f_{iB_k} | \end{aligned} \quad (158)$$

$$\text{Wo : } (r_{iB_k} |)^T := (r_{iB_k,1}, r_{iB_k,2}, r_{iB_k,3}) \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (158a)$$

$$d_{ijB_k} | := r_{iB_k} | - r_{jB_k} | \quad , \quad i=1,2,\dots,N, j=1,2,\dots,N, i \neq j \quad (158b)$$

$$r_i := (r_{iB_k,1}^2 + r_{iB_k,2}^2 + r_{iB_k,3}^2)^{1/2} \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (158c)$$

$$d_{ij} := (d_{ijB_k,1}^2 + d_{ijB_k,2}^2 + d_{ijB_k,3}^2)^{1/2} \quad (158d)$$

Dass (158) ein Spezialfall von (10) ist , sieht man durch die folgenden Relationen :

$$\begin{aligned} n &= 2 \quad ( \text{ Ordnung des Systems } ) \\ d &= 3 \cdot N \quad ( \text{ Dimension des Systems } ) \\ \kappa_i | &= r_{iB_k} | \quad , \quad i=1,2,\dots,N \\ s_{i+1} &= m_i \quad , \quad i=0,1,\dots,N \\ \gamma_i | &= f_{iB_k} | \quad , \quad i=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (158e)$$

Als Parameter vom Typ 2 ( siehe Tabelle 1 ) haben wir hier lediglich die Massen  $m_i$  ,  $i=0,1,\dots,N$  der Himmelskörper des Planetensystems eingeführt . Eigentlich käme noch die Gravitationskonstante  $k^2$  dazu ; diese kann jedoch nur dann bestimmt werden , wenn zusätzlich zu Richtungen auch metrische Grössen ( Distanzen , Distanzdifferenzen ) beobachtet worden sind . Da nun die Richtungsbeobachtungen bei den Problemstellungen der klassischen Himmelsmechanik dominieren , werden wir  $k^2$  .

immer als eine gegebene Konstante betrachten .

Setzen wir nun in Analogie zu (11)

$$\begin{array}{l} \underline{y} := (\underline{r_{1B_k}}, \underline{r_{2B_k}}, \dots, \underline{r_{NB_k}}) \\ \underline{f} := (\underline{f_{1B_k}}, \underline{f_{2B_k}}, \dots, \underline{f_{NB_k}}) \end{array} \quad \left| \quad \right. \quad (158f)$$

, kann (158) wie folgt

dargestellt werden :

$$\underline{y} |^{(2)} = f(t; \underline{y} |) \quad (159)$$

Bei Parameterbestimmungsproblemen im Planetensystem geht es stets darum , partikuläre Lösungen des Systems (159) zu finden .

Eine solche partikuläre Lösung ist bestimmt durch die beteiligten Massen  $m_i$  ,  $i=0,1,\dots,N$  sowie durch die Gleichungen (13a) resp. (13b) .

Wird eine Aufgabe als Anfangswertaufgabe gestellt ( Fall (13a) ) müssen Parameter  $c_i, i=1,2,\dots,n_1$  vom Typ 1 bestimmt werden , die die Orts- und die Geschwindigkeitsvektoren aller Himmelskörper zur Ausgangsepoche  $T_0$  bestimmen , wird eine Aufgabe als Randwertaufgabe gestellt ( Fall (13b) ) , müssen Parameter  $c_i, i=1,2,\dots,n_1$  vom Typ 1 bestimmt werden , die die Ortsvektoren sämtlicher beteiligter Himmelskörper zu den Zeiten  $T_i, i=1,2$  eindeutig bestimmen .

### SPEZIALFALL : HIMMELSKÖRPER MIT VERNACHLÄSSIGBARER MASSE

Sind in (156) alle Massen  $m_i \neq 0$  ,  $i=0,1,\dots,N$  , wird dadurch ein System von  $3 \cdot N$  gekoppelten Differentialgleichungen dargestellt , das simultan gelöst werden muss .

Es kommt aber häufig vor , dass im System (156) Bahnen von Planetoiden und/oder Bahnen von Kometen (mit)berechnet werden müssen , deren Massen gegenüber den Massen der Sonne und der Planeten getrost vernachlässigt werden dürfen . In diesem Falle ist es möglich , das System (156) in zwei Teilsysteme aufzuspalten , die getrennt voneinander integriert werden können .

$$\text{Es gelte : } m_{i^*} = 0 \quad , \quad i^* \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (160)$$

Lässt man im System (156) die (vektorielle) Gleichung für den Himmelskörper mit Nummer  $i^*$  weg , folgt :

$$\vec{r}_i^{(2)} = -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq i^*}}^N m_j \cdot \left( \frac{\vec{d}_{ij}}{d_{ij}^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (161)$$

---


$$i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad i \neq i^*$$

Wobei in Analogie zu (158b) , (158d) :

$$\vec{d}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad , \quad d_{ij} = |\vec{d}_{ij}| \quad (161a)$$

Im System (161) treten die Koordinaten des Himmelskörpers mit der Nummer  $i^*$  nicht auf , (161) kann also unabhängig vom nachfolgenden System gelöst werden .

Mit (160) kann die  $i^*$ -te Gleichung des Systems (156) wie folgt geschrieben werden :

$$\vec{r}_{i^*}^{(2)} = -k^2 \cdot m_0 \cdot \frac{\vec{r}_{i^*}}{r_{i^*}^3} - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i^*}}^N m_j \cdot \left( \frac{\vec{d}_{i^*j}}{d_{i^*j}^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (162)$$

(162) ist ein explizites , gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit drei Gleichungen , das unabhängig von (161) integriert werden kann , falls auf der rechten Seite die  $\vec{r}_j(t)$  als bekannt vorausgesetzt werden dürfen . Dies aber darf man annehmen , falls das System (161) vorher gelöst worden ist .

Sind im ursprünglichen System insgesamt  $k^* \geq 1$  Himmelskörper mit vernachlässigbarer Masse vertreten , lässt sich (156) in analoger Weise in ein "grosses" System mit  $3 \cdot (N - k^*)$  Gleichungen der Art (161) und in  $k^*$  voneinander unabhängige "kleine" Systeme der Art (162) mit je drei Gleichungen zerlegen .

Die Differentialgleichungssysteme für die den Himmelskörpern zugeordneten Spaltenmatrizen folgen aus den Systemen (161) , (162) , wenn man - formal - die Vektoren  $\vec{r}_i$  ,  $\vec{d}_{ij}$  durch die entsprechenden Matrizen  $r_{iB_k}$  ,  $d_{ijB_k}$  ersetzt ;  $i = 1, 2, \dots, N$  ,  $j = 1, 2, \dots, N$  ,  $i \neq j$  .

### 3.3 DIE ZUGEHÖRIGEN VARIATIONSGLEICHUNGEN

Die Herleitung der Variationsgleichungen für die durch die Grundgleichungen (156) definierten Parameterbestimmungsaufgaben der klassischen Himmelsmechanik läuft genau nach dem in Kapitel 2.1.5 gegebenen Schema : Das System (156) muss nach jedem der zu bestimmenden Parameter  $p_\ell$ ,  $\ell=1,2,\dots,n_p$  (siehe Tabelle 1) abgeleitet werden. Zu jedem Index  $\ell$  resultiert ein gewöhnliches, explizites, lineares Differentialgleichungssystem in der Zeit  $t$ . Die zugehörigen Anfangs- resp. Randbedingungen erhält man durch Differentiation der entsprechenden Bedingungen des Primärgleichungssystems nach den betreffenden Parametern.

Wir beschränken uns darauf, das Resultat anzugeben :

$$\begin{aligned}
 \{\vec{r}_i\}_{p_\ell}^{(2)} = & -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{1}{r_i^3} \cdot (\{\vec{r}_i\}_{p_\ell} - \frac{3}{r_i^2} \cdot (\vec{r}_i \cdot \{\vec{r}_i\}_{p_\ell}) \cdot \vec{r}_i) \quad *) \\
 & - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \frac{1}{d_{ij}^3} \cdot (\{\vec{d}_{ij}\}_{p_\ell} - \frac{3}{d_{ij}^2} \cdot (\vec{d}_{ij} \cdot \{\vec{d}_{ij}\}_{p_\ell}) \cdot \vec{d}_{ij}) \quad *) \\
 & - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \frac{1}{r_j^3} \cdot (\{\vec{r}_j\}_{p_\ell} - \frac{3}{r_j^2} \cdot (\vec{r}_j \cdot \{\vec{r}_j\}_{p_\ell}) \cdot \vec{r}_j) \quad *) \\
 & - k^2 \cdot \begin{cases} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}, & \text{falls } p_\ell = m_0 \text{ oder } p_\ell = m_i \\ \frac{\vec{d}_{ik}}{d_{ik}^3} + \frac{\vec{r}_k}{r_k^3}, & \text{falls } p_\ell = m_k, \quad k \neq i, k \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{163}$$

$i = 1, 2, \dots, N$   
 $\ell = 1, 2, \dots, n_p$

\*) Unter  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ist das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  zu verstehen.

Für jeden Index  $\ell$  resultiert also ein Differentialgleichungssystem mit insgesamt  $3 \cdot N$  Gleichungen .

Verwendet man auch hier die Schreibweise (158f) , verifiziert man leicht , dass (163) wie folgt geschrieben werden kann :

$$\underline{\{y|\}_{P_\ell}^{(2)} = P_0(t) \cdot \{y|\}_{P_\ell} + \{f|\}_{P_\ell}} \quad (164a)$$

Oder , wenn man nach (52)  $z_\ell(t) | := \{y(t) | \}_{P_\ell}$  setzt :

$$\underline{z_\ell |^{(2)} = P_0(t) \cdot z_\ell(t) | + \{f|\}_{P_\ell}} , \ell=1,2,\dots,n_p \quad (164b)$$

(164b) ist - wie nicht anders zu erwarten - ein Spezialfall von (54) . Die Kolonnenmatrix  $\{f|\}_{P_\ell}$  ist nur in den Fällen ungleich der Nullmatrix , wenn  $p_\ell$  ein Parameter vom Typ 2 , also bei unserer Problemstellung eine der Massen  $m_i, i=0,1,\dots,N$  ist .

Genau gleich wie das System (156) kann auch das System (163) resp. (164a,b) in Teilsysteme aufgespalten werden , die unabhängig voneinander integriert werden können , wenn eine oder mehrere Massen  $m_i$  ,  $i=1,2,\dots,N$  vernachlässigt werden können . Die explizite Gestalt der resultierenden Teilsysteme unterscheidet sich nur unwesentlich von (163) ; wir verzichten daher darauf , sie speziell anzugeben .

Man sollte sich der Tatsache bewusst sein , dass Parameterbestimmungsaufgaben der klassischen Himmelsmechanik rechenintensiv sein können . Dazu

Beispiel 8 : Abschätzung des Rechenaufwandes bei Problemen der klassischen Himmelsmechanik

Aufgabe : Mit Hilfe von Beobachtungen der 9 Planeten und von 20 Kleinplaneten ( vernachlässigbarer Massen ) bestimme man die Komponenten der Orts- und der Geschwindigkeitsvektoren sämtlicher Himmelskörper zur Ausgangsepoche  $T_0$  , sowie die Massen der neun Planeten .

Wieviele Anfangswertprobleme sind bei jedem Iterationsschritt in Schema (66) resp. (67) zu lösen ?

Welches ist die Dimension der Differentialgleichungssysteme ?

Lösung :

Es ist :  $N = 29$  ( Anzahl beteiligter Himmelskörper ohne Sonne )  
 $n_1 = 29 \cdot 6$  ( Anzahl Parameter vom Typ 1 , im Beispiel wurden \*)  
          direkt die Komponenten der Orts/Geschwindigkeits-  
          vektoren z.Z.  $T_0$  als Parameter gewählt )  
 $n_2 = 9$  ( Anzahl Parameter vom Typ 2 ) \*)  
Somit :  $n_p = 183$  ( Totale Anzahl gesuchter Parameter ) .

\*) Siehe Tabelle 1 .

Daraus folgt , dass bei jedem Iterationsschritt in Schema (66) resp. (67)

- a. ein nicht lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit insgesamt  $3 \cdot N = 87$  Gleichungen vom Typ (156) sowie
- b.  $n_p = 183$  lineare Systeme mit je  $3 \cdot N = 87$  Gleichungen gelöst werden müssen .

Dabei kann das System (156) zerlegt werden in ein "grosses" System mit  $3 \cdot (N-20) = 27$  Gleichungen der Art (161) und 20 "kleine" Systeme zu je drei Gleichungen . Dieselbe Zerlegung gilt auch für jedes der 183 Variationsgleichungssysteme . Man überlegt sich dabei leicht , dass die Ableitungen der Ortsvektoren  $\{\vec{r}_i\}_{p_\ell}$  für alle  $i \neq i^*$  identisch ver-

schwinden , falls  $p_\ell$  eine Anfangsbedingung (Komponente eines Orts- oder Geschwindigkeitsvektors z.Z.  $T_0$ ) des Himmelskörpers Nummer  $i^*$  mit vernachlässigbarer Masse ist .

Damit reduziert sich die Anzahl der zu lösenden linearen Gleichungssysteme effektiv um  $6 \cdot 20 = 120$  "grosse" Systeme mit je 27 Gleichungen und um  $6 \cdot 19 \cdot 20 = 2280$  "kleine" Systeme mit je drei Gleichungen

Alles in allem müssen daher bei jedem Iterationsschritt in (66)/(67) die folgenden Gleichungssysteme (Anfangswertaufgaben) gelöst werden :

1. Ein "grosses" nicht lineares System mit 27 Gleichungen .
2. 20 "kleine" nicht lineare Systeme mit je 3 Gleichungen .
3.  $n_p - 6 \cdot 20 = 63$  "grosse" lineare Systeme mit je 27 Gleichungen
4. 1380 "kleine" lineare Systeme mit je drei Gleichungen .

Man tut gut daran , sich diese Grössenordnungen vor Augen zu halten : Es war somit in der Vor-Computer-Aera völlig ausgeschlossen , Parameterbestimmungsprobleme der Himmelsmechanik mit dem in der vorliegenden Arbeit dargestellten mathematischen Apparat anzupacken . Heute ist dies auch mit den an kleineren Institutionen vorhandenen Rechenkapazitäten durchaus möglich .

Mit einem Teilaspekt der Lösung von Systemen mit vielen Differentialgleichungen bei gewissen in Kapitel 2.3 vorgestellten Integrationsmethoden werden wir uns noch in Kapitel 3.4.1 zu befassen haben (siehe Seite 157ff.) .

Abschliessend sei in diesem Kapitel daran erinnert , dass man die den Systemen (163) resp. (164) zugeordneten Anfangs- resp. Randbedingungen durch Ableiten der entsprechenden Gleichungen des Primärsystems erhält . Bis auf den Index I sind diese Gleichungen identisch mit (55a) resp. (55b) .

### 3.4 KONKRETE PROBLEMSTELLUNGEN

---

Es liegt auf der Hand , dass man - ausgehend von den Grundgleichungen (156) - die verschiedensten Spezialaufgaben formulieren könnte , je nachdem , was man dort als bekannt resp. unbekannt annimmt .

Wir beschränken uns darauf , in den nächsten beiden Abschnitten zwei Probleme zu diskutieren : Das erste Problem "Bestimmen aller Parameter" ist das allgemeinst mögliche , das zweite "Bahnbestimmung" ist das bescheidenste , aber wohl auch das in der Praxis am häufigsten auftretende .

#### 3.4.1 BESTIMMEN "ALLER" PARAMETER DES PLANETENSYSTEMS

---

Diese Aufgabe ist identisch mit der Lösung des gesamten Grundgleichungssystems (156) , wobei alle Parameter - alle Massen der Himmelskörper endlicher Masse sowie alle Anfangsbedingungen - bestimmt werden müssen ( eine Formulierung als Randwertaufgabe wäre durchaus möglich , würde jedoch bei dieser Problemstellung kaum Vorteile bringen ) .

Als Beobachtungen stehen hauptsächlich Richtungen von Observatorien auf der Erdoberfläche zu den Planeten , Planetoiden , Kometen und den Trabanten der Planeten zur Verfügung . In neuester Zeit wurden zusätzlich Distanzen zu einigen Planeten mit Hilfe von Radarsignalen gemessen , für die zu lösende Aufgabe dominieren jedoch die Richtungsbeobachtungen noch ( ! ) bei weitem .

Bevor wir die Aufgabe präzisieren , einige Erläuterungen :

- Im Titel haben wir vom Bestimmen "aller" Parameter des Planetensystems gesprochen . Korrekter sollte man von der Bestimmung aller Parameter eines wohldefinierten Modells des Planetensystems sprechen . Dabei hat die Modellwahl der eigentlichen Parameterbestimmung vorauszugehen .

Die anschliessend bestimmten Parameter haben damit - streng genommen - nur Gültigkeit in bezug auf das verwendete Modell .

- Die Modellwahl ist keineswegs so eindeutig , wie man denken könnte . Dazu einige Stichworte :
  - Wo zieht man die Grenze zwischen Himmelskörpern endlicher und vernachlässigbarer Masse ?
  - Soll man einen Planeten mitsamt seinen Trabanten als einen einzigen Massenpunkt behandeln , oder soll man den betreffenden Planeten und alle Monde durch verschiedene Massenpunkte beschreiben ?
  - Welche Himmelskörper vernachlässigbarer Masse werden berücksichtigt ?
  - Werden relativistische Korrekturen angebracht ? Welche ?
  - Welche Parameter werden als bekannt angenommen resp. aus anderer Quelle übernommen ?
  - Welche Beobachtungen werden verwendet ?
  - Werden Beobachtungen "schlechter Qualität" weggelassen ? Welche Kriterien werden dabei angewandt ?
- Ist man sich der Tatsache bewusst , dass die geschätzten Parameter sowieso nur bezüglich des zugrunde gelegten Modells Aussagekraft besitzen , ist die Wahl eines speziellen Modells gar nicht von so zentraler Bedeutung . Viel wichtiger ist es , dass das in einer Auswertung verwendete Modell eindeutig und präzise definiert worden ist .
- Wie eingangs erwähnt , wurden praktisch alle Beobachtungen von Observatorien auf der Erdoberfläche aus gemacht . Nun ist aber der Schwerpunkt der Erde ( genauer die heliozentrische Bahn des Schwerpunktes der Erde ) selbst Objekt der hier diskutierten Parameterbestimmungsaufgaben . Das bedeutet , dass jede Beobachtung eines Himmelskörpers auch Information über die Bahnbewegung des Erdschwerpunktes enthält . Weiter muss berücksichtigt werden , dass die Beobachtungen nicht vom Schwerpunkt , sondern von Punkten auf der Erdoberfläche aus gemacht wurden ; jede solche Beobachtung enthält also überdies ( zusätzlich zur Bahn des beobachteten Himmelskörpers und zur heliozentrischen Bahn

des Erdschwerpunktes ) noch Information zur Bewegung der Erde als eines endlichen Körpers ( Rotation der Erde , Polschwankung ) . Man könnte also versuchen - zusätzlich zu den bisher in diesem Kapitel erwähnten Parametern - weitere , die Bewegung der Erde als eines endlichen Körpers beschreibende Parameter als Unbekannte einzuführen . Dieses Unterfangen ist aber in Anbetracht der mit Richtungsbeobachtungen erreichbaren Beobachtungsgenauigkeit hoffnungslos . Die Reduktion der Beobachtungen auf den Schwerpunkt ( = Berechnung des geozentrischen Ortsvektors des Beobachters im KS3 , siehe (133) ) kann getrost als genügend genau bekannt angenommen werden ( terrestrische Messungen , Resultate der Satellitengeodäsie ) .

Bei der folgenden Problemdefinition (165) wurde versucht , den wesentlichen , gemeinsamen Kern aller dieser "umfassenden" Parameterbestimmungsprobleme zu erfassen .

#### Problemdefinition

Bestimmen "aller" Parameter des Planetensystems

##### 1. Modellwahl

- a. Alle in die Untersuchung einbezogenen Himmelskörper werden als Massenpunkte behandelt .
- b. Die totale Zahl der beteiligten Himmelskörper betrage  $1+N$  ( Sonne +  $N$  weitere Himmelskörper ) .
- c. Es sei  $N = N_1 + N_2$

Wobei  $N_1$  resp.  $N_2$  die Anzahl der Himmelskörper endlicher resp. vernachlässigbarer Masse ist .

- d. Die Himmelskörper werden so numeriert , dass gilt :

$$m_i \neq 0 , i=1,2,\dots,N_1$$

$$m_i = 0 , i=N_1+1,N_1+2,\dots,N_1+N_2=N$$

(165)<sub>1</sub>

## 2. Wahl der Parameter

### a. Parameter vom Typ 1 ( siehe Tabelle 1 )

Wir formulieren die Aufgabe als Anfangswertaufgabe :

$$\vec{r}_i^{(\ell)}(T_0) = \vec{r}_{i0\ell}, i=1,2,\dots,N, \ell=0,1$$

Als Parameter könnten "im Prinzip" irgendwelche , die Vektoren  $\vec{r}_{i0\ell}$  eindeutig definierenden Grössen gewählt werden . Das einfachste ist es , die Elemente der Spaltenmatrizen  $r_{i0\ell B_k}$  | als Parameter vom Typ 1 einzuführen . Wie auch immer : Die Anzahl  $n_1$  der Parameter vom Typ 1 beträgt  $n_1 = 6 \cdot N$

### b. Parameter vom Typ 2

Es treten lediglich die Massen der Himmelskörper endlicher Masse als Parameter vom Typ 2 auf .

Nimmt man an , die Parameter  $p_i, i=1,2,\dots,n_1=6 \cdot N$  seien die Parameter vom Typ 1 , darf man setzen :

$$p_{n_1+1+i} = m_i, i=0,1,\dots,N_1$$

(165)<sub>2</sub>

## 3. Beobachtete Funktionen

Als Beobachtungen lassen wir Richtungen , Distanzen , Distanzdifferenzen von Observatorien auf der Erde zu den übrigen Himmelskörpern des Planetensystems zu . Man weist leicht nach ( siehe Kapitel 2.4.2 ) , dass die beobachteten Funktionen alle Spezialfälle der folgenden allgemeinen Funktion sind :

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \psi_j(\vec{r}_{k_j}(t_j + \Delta t_{j1}), \vec{r}_{j_e}(t_j + \Delta t_{j2}))$$

Wobei :  $k_j$  : Nummer des bei der j-ten Beobachtung beobachteten Himmelskörpers .

$\vec{r}_{j_e}(t)$  : Heliozentrischer Ortsvektor des Erdschwerpunktes zur Zeit t .

$\Delta t_{ji}, i=1,2$  : Die Bedeutung dieser Grössen ist verschieden für verschiedene Beobachtungsarten . Es handelt sich jedoch stets um Lichtlaufzeiten vom Beobachter zum beobachteten Objekt .

4. Beobachtungen , a priori geschätzte mittlere Fehler

Gegeben sind die Beobachtungen  $\phi_j'$  der Funktionen  $\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  sowie a priori Schätzungen  $\sigma_j^2$  der Varianzen der Beobachtungen .  
 $j = 1, 2, \dots, n_b$  .

5. Schätzverfahren

Die wahrscheinlichsten Werte für die Parameter sind ( siehe Kapitel 1 ) die Lösungen der folgenden Extremalaufgabe :

(165)<sub>3</sub>

$$\sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 = \text{Min} .$$

Wobei :  $g_j := 1 / \sigma_j^2$  .

$\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  ,  $j=1, 2, \dots, n_b$  :  
Residuen , siehe (5c)

6. Lösungsweg

Die Lösung der nicht-linearen Extremalaufgabe ist durch das Blockschema (66) evtl. (67) gegeben .

Bemerkungen zu (165)

Zu 1. Modellwahl : Diese kann - wie schon eingangs erwähnt - fast beliebig variiert werden . Unter dem Titel Verallgemeinerungen werden wir auf einige interessante Varianten eingehen . Auf weitere Modifikationen , wie beispielsweise Berücksichtigung/Bestimmung der Abplattung einiger Himmelskörper , treten wir nicht ein .

Zu 3. Beobachtete Funktionen : Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen spricht überhaupt nichts dagegen , die beobachteten Funktionen allgemeiner als in (165) zu fassen . Ein (allerdings hypothetisches) Beispiel : Laufzeitmessung eines Radarsignals , das von der Erde ausgesandt , an einem Planeten reflektiert , und anschliessend auf einem anderen Planeten empfangen wird .

Zu 4. Beobachtungen , a priori Varianzen : Bei der Lösung der Aufgabe (165) , die als Resultat die die Dynamik des Sonnensystems bestimmenden Parameter liefern soll , wird man nur "zuverlässige" Beobachtungen berücksichtigen . Das bedeutet unter anderem , dass man gute a priori Schätzungen für die mittleren Fehler angeben kann . Diese Annahme (  $\sigma_j, j=1,2,\dots,n_b$  bekannt ) ist insbesondere deshalb gerechtfertigt , weil die Erwartungswerte für die nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzten Parameter auch bei "falscher" Gewichtung gleich den wahren Parameterwerten sind ( siehe dazu auch {G. Beutler, 1982, Kap. 4.3, S.115ff, Kap. 5.1, S.124, 125} ) .

Zu 5. Schätzverfahren : Bei unserer Definition der Gewichte (  $g_j := 1/\sigma_j^2, j=1,2,\dots,n_b$  ) gilt  $\sigma_0^2 = 1$  . Damit wird auch die a posteriori Schätzung  $m_0^2 \approx 1$  zu erwarten sein ( siehe Kapitel 2.1.4 ) .

Betont sei schliesslich , dass bei Verwendung des Minimumprinzips (6) nichts gegen die Verwendung verschiedener Beobachtungsarten im gleichen Parameterbestimmungsproblem spricht .

## VERALLGEMEINERUNGEN VON (165)

### 1. Ephemeridenzeit

Bisher haben wir stets angenommen , dass uns die Newton'sche Zeit - realisiert durch eine absolut gleichförmig laufende Uhr - zur Verfügung steht . Dies stimmt jedoch - zum mindesten in sehr guter Näherung - erst seit 1951 , dem Zeitpunkt , zu dem die erste Atomuhr in Betrieb genommen wurde . Bei allen vorausgegangenen Beobachtungen diente stets die Rotation der als starr angenommenen Erde als Zeitbasis .

Eine genaue Analyse der Bahnbewegung der Planeten und vor allem des Mondes zeigte , dass diese aus der Erdrotation abgeleitete Zeiteinheit keine Konstante war . Da aber bei der Herleitung der Grundgleichungen in Kapitel 3.2 eine Newton'sche Zeit vorausgesetzt werden musste , war nur ein Ausweg denkbar : Eine neue , die Bahnbewegung von Planeten und Erd-

mond bestmöglich darstellende Zeit , die sogenannte Ephemeridenzeit , musste eingeführt werden . Dabei ist klar , dass diese a posteriori in grossangelegten Analysen - wie den im vorliegenden Kapitel besprochenen - bestimmt werden muss ( resp. bestimmt werden sollte ) .

Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen , wollten wir an dieser Stelle ausführlich über die Bestimmung der in den Jahrbüchern ausgewiesenen Ephemeridenzeit sprechen . Wir beschränken uns auf einige prinzipielle Bemerkungen :

Wir gehen davon aus , dass die Beobachtungszeiten in Weltzeit ( UT ) registriert wurden .

Sodann müssen wir ein mathematisches Modell für den Zusammenhang zwischen Weltzeit und Ephemeridenzeit annehmen . Die Wahl dieses Modells ist keineswegs eindeutig . Das einfachste Modell , das aber für die sich auf das wesentliche beschränkende Diskussion vollständig ausreicht , ist das folgende :

Sei :  $t$  : Ephemeridenzeit .

UT : Zugehörige Weltzeit ( = bekannte, aus der Rotation der Erde abgeleitete Zeit ) .

$J := [t_1, t_{n_b}]$  : Das alle Beobachtungszeiten enthaltende Zeitintervall ( in UT ) .

$J$  wird in  $n_I$  Teilintervalle gleicher Länge unterteilt :

$J_k := [UT_k, UT_{k+1}]$  ,  $k=1, 2, \dots, n_I$

$UT_k := t_1 + (k-1) \cdot (t_{n_b} - t_1) / n_I$  ,  $k=1, 2, \dots, n_I+1$

Ansatz : für  $UT \in J_k$  gelte :

$t := UT + \Delta T_k$

$k = 1, 2, \dots, n_I$

Die  $\Delta T_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n_I$  sind die zusätzlichen zu bestimmenden Parameter .

(166)

Da bei der Definition einer neuen Zeit - hier der Ephemeridenzeit - Nullpunkt und Zeiteinheit willkürlich gewählt werden können , darf man im Modell (166) beispielsweise  $\Delta T_1$  beliebig wählen . Wir dürfen daher setzen :

$$\underline{\Delta T_1} := 0$$

(166a)

Die restlichen  $\Delta T_k, k=2,3,\dots,n_I$  müssen im Rahmen einer Parameterbestimmungsaufgabe geschätzt werden . Dazu haben wir die Problemstellung (165) wie folgt zu modifizieren :

1. Das unabhängige Argument  $t$  muss mit der Ephemeridenzeit identifiziert werden .
2. Die Beobachtungszeiten  $t_j, j=1,2,\dots,n_b$  sind als Weltzeiten zu interpretieren . Ihnen sind die folgenden Ephemeridenzeiten zuzuordnen :

$$t_j \in J_k : ET_j := t_j + \Delta T_k, \quad j=1,2,\dots,n_b \\ k=1,2,\dots,n_I$$

3. In den beobachteten Funktionen in (165) muss man folglich die Argumente der Funktion auf der rechten Seite wie folgt modifizieren :

$$\vec{r}_{j_e}(t_j + \Delta t_{j_2}) \longrightarrow \vec{r}_{j_e}(t_j + \Delta T_k + \Delta t_{j_2})$$

$$\vec{r}_{k_j}(t_j + \Delta t_{j_1}) \longrightarrow \vec{r}_{k_j}(t_j + \Delta T_k + \Delta t_{j_1})$$

(167)

4. Es seien  $\Delta T_k^I, k=1,2,\dots,n_I$  die beim I-ten Iterationsschritt bei der Lösung von (165) nach Schema (66) bekannten Näherungswerte für die  $\Delta T_k, k=\dots$  ( siehe (23) ) . Dann gilt in ausreichender Näherung ( abgebrochene Taylorreihe ) :

$$\vec{r}_{j_e}(t_j + \Delta T_k + \Delta t_{j_2}) := \vec{r}_{j_e}(t_j + \Delta t_{j_2} + \Delta T_k^I) \\ + \vec{r}_{j_e}^{(1)}(t_j + \Delta t_{j_2} + \Delta T_k^I) \cdot (\Delta T_k - \Delta T_k^I)$$

( Eine analoge Entwicklung gilt für  $\vec{r}_{k_j}(\dots)$  ) .

5. Zum Initialisieren reicht  $:\Delta T_k^1 := 0, k=1,2,\dots,n_I$

Mit (167) können die Fehlergleichungen (28) schulmässig hergeleitet werden . Man überlegt sich im übrigen leicht , dass die neuen Parameter  $\Delta T_k, k=2,3,\dots,n_I$  genau die gleiche mathematische Struktur aufweisen wie die in Tabelle 1 eingeführten Parameter vom Typ 3 .

(166) ist in der Tat ein recht einfaches Modell für die Funktion "Ephemeridenzeit(Weltzeit)" . Mit den heute dank des

Einsatzes von Atomuhren gewonnenen Einsichten in die Eigenheiten der Erdrotation könnte man wesentlich wirklichkeitsgetreuere Modelle als (166) ansetzen . Wegen der tatsächlich vorhandenen Unregelmässigkeiten in der Rotationsbewegung der Erde wird man allerdings nie ganz auf rein empirische Parameter verzichten können .

## 2. Realisieren eines Inertialsystem

Bei der Herleitung der Grundgleichungen (156) des Planetensystems haben wir nicht nur die Ephemeridenzeit , sondern auch das Inertialsystem in Gestalt von (131) als a priori gegeben angenommen . Diese Annahme ist streng genommen nicht korrekt , da ja der Begriff "Inertialsystem" erst durch die Angabe des Kraftgesetzes einen Sinn erhält . So schreibt M. Schürer {M. Schürer,1937} :

"Unter einem Inertialsystem im engeren Sinn versteht man eine Zeitskala und ein rechtwinkliges dreidimensionales Koordinatensystem , in dem materielle Körper sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz bewegen . "

Damit ist schon klar gesagt , dass das Inertialsystem eigentlich erst a posteriori , im Rahmen von Parameterbestimmungsaufgaben der Art (165) definiert werden kann .

Dass nie versucht wurde , ein Inertialsystem auf diesem korrekten Weg zu realisieren , liegt einmal daran , dass globale Untersuchungen der Art (165) sehr aufwendig sind , zum andern daran , dass das in (131) definierte KS0 eben eine sehr gute Näherung eines Inertialsystems darstellt , so dass eine Verbesserung nicht nötig schien . In letzter Zeit wird versucht ,\*) mit Hilfe "speziell geeigneter" Kleinplaneten diese Aufgabe gezielt zu beantworten . Es kann aber kein Zweifel darüber bestehen , dass Fragen dieser Art nur in einem grösseren Rahmen - nämlich in Problemstellungen der Art (165) - behandelt und eventuell beantwortet werden können .

Die theoretischen Aspekte dieser Fragestellung wurden im übrigen von I. Bauersima {I. Bauersima,1976} sehr fundiert behandelt .

\*) Siehe {V.I. Orelskaya, 1980}

## BETRACHTUNGEN ZUR NUMERISCHEN INTEGRATION DER GRUNDGLEICHUNGEN

---

Die Aufgabe (165) wird iterativ nach Schema (66) gelöst . Dabei muss bei jedem Iterationsschritt eine partikuläre Lösung des Grundgleichungssystems (156) durch numerische Integration bestimmt werden . Zudem müssen  $n_p$  Variationsgleichungssysteme (163) gelöst werden .

In der Aufgabestellung (165) haben wir angenommen , dass insgesamt  $N_1$  Himmelskörper mit endlicher Masse (exklusive die Sonne) und  $N_2$  Körper mit vernachlässigbarer Masse beobachtet wurden . Das bedeutet , dass das Grundgleichungssystem in ein "grosses" System der Art (161) mit  $3 \cdot N_1$  Gleichungen und in  $N_2$  "kleine" Systeme (162) mit je 3 Gleichungen aufgespalten werden kann . Dabei können die einzelnen Systeme unabhängig voneinander integriert werden - was nicht heisst , dass die Systeme unabhängig voneinander sind (!) .

Selbstverständlich können auch die  $n_p$  Variationsgleichungssysteme (163) in analoger Weise zerlegt werden .

Zur numerischen Integration der kleinen Systeme (162) ist nichts Besonderes zu bemerken : Jede der in Kapitel 2.3 vorgestellten Lösungsmethoden kann verwendet werden , empfehlenswert ist insbesondere die Lösung von Primärgleichungen und von zugeordneten Variationsgleichungen nach der Methode 2.1 mit der Subroutine LAPV21 ( siehe Tabelle 7 ) .

Die Anzahl der einem kleinen System zugeordneten Variationsysteme beträgt  $7 \cdot N_1 + 7$  ( Anfangsbedingungen der Körper endlicher Masse , Anfangsbedingungen der im Moment zu integrierenden Bahn und  $N_1 + 1$  Massen ) .

Damit zur numerischen Integration des grossen Systems . Bei Numerierung der Himmelskörper gemäss (165.1d) folgt dieses System aus (161) , wenn man dort  $N$  durch  $N_1$  ersetzt :

$$\vec{r}_i^{(2)} = -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_1} m_j \cdot \left( \frac{\vec{d}_{ij}}{d_{ij}^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (168a)$$

$i=1, 2, \dots, N_1$

---

Anmerkung : Die Einschränkung  $j \neq i^*$  (siehe (161)) erübrigt sich hier wegen der speziellen Numerierung (165.1d) , Definition der  $\vec{d}_{ij}$  siehe (161a) .

Nach (165.2a) lauten die zugehörigen Anfangsbedingungen :

$$\underline{\vec{r}_i^{(\ell)}(T_0)} = \vec{r}_{i0\ell} , \quad \ell=0,1 , \quad i=1,2,\dots,N_1 \quad (168b)$$

Die dem Primärsystem (168a) zugeordneten  $7 \cdot N_1 + 1$  Variationsgleichungssysteme (  $6 \cdot N_1$  Systeme für die Anfangsbedingungen ,  $N_1 + 1$  Systeme für die zu bestimmenden Massen ) folgen aus (163) , wenn man dort  $N$  durch  $N_1$  ersetzt , die zugehörigen Anfangsbedingungen folgen durch Differentiation der Gleichungen (168b) nach den betreffenden Parametern .

Formal wäre es auch hier das Einfachste , die Primärgleichungen (168a) zusammen mit den zugehörigen  $7 \cdot N_1 + 1$  Variationssystemen (163) mit der in Kapitel 2.3.1.2 , Tabelle 7 beschriebenen Subroutine LAPV21 zu lösen .

Dabei stellen sich allerdings Schwierigkeiten ein , die eine direkte Anwendung dieser Methode praktisch ausschliessen : In jedem Teilintervall  $I_k, k=1,2,\dots,m_t$  ( siehe (76) ) muss bei der Methode 2.1 die quadratische  $d \cdot (q-1) \times d \cdot (q-1)$  - Matrix  $L_k^{J^*}$  invertiert werden . Nimmt man zum Beispiel  $N_1=9$  (=Anzahl Planeten) und  $q=10$  (Polynomgrad) , heisst das , dass in jedem Teilintervall eine Matrix der Dimension  $3 \cdot N_1 \cdot (q-1) = 3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$  zu invertieren ist ! Damit ist ganz klar , dass eine direkte Anwendung der Methode auf die Anfangswertaufgabe (168) ausgeschlossen ist .

Mittels eines kleinen Kunstgriffs gelingt es aber dennoch , die elegante und in der Anwendung einfache Methode 2.1 zur Lösung von (168a,b) "zu retten" :

Das System (168a) setzt sich ja aus den  $N_1$  Teilsystemen mit je 3 Gleichungen für die  $\vec{r}_i(t), i=1,2,\dots,N_1$  zusammen . Entscheidend ist die Tatsache , dass diese Teilsysteme untereinander nur schwach gekoppelt sind , da unter den Planeten keine nahen Begegnungen vorkommen , und da die Planetenmassen

---

\*) Siehe (90)

$m_j$ ,  $j=1,2,\dots,N_1$  alle um mindestens einen Faktor 1000 kleiner sind als die Sonnenmasse  $m_0$ .

Man darf also erwarten, dass man schon sehr gute Näherungen  $\vec{r}_i^{L+1}(t)$  der durch (168a,b) definierten Bahnen  $\vec{r}_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,N_1$  erhält, wenn man auf den rechten Seiten von (168a) die Störterme mit genäherten Funktionen  $\vec{r}_i^L(t)$  approximiert. Man erhält so  $N_1$  Differentialgleichungssysteme mit je drei Gleichungen an Stelle eines einzigen Systems mit  $3 \cdot N_1$  Gleichungen (168a) :

$$(\vec{r}_i^{L+1})^{(2)} = -k^2 \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i^{L+1}}{(r_i^{L+1})^3} - k^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_1} m_j \cdot \left( \frac{\vec{d}_{ij}^L}{(d_{ij}^L)^3} + \frac{\vec{r}_j^L}{(r_j^L)^3} \right) \quad (169a)$$

---


$$\vec{r}_i^L(T_0)^{(\ell)} = \vec{r}_{i0\ell}, \ell=0,1, \quad i=1,2,\dots,N_1 \quad (169b)$$

Es leuchtet ein, dass die durch (169a,b) definierten Funktionen  $\vec{r}_i^{L+1}$  die durch (168a,b) definierten Bahnen umso besser approximieren werden ( $i=1,2,\dots,N_1$ ), je besser die auf den rechten Seiten von (169a) verwendeten Näherungen  $\vec{r}_i^L(t)$  sind. Die Lösungen der Aufgaben (169a,b) und der Aufgabe (168a,b) sind identisch, wenn man auf der rechten Seite von (169a) die Approximation  $\vec{r}_i^L(t)$  durch die exakte Lösung von (168a,b) ersetzt.

Durch diese beiden Bemerkungen und durch die Schreibweise in (169a) ist das weitere Vorgehen im Grunde genommen schon vorweggenommen: Man definiert zunächst eine Lösung  $\vec{r}_i^L(t)$ ,  $i=1,2,\dots,N_1$  für  $L=1$  (beispielsweise die den Anfangsbedingungen (169a) entsprechenden elliptischen Bahnen). Damit ist in (169) ein Iterationsprozess definiert, der abgebrochen werden kann, wenn sich die  $\vec{r}_i^{L+1}(t)$  gegenüber den  $\vec{r}_i^L(t)$  nicht mehr merklich ändern.

Man kann diese Prozedere aber noch wesentlich verbessern, wenn man sich des Blockschemas (123) erinnert, das ja zur numerischen Integration von "beliebigen" Anfangswerten herangezogen werden kann (also auch zur Lösung von (168a,b)) :

Nach (123) , Block A müssen wir zunächst (168a,b) in demjenigen Teilintervall lösen , in dem die Ausgangsepoche  $T_0$  liegt . ( In (123) haben wir dieses Intervall mit  $I_k$  , bezeichnet ) . Es steht uns selbstverständlich frei , dies "über den Umweg" (169a,b) zu tun : Anstatt das Anfangswertproblem (168a,b) direkt zu lösen , lösen wir die  $N_1$  Systeme (169a,b) , wobei wir diese Lösungen iterativ verbessern müssen ( $L=1,2,\dots,L^*$ ) , bis wir eine genügend gute Approximation von (168a,b) erreicht haben . Dieser Iterationsprozess (169a,b) wird sehr rasch konvergieren , da  $m_j \ll m_0$  ,  $j=1,2,\dots,N_1$  gilt , und da die Anfangsbedingungen (168b) und (169b) identisch sind . Als Resultat folgen jedenfalls die lokalen Approximationen  $\vec{r}_{k,i}^{\approx}(t)$  im Intervall  $I_k$  , der exakten Lösungen der Anfangswertaufgabe (168a,b) ( $i=1,2,\dots,N_1$ ) . Nach welcher Methode wir dabei die Anfangswertaufgaben (169a,b) lösen , ist im Prinzip nicht wichtig . Von Bedeutung ist hingegen , dass die Dimensionen der Systeme (169a) so klein sind ( $d=3$ ) , dass wir ohne weiteres die - auch zur Lösung der Variationsgleichungen geeignete - Methode 2.1 anwenden können .

Bei Integration in positiver Zeitrichtung haben wir als nächstes im Punkt  $t_{k'+1}^*$  ( rechte Intervallgrenze von  $I_k$  , (siehe (76b)) ) Anfangswerte für ein neues Anfangswertproblem zu definieren ( siehe (123) , Block  $D_1$  ) :

$$\vec{r}_{k'+1,i}(t_{k'+1}^*)^{(\ell)} := \vec{r}_{k,i}(t_{k'+1}^*)^{(\ell)} , \ell=0,1 \quad (170a)$$

$$i=1,2,\dots,N_1$$

Die Funktionen  $\vec{r}_{k'+1,i}(t)$  sind Lösungen des Differentialgleichungssystems (168a) zu den Anfangsbedingungen (170a) .

Dieses neue Anfangswertproblem können wir im Intervall  $I_{k'+1}$  analog wie die ursprüngliche Aufgabe in  $I_k$  , lösen .

Der wichtigste Unterschied ist der , dass sich aus

$$\vec{r}_{k'+1,i}^L(t_{k'+1}^*)^{(\ell)} := \vec{r}_{k,i}^{\approx}(\ell)(t_{k'+1}^*) , \ell=0,1,\dots,q , L=1 \quad (170b)$$

$$i=1,2,\dots,N_1$$

schon derart gute

Näherungen für die Funktionen  $\vec{r}_{k'+1,i}^{\approx}(t)$  angeben lassen ( siehe (124b) ) , dass sich bei der Lösung der Anfangswertaufgabe

(168a) , (170a) "auf dem Umweg über (169a,b)" eine Iteration effektiv erübrigt .

Da sich auch die (168a,b) zugeordneten  $7 \cdot N_1 + 1$  Variationsgleichungssysteme in gleicher Weise zerlegen lassen , haben wir das gewünschte Resultat :

Anstatt für die  $N_1$  Himmelskörper endlicher Masse ein nicht lineares System von  $3 \cdot N_1$  gekoppelten Differentialgleichungen ( und  $7 \cdot N_1 + 1$  lineare Systeme der Dimension  $3 \cdot N_1$  ) numerisch zu integrieren , können wir getrennt voneinander für jeden Himmelskörper ein nicht lineares System mit drei Gleichungen (und  $7 \cdot N_1 + 1$  lineare Systeme der Dimension 3) numerisch integrieren . Damit können wir - genau wie bei den Himmelskörpern vernachlässigbarer Massen - die Grundgleichungen für den betreffenden Himmelskörper zusammen mit den zugehörigen Variationsgleichungen mit der in Tabelle 7 beschriebenen Subroutine LAPV21 lösen .

Noch wichtiger ist bei diesem Lösungsweg der Umstand zu werten , dass man für jeden Himmelskörper einen geeigneten Polynomgrad und eine geeignete Intervallunterteilung - beispielsweise nach (B7.1c) - wählen kann . Das wird zur Folge haben , dass man zur Integration der inneren Planeten das Intervall I ( siehe (76a,b) ) wesentlich feiner als für die äussern Planeten unterteilen wird .

Wird hingegen - wie heute noch allgemein üblich - das System (168a,b) direkt integriert , muss man die Intervalleinteilung den innern Planeten anpassen , also auch für die äussern Planeten mit sehr kleinen Teilintervallängen arbeiten .

Es sei betont , dass die Lösungsmethode der Grundgleichungen (168a,b) "via (169a,b)" in diesem Abschnitt nur skizziert wurde . Zwischen dieser Skizze und dem ausgereiften Parameterbestimmungsprogramm liegt noch sehr viel Arbeit . Es kann aber kein Zweifel daran bestehen , dass man auf diesem Weg zu einem machtvollen Hilfsmittel zur Schätzung von Parametern des Planetensystems gelangt .

### 3.4.2 BAHNBESTIMMUNGSPROBLEME

Die reinen Bahnbestimmungsaufgaben sind wohl die bekanntesten Parameterbestimmungsprobleme der klassischen Himmelsmechanik . Während die im letzten Kapitel besprochenen Aufgaben in der klassischen Literatur kaum in geschlossener Form behandelt werden , wird der Bahnbestimmungsaufgabe in jedem Himmelsmechanik - Lehrbuch sehr viel Platz eingeräumt . Die wichtigsten Methoden wurden von so bedeutenden Mathematikern wie Gauss , Laplace und Lagrange um die Jahrhundertwende vom 18. zum 19. Jahrhundert entwickelt . Unnötig zu sagen , dass diese Verfahren für die Handrechnung und nicht für die programmgesteuerte Maschinenrechnung entwickelt wurden . Es kann daher auch kaum erstaunen , dass einige der überlieferten "Bahnbestimmungsrezepte" zwar einfach anzuwenden , für den nicht einschlägig vorgebildeten Mathematiker aber kaum verständlich sind .

Eine weitere Folge dieser "Handrechnermentalität" ist die , dass sich bis heute eine kaum mehr gerechtfertigte Problem-einteilung behauptet hat : man unterscheidet nämlich in der klassischen Literatur zwischen Bahnbestimmung und Bahnverbesserung ( wobei meistens Bahnbestimmung von Himmelskörpern vernachlässigbarer Masse gemeint ist ) :

#### a. Bahnbestimmung oder erste Bahnbestimmung

Aus drei beobachteten Richtungen von Observatorien auf der Erdoberfläche zum Himmelskörper (vernachlässigbarer Masse) zu den Beobachtungszeiten  $t_j, j=1,2,3$  soll die heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  des Himmelskörpers bestimmt werden .

Implizite werden die folgenden Voraussetzungen gemacht :

- Die heliozentrischen Ortsvektoren der beobachtenden Stationen zu den Zeiten  $t_j, j=1,2,3$  sind gegeben ,
- die Störungen sämtlicher Planeten (und Monde) können vernachlässigt werden ,
- das Zeitintervall , das die drei Beobachtungszeiten enthält , ist klein im Vergleich mit der Umlaufzeit des betreffenden Himmelskörpers (bei elliptischen Bahnen (!) ) .

Als Resultat erhält man die Bahnelemente ( bei elliptischen Bahnen können beispielsweise die in Beispiel 7 , Figur 4 eingeführten Grössen verwendet werden ) .

Da bei dieser Problemstellung die Anzahl der beobachteten Funktionen gleich 6 ( pro beobachtete Richtung 2 Funktionen ) und die Anzahl der Unbekannten gleich 6 ( sechs die Komponenten von Orts- und Geschwindigkeitsvektor zu einer Zeit  $T_0$  resp. sechs die zwei Ortsvektoren zu den Zeiten  $T_1$  und  $T_2$  eindeutig definierende Parameter ) ist , können keine mittlere Fehler der resultierenden Parameter angegeben werden .

#### b. Bahnverbesserung

Die unter a. bestimmten "ersten" oder "vorläufigen" Bahnelemente werden hier unter Verwendung aller (Richtungs)Beobachtungen des betreffenden Himmelskörpers mit einem Schema der Art (66) oder (67) iterativ verbessert . Bei jedem Iterationsschritt müssen dabei die Bewegungsgleichungen für die Bahn des Himmelskörpers und die zugehörigen Variationsgleichungen gelöst werden . Die Lösung erfolgt auf "analytischem"/"numerischem" Weg , je nachdem die Planetenstörungen nicht berücksichtigt resp. berücksichtigt werden .

Da bei dieser Aufgabe die Anzahl der Beobachtungen (im Sinne von (3)) die Anzahl der Unbekannten übertrifft , können die Fehler der resultierenden Parameter ( und von Funktionen dieser Parameter ) nach Kapitel 2.1.4 abgeschätzt werden .

Dass diese Unterteilung in Bahnbestimmung und Bahnverbesserung nicht sinnvoll ist , ist seit geraumer Zeit bekannt . So schreibt P. Herget als Einleitung zur Beschreibung eines speziellen Bahnbestimmungsprogramms {P. Herget, 1965} :

" It would be a constructive achievement to dispel the myth that "a preliminary orbit can be computed from three observations" . "

Zu zeigen , dass diese Problemunterteilung nicht nur nicht sinnvoll , sondern auch überflüssig ist , ist eines der Ziele des vorliegenden Kapitels .

Die zu besprechenden Bahnbestimmungsverfahren lassen sich durch die folgenden Punkte kurz charakterisieren :

- Die Algorithmen zeichnen sich - nach Meinung des Autors jedenfalls - durch formale Einfachheit , mathematische Korrektheit und durch universelle Anwendbarkeit aus .
- Der numerische Rechenaufwand ist bei diesen Verfahren grösser als bei den klassischen Verfahren , fällt jedoch bei Verwendung von Kleincomputersystemen kaum nachteilhaft ins Gewicht .
- Es können von allem Anfang an "beliebig viele" Beobachtungen verarbeitet werden .
- Störungen können - falls gewünscht - von Anfang an berücksichtigt werden .
- Uebertrifft die Zahl der Beobachtungen (im Sinne von (3)) die Zahl der Unbekannten , werden die mittleren Fehler der Unbekannten (und eventuell von Funktionen dieser Unbekannten) nach den Formeln von Kapitel 2.1.4 geschätzt .
- Wir werden die zu bestimmenden Parameter stets so wählen , dass "lästige Fallunterscheidungen" (elliptische/parabolische/hyperbolische Bahnen) im Rahmen der eigentlichen Bahnbestimmung nicht nötig sind . ( Solche Fallunterscheidungen sind erst dann nötig , wenn abschliessend die (oskulierenden) Bahnelemente zu einem Zeitpunkt  $T_0$  angegeben werden sollen ) .

Um einen direkteren Vergleich mit den klassischen Bahnbestimmungsverfahren zu ermöglichen , wollen wir die Bahnbestimmung ohne Störungen von der allgemeineren Aufgabe (Bahnbestimmung mit Störungen) unterscheiden , obwohl dies im Prinzip nicht nötig wäre , da ja die Bahnbestimmung ohne Störungen als einfacher Spezialfall in der allgemeineren Aufgabe enthalten ist .

### 1. Bahnbestimmung ohne Störungen

Die heliozentrische Bahn des beobachteten Himmelskörpers ist Lösung des Differentialgleichungssystems :

$$\ddot{\vec{r}}(2) = - k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (171)$$

(171) folgt aus dem allgemeineren Gleichungssystem (162) , wenn man dort den Index  $i^*$  und sämtliche Störterme weglässt , und zudem die Sonnenmasse  $m_0 = 1$  setzt . Für den numerischen Wert der Gauss'schen Konstanten  $k$  siehe (154b) .

## 2. Bahnbestimmung mit Störungen

Die heliozentrische Bahn des beobachteten Himmelskörpers wird durch (162) beschrieben ( Weglassen des Indexes  $i^*$  , Sonnenmasse  $m_0 = 1$  )

$$\vec{r}''(2) = -k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - k^2 \cdot \sum_{j=1}^N m_j \cdot \left( \frac{\vec{d}_j}{d_j^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (172)$$

Wobei :  $N$  : Anzahl der bei einer speziellen Aufgabe zu berücksichtigenden Störplaneten ,

$m_j, j=1,2,\dots,N$  : deren Massen ,

$\vec{r}_j(t), j=1,2,\dots,N$  deren heliozentrische Ortsvektoren , (172a)

$\vec{d}_j(t) := \vec{r}(t) - \vec{r}_j(t) , j=1,2,\dots,N$

Es dürfte einleuchten , dass die Anzahl  $N$  der störenden Himmelskörper von Aufgabe zu Aufgabe variieren kann . So genügt es häufig , nur den grössten Störterm - bei Kleinplaneten im allgemeinen den von Jupiter - zu berücksichtigen . Bei andern Aufgaben mag es nötig sein , zusätzlich zu diesem Term die Störungen eines Jupitermondes (naher Vorübergang eines Kometen am Jupiter) zu berücksichtigen . Wie auch immer : die Aufgabe wird stets durch ein Differentialgleichungssystem der Art (172) beschrieben .

Wichtig ist einzig und allein , dass alle Grössen in (172a) als bekannt vorausgesetzt werden dürfen ( mit Ausnahme der zu bestimmenden Bahn  $\vec{r}(t)$  natürlich ) . Es wird also angenommen , dass ein Modell des Planetensystems zur Verfügung steht . Dabei ist es wichtig , dass dieses Modell in "computer-gerechter" Form vorliegt , sodass der arbeitsintensive Umweg über die Jahrbücher überflüssig ist . Ein solches Modell steht der Sternwarte Zimmerwald dank der Arbeit von M. Roth-

acher zur Verfügung : die Planetendaten sind so in Disk-Datenfiles (schnelle Zugriffszeiten!) abgespeichert worden , dass die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Planeten mit ausreichender Genauigkeit für jeden Zeitpunkt des zwanzigsten Jahrhunderts in kurzer Zeit berechnet werden können ( siehe {M. Rothacher,1982} ) .

Da diese Aussage auch für die Koordinaten des Erdschwerpunktes im KSI gilt , ist insbesondere die auch bei der Bahnbestimmung ohne Störungen notwendige Berechnung der heliozentrischen Ortsvektoren der Beobachtungsstationen zu den Beobachtungszeiten unproblematisch .

Damit aber zu den konkreten Problemstellungen : Durch die Differentialgleichungen (171) resp. (172) allein sind die Bahnen der Himmelskörper noch nicht eindeutig festgelegt : Es müssen noch Rand- resp. Anfangsbedingungen definiert werden :

#### 3.4.2.1 BAHNBESTIMMUNG ALS RANDWERTPROBLEM

In der Literatur werden Probleme dieser Art unter dem Titel "Bahnbestimmung nach dem Gauss'schen Prinzip" behandelt . Wir werden auf die historischen Aspekte abschliessend im Abschnitt "Bemerkungen zu der klassischen Gauss'schen Bahnbestimmung" eingehen . Im vorliegenden Kapitel aber werden wir die "Bahnbestimmung als Randwertproblem" von den allgemeinen Lösungsschemen (66) , (67) ausgehend entwickeln .

Doch zunächst einige Vorbemerkungen :

- Die Lösungsschemen (66) , (67) unterscheiden sich nur infolge der verschiedenen Abbruchkriterien ( siehe Kapitel 2.1.6.2 , (62) resp. (64) oder (65) ) . Wir haben dort gesagt , dass vom mathematischen Standpunkt aus gesehen das Kriterium (62) das korrektest mögliche , die Kriterien (64) , (65) aber einfacher in der Anwendung sind . Da die hier zu lösenden Aufgaben nicht sonderlich rechenintensiv sind , lässt sich die Verwendung des Abbruchkriteriums (64) rechtfertigen :

Bei der Lösung von reinen Bahnbestimmungsaufgaben (als Rand- oder als Anfangswertproblem) verwenden wir das Abbruchkriterium (64) . Das bedeutet , dass die Lösung nach Schema (67) zu erfolgen hat . (173)

- Dieses Kapitel hätte präziser mit "Bahnbestimmung als lokale Randwertaufgabe" überschrieben werden sollen , denn nur diese Aufgaben haben wir in Kapitel 2.3 behandelt . Dies ist effektiv aber keine Einschränkung , da wir ja in der Wahl der Randepochen  $T_1$  und  $T_2$  völlig frei sind ; wir könnten sie also so nahe beieinander wählen , als dies nötig erscheint . Um aber die Diskussion zu vereinfachen , soll die folgende Annahme getroffen werden :

Seien :  $n_R$  : Die Anzahl der beobachteten Richtungen ( die Anzahl der Beobachtungen im Sinne von (3) beträgt dann  $n_b = 2 \cdot n_R$  ) .  
I : Kleinstes Zeitintervall , das alle Beobachtungszeiten enthält . (174)

Annahme : Bei der numerischen Integration soll sich eine Intervallunterteilung nach (76) erübrigen , resp. es gelte  $m_t = 1$  .

Damit reduziert sich das Lösungsschema (123) , das wir zur allgemeinen Lösung von lokalen Randwertaufgaben durch numerische Integration zu verwenden haben , effektiv auf den ( nach der ersten Bemerkung auf Seite 105 modifizierten ) Block A . Die Verallgemeinerungen , die sich bei Verzicht auf die Voraussetzung (174) ergeben , beschränken sich auf das Teilproblem der numerischen Integration , und lassen sich unmittelbar dem Blockschema (123) entnehmen .

- Bei der Lösung der Differentialgleichungssysteme (171) resp. (172) müssen wir ein wohldefiniertes Koordinatensystem verwenden . Wir machen ab , für die eigentliche Bahnbestimmung ( ob als Rand- oder als Anfangswertproblem ) stets das in (132a) definierte System  $KS_1$  zu verwenden . (175)

Damit endlich zur Problemlösung nach Schema (67) :

Blöcke A und B\* , Schema (67)

In Block A sind die Parameter  $p_i, i=1,2,\dots,6$  zu wählen .  
Diese können "im Prinzip" auf sehr viele verschiedene Arten  
definiert werden . Wir wollen so vorgehen , dass wir

- a. in Block B\* auf möglichst einfache Art und Weise erste  
Näherungen angeben können , und dass wir
- b. im Abschnitt "Bemerkungen zur klassischen Gauss'schen  
Bahnbestimmung" nicht mehr allzu viele Transformationen  
durchführen müssen .

Wie auch immer : Die sechs zu wählenden Parameter müssen  
die heliozentrischen Ortsvektoren zu den zwei - ebenfalls  
frei wählbaren - Epochen  $T_1$  und  $T_2$  eindeutig festlegen .

In Kapitel 2.4.2.1 haben wir die Gleichungen  $(137a)_1$  aus der  
Figur 6 hergeleitet :

$$\underline{\vec{r}(t_k - \Delta t_k)} = \underline{\vec{R}_k + \Delta_k \cdot \vec{e}_k} \quad , \quad k=1,2,\dots,n_R \quad (176)$$

Dabei ist  $t_k$  die bekannte Beobachtungszeit ,  $\Delta t_k$  ist die un-  
bekannte Lichtlaufzeit vom beobachteten Himmelskörper zur  
Zeit  $t_k - \Delta t_k$  zum Beobachter zur Beobachtungszeit  $t_k$  ,  $\vec{R}_k$  ist  
der heliozentrische Ortsvektor des Beobachters zur Zeit  $t_k$  ,  
 $\Delta_k$  ist durch  $(137a)_2$  definiert :

$$\Delta_k := |\vec{r}(t_k - \Delta t_k) - \vec{R}_k| \quad , \quad \Delta t_k := \Delta_k / c \quad , \quad k=1,2,\dots,n_R \quad (176a)$$

Wären nun die Lichtlaufzeiten  $\Delta t_k, k=1,2,\dots,n_R$  von vornherein  
bekannt , wäre es wohl das nächstliegende , die Epochen  $T_i$  ,  
 $i=1,2$  mit zwei Zeiten  $t_{k_i} - \Delta t_{k_i}, i=1,2$  ,  $k_i \in \{1,2,\dots,n_R\}, i=1,2$   
 $k_1 \neq k_2$  zu identifizieren , und anschliessend über die Parameter  
wie folgt zu verfügen :

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \Delta_{k_1} \quad , \quad p_2 = \Delta_{k_2} \quad , \quad p_3 = \alpha_{k_1} \quad , \quad p_4 = \alpha_{k_2} \\ p_5 = \delta_{k_1} \quad , \quad p_6 = \delta_{k_2} \end{array} \right\} \quad (177)$$

Dabei sind die  $\alpha_{..}, \delta_{..}$  die aus der Bahn  $\vec{r}(t)$  folgenden Rektas-  
zensionen und Deklinationen der Einheitsvektoren  $\vec{e}_{k_i}, i=1,2$  im  
System KS1 ( siehe (137b) ) .

Man überzeugt sich leicht davon , dass die Parameter (177) die Randwerte  $\vec{r}(T_i) = \vec{r}(t_{k_i} - \Delta t_{k_i})$  eindeutig festlegen ( $i=1,2$ ) .

Der Vorteil der Parameterwahl (177) gegenüber anderen Möglichkeiten ist die , dass nur für die ersten zwei Parameter plausible erste Näherungen gesucht werden müssen ( siehe unten ) , während für die restlichen Parameter direkt die Beobachtungen  $\alpha'_{k_i}, \delta'_{k_i}$  ( siehe (138) ) als hervorragende erste Näherungen verwendet werden können !

Dass wir die Parameter nicht exakt nach (177) wählen können , liegt daran , dass die Lichtlaufzeiten nicht a priori bekannt sind .

Wir setzen daher :

$$\underline{T_1 := t_1 - \Delta t_1^N}, \quad \underline{T_2 := t_{n_R} - \Delta t_{n_R}^N} \quad (178a)$$

Dabei sollen die  $\Delta t_k^N, k=1, k=n_R$  bekannte Näherungswerte für die unbekanntenen Lichtlaufzeiten  $\Delta t_k, k=1, k=n_R$  sein . Es wäre durchaus möglich , diese Näherungswerte gleich Null zu setzen ; den allgemeineren Ansatz (178a) wählen wir , um einen besseren Vergleich mit den klassischen Verfahren zu ermöglichen .

Analog zu (176) dürfen wir die Vektoren  $\vec{r}(t_k - \Delta t_k^N), k=1, k=n_R$  als Linearkombinationen schreiben :

$$\vec{r}_{11} := \vec{r}(t_1 - \Delta t_1^N) = \vec{R}_1 + \Delta_1^* \cdot \vec{e}_1^* , \quad \vec{r}_{12} := \vec{r}(t_{n_R} - \Delta t_{n_R}^N) = \vec{R}_{n_R} + \Delta_{n_R}^* \cdot \vec{e}_{n_R}^* \quad (178b)$$

Die Gleichungen (178b) sind als Definitionsgleichungen der Vektoren  $\vec{\Delta}_k^* = \Delta_k^* \cdot \vec{e}_k^*, k=1, , k=n_R$  zu verstehen . Der Vektor  $\vec{\Delta}_1^*$  ist durch drei Grössen , beispielsweise durch  $\Delta_1^*$  und durch die Polarkoordinaten  $\alpha_1^*, \delta_1^*$  im Koordinatensystem KSI ( siehe (132a) ) eindeutig definiert . Wichtig ist , dass sich die numerischen Werte dieser Grössen nur wenig von den numerischen Werte der in (177) aufgeführten Grössen ( für  $k_1=1$  ) unterscheiden . ( Das gleiche gilt sinngemäss für den Vektor  $\vec{\Delta}_{n_R}^*$  ) .

Definiert man also die Epochen  $T_i, i=1,2$  nach (178a) und die zu bestimmenden Parameter (siehe (178b)) durch

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \Delta_1^* , p_2 = \Delta_{n_R}^* , p_3 = \alpha_1^* , p_4 = \alpha_{n_R}^* \\ p_5 &= \delta_1^* , p_6 = \delta_{n_R}^* \end{aligned} \right\} \quad (178c)$$

, sind die folgenden ersten Näherungen für die vier letzten Parameter sicher von ausreichender Qualität, um eine Konvergenz des Iterationsprozesses (67) zu garantieren:

$$I := 1 : p_3^I := \alpha_1^I , p_4^I := \alpha_{n_R}^I , p_5^I := \delta_1^I , p_6^I := \delta_{n_R}^I \quad (178d)_1$$

Für die Distanzen  $\Delta_k^*$  stehen keine vergleichbar gute Näherungen zur Verfügung - sie wurden schliesslich nicht beobachtet. Man muss sie somit grob abschätzen. Für "normale" Kleinplaneten ist es sicher naheliegend zu verlangen, dass

$$I:=1 : |\vec{r}(t_k^I - \Delta t_k^N)| := a_0 = 2.7 \text{ A.E.} , k=1, k=n_R \quad (178d)_2$$

gilt. Man

nimmt also an, dass der betreffende Himmelskörper ein Objekt des Asteroidengürtels zwischen Mars und Jupiter ist.

Unter Berücksichtigung von (178b) lassen sich aus (178d)<sub>2</sub> erste Näherungen für die Distanzen  $\Delta_k^*$  herleiten, falls man noch in (178b) die Vektoren  $\vec{e}_k^*$  durch die aus den Beobachtungen zu den Zeiten  $t_k$  folgenden Vektoren  $\vec{e}_k^I$ ,  $k=1, k=n_R$  ersetzt:

$$I := 1 : \Delta_k^{*I} := -(\vec{e}_k^I \cdot \vec{R}_k) + \sqrt{(\vec{e}_k^I \cdot \vec{R}_k)^2 + a_0^2 - \vec{R}_k^2} \quad (178e)$$

$k=1, k=n_R$ .

Vollständigkeitshalber wollen wir noch die Definitionen der Komponentenmatrizen  $e_k^*$  der Vektoren  $\vec{e}_k^*$  im KSI nachtragen:

$$e_k^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k^* & \cos \delta_k^* \\ \sin \alpha_k^* & \cos \delta_k^* \\ & \sin \delta_k^* \end{bmatrix} , \quad k=1, k=n_R \quad (178f)$$

Selbstverständlich kann man an Stelle von (178d)<sub>1,e</sub> andere Initialisierungen verwenden, falls aus einer anderen Quelle schon eine Näherungsbahn bekannt ist. Die Näherungswerte (178d)<sub>1,e</sub> sind aber schon so gut, dass im Normalfall bei der

iterativen Lösung nach Schema (67) nur wenige Schritte ( typisch etwa 3 - 4 ) nötig sind . Eine "verbesserte Initialisierung" bringt also keine grosse Einsparungen an Rechenzeit .

Blöcke C , D1 , D5 ( Schema (67) )

a. Bahnbestimmung mit Störungen

Die Randwerte des Primärgleichungssystems (172) sind durch die Gleichungen (178b) eindeutig bestimmt .

Da wir nach (175) stets das System KS1 verwenden , sollten wir korrekterweise an Stelle von (172) , (178b) die Gleichungen für die den Vektoren  $\vec{r}(t)$  ,  $\vec{r}(t_k - \Delta t_k)$ ,  $k=1, k=n_R$  im KS1 entsprechenden Komponentenmatrizen (siehe (130e)) angeben . Wir verzichten darauf zu Gunsten der Einfachheit .

Nachzutragen haben wir an dieser Stelle die dem Differentialgleichungssystem (172) zugeordneten Variationsgleichungssysteme für die in (178c) definierten Parameter  $p_i$  ,  $i=1,2,\dots,6$  . Diese leitet man ohne Schwierigkeiten aus den allgemeinen Gleichungen (163) ab (  $m_0 = 1$  ,  $m_i = .0$  , Weglassen des Index  $i$  , berücksichtigen , dass für die Parameter (178c)  $\{\vec{r}_j\}_{p_\ell} = \vec{0}$  ,  $\ell=1,2,\dots,6$  gilt ) :

$$\begin{aligned} \vec{z}_\ell^{(2)} = & - k^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{z}_\ell - \frac{3}{r^2} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{z}_\ell) \cdot \vec{r} ) \\ & - k^2 \cdot \sum_{j=1}^N m_j \cdot \frac{1}{d_j^3} \cdot ( \vec{z}_\ell - \frac{3}{d_j^2} \cdot (\vec{d}_j \cdot \vec{z}_\ell) \cdot \vec{d}_j ) \end{aligned} \quad (178g)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, 6$$

Dabei haben wir gesetzt :  $\vec{z}_\ell := \{\vec{r}(t)\}_{p_\ell}$  ,  $\ell=1,2,\dots,6$  (178h)

Die (178g) zugeordneten Randbedingungen erhält man wie üblich durch Ableiten der Gleichungen (178b) nach den Parametern (178c) :

$$\begin{aligned} \vec{z}_1(T_1) = \vec{e}_1^* , \vec{z}_1(T_2) = \vec{0} , \vec{z}_2(T_1) = \vec{0} , \vec{z}_2(T_2) = \vec{e}_{n_R}^* \\ \vec{z}_3(T_1) = \Delta_1 \cdot \{\vec{e}_1^*\}_{p_3} , \vec{z}_3(T_2) = \vec{0} \end{aligned} \quad (178i)_1$$

$$\begin{array}{l}
 \vec{z}_4(T_1) = \vec{0} \quad , \quad \vec{z}_4(T_2) = \Delta_{n_R}^* \cdot \{ \vec{e}_{n_R}^* \} p_4 \\
 \vec{z}_5(T_1) = \Delta_1^* \cdot \{ \vec{e}_1^* \} p_5 \quad , \quad \vec{z}_5(T_2) = \vec{0} \\
 \vec{z}_6(T_1) = \vec{0} \quad , \quad \vec{z}_6(T_2) = \Delta_{n_R}^* \cdot \{ \vec{e}_{n_R}^* \} p_6
 \end{array}
 \tag{178i}_2$$

Die partiellen Ableitungen der den Vektoren  $\vec{e}_k^*$  zugeordneten Komponentenmatrizen  $e_k^*$  lassen sich , ausgehend von (178f) , elementar berechnen (  $k=1, k=n_R$  ) .

In Block D1 von Schema (67) muss bei jedem Iterationsschritt  $I = 1, 2, \dots, I^*$  ein lokales Randwertproblem der Art (172) , (178b) gelöst werden ( Lösung von (172) zu den beim I-ten Schritt bekannten Randwerten  $\vec{r}^I(t_k - \Delta t_k)$  ,  $k=1, k=n_R$  ergibt die Bahn  $\vec{r}^I(t)$  ) .

Dieses Teilproblem löst man iterativ mit den in Kapitel 2.3.2 gegebenen Methoden . Somit hat man - unter anderem - die Aufgabe , eine erste Näherung  $\vec{r}^{I,1}(t)$  für die Bahn  $\vec{r}^I(t)$  anzugeben . Da das Differentialgleichungssystem (172) von der speziellen Gestalt (110) ist , kann man für  $I = 1$  die Komponenten von  $\vec{r}^{I,1}(t)$  nach (110a,b,c) durch Polynome dritten Grades approximieren .

Für  $I > 1$  kann man aber eine wesentlich bessere erste Näherungsbahn angeben , da ja gilt :

$$\vec{r}^I(t) = \vec{r}^{I-1}(t) + \sum_{\ell=1}^6 \vec{z}_\ell^{I-1}(t) \cdot \Delta p_\ell^{I-1} + O(\Delta p_1^{I-1} \cdot \Delta p_k^{I-1}) \tag{178j}$$

$$I > 1$$

Für  $I > 1$  kann man daher die folgende erste Näherungsbahn für  $\vec{r}^I(t)$  definieren :

$$\vec{r}^{I,1}(t) := \vec{r}^{I-1}(t) + \sum_{\ell=1}^6 \vec{z}_\ell^{I-1}(t) \cdot \Delta p_\ell^{I-1} \tag{178k}$$

In Block D5 sind die sechs Variationsgleichungssysteme (178g) zu lösen . Werden die Primärgleichungen mit der Methode 2.1 gelöst , erhält man die Lösungen von (178g) ohne grossen Aufwand , wenn man die Subroutine LRPV21 (siehe Tabelle 8) verwendet .

b. Bahnbestimmung ohne Störungen

Hier ist das Primärgleichungssystem durch (171) gegeben , die Randvektoren hingegen sind wie bei der Bahnbestimmung mit Störungen durch (178b) gegeben .

Die Variationsgleichungssysteme folgen aus (179a) durch Vernachlässigung sämtlicher Störterme :

$$\underline{\vec{z}_\ell^{(2)} = -k^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot ( \vec{z}_\ell - \frac{3}{r^3} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{z}_\ell) \cdot \vec{r} ) , \ell=1,2,\dots,6 \quad (179a)}$$

Die (179a) zugeordneten Randbedingungen sind die gleichen wie bei der Bahnbestimmung mit Störungen ( siehe (178i) ) .

Bei der Bahnbestimmungsaufgabe ohne Störungen müssen also in Block D1 die nicht-lineare Randwertaufgabe (171) , (178b) und die sechs linearen Aufgaben (179a) , (178i) gelöst werden . Dabei ist bekannt , dass jede durch (171) , (178b) definierte Bahn ein Kegelschnitt (Ellipse,Parabel,Hyperbel) ist .

Es wäre daher durchaus möglich , in D1 die numerische Integration durch analytische Methoden zu ersetzen : Man hat lediglich die Aufgabe (analytisch) zu lösen , die Bahnelemente aus den Randwerten (178b) zu berechnen . Diese Aufgabe ist unter der Voraussetzung (174) - die ja im wesentlichen sagt , dass die Punkte  $\vec{r}(t_k - \Delta t_k)$ ,  $k=1, n_R$  benachbart sind - nach K. Stumpff "ohne grosse Schwierigkeiten" lösbar ( siehe {K. Stumpff, Bd.1, §§ 50,51,52} ) . Allerdings hat man auf diesem analytischen Weg die berühmt-berüchtigte , auf Gauss zurückgehende "Sektor:Dreieck - Geschichte" zu bewältigen .

Wir ersparen uns dies , indem wir trotz allem in D1,D5 von Schema (67) die entsprechenden Randwertaufgaben durch numerische Integration lösen . Wir machen aber - genau wie in Beispiel 6 - von der Tatsache Gebrauch , dass sich die Bahnbewegung in der durch die beiden (als nicht kollinear angenommen) Randvektoren  $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{12}$  ( siehe (178b) ) aufgespannten Ebene abspielt :

$$\underline{\vec{r}(t) = y_1(t) \cdot \vec{r}_{11} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{12} \quad (179b)}$$

Definiert man  $y(t)$  | genau wie in (B6.1c) als die mit den  $y_i(t)$   $i=1,2$  gebildete Spaltenmatrix , folgt durch Einsetzen von

(179b) in (171) :

$$\underline{y|^{(2)} = -k^2 \cdot \frac{y|}{r^3}} \quad (179c)$$

Wobei ( siehe (B6.1d) :

$$r = ( s_1 \cdot y_1^2 + s_2 \cdot y_2^2 + 2 \cdot s_3 \cdot y_1 \cdot y_2 )^{1/2} \quad (179d)$$

$$s_1 = \vec{r}_{11}^2, \quad s_2 = \vec{r}_{12}^2, \quad s_3 = \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{12}$$

Die zugehörigen Randbedingungen erhält man durch Einsetzen von (179b) in (178b) :

$$\left. \begin{array}{l} (y(t_1 - \Delta t_1) | )^T = ( 1, 0 ) \\ (y(t_{n_R} - \Delta t_{n_R} | )^T = ( 0, 1 ) \end{array} \right\} \quad (179e)$$

Zur Berechnung der Fehlergleichungsmatrix benötigt man die durch (178h) definierten partiellen Ableitungen des Vektors  $\vec{r}(t)$  nach den Parametern  $p_\ell, \ell=1,2,\dots,6$ . Durch Differentiation von (179b) folgt :

$$\underline{\vec{z}_\ell(t) := \{ \vec{r}(t) \}_{p_\ell} = y_1(t) \cdot \{ \vec{r}_{11} \}_{p_\ell} + y_2(t) \cdot \{ \vec{r}_{12} \}_{p_\ell} + \{ y_1(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{11} + \{ y_2(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{12}} \quad (179f)$$

Da wir die Parameter durch (178c) definiert haben, folgt wegen (178h), (178i) :

a. für  $\ell=1,3,5$  :

$$\vec{z}_\ell(t) = y_1(t) \cdot \vec{z}_\ell(T_1) + \{ y_1(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{11} + \{ y_2(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{12}$$

b. für  $\ell=2,4,6$  :

$$\vec{z}_\ell(t) = y_2(t) \cdot \vec{z}_\ell(T_2) + \{ y_1(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{11} + \{ y_2(t) \}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{12}$$

(179g)

Dabei sind die  $\vec{z}_\ell(T_i), i=1,2, \ell=1,2,\dots,6$  schon in (178i) definiert worden.

Die  $\{ y_i(t) \}_{p_\ell}, i=1,2$  sind nach der allgemeinen Schreibweise

(52) die Elemente der Spaltenmatrix  $z_\ell(t) | := \{ y(t) | \}_{p_\ell}, *$

$\ell=1,2,\dots,6$ .

\*)  $\vec{z}_\ell(t)$  ist ein Vektor im 3-dimensionalen Raum,  $z_\ell(t) |$  ist eine Spaltenmatrix mit 2 Elementen !

Diese Funktionen  $z_\ell(t) |$  sind Lösungen von Randwertaufgaben , die aus der ursprünglichen Aufgabe (179c) , (179e) durch Differentiation nach dem entsprechenden Parameter  $p_\ell$  entstehen .

- Durch Differentiation von (179c) nach  $p_\ell$  folgt das Variationssystem für den Parameter  $p_\ell$  :

$$\underline{z_\ell |^{(2)}} = P_0 \cdot z_\ell | + \left\{ -k^2 \cdot \frac{y |}{r^3} \right\}_{p_\ell} , \quad \ell=1,2,\dots,6 \quad (179h)$$

Die Matrix  $P_0$  haben wir schon in Beispiel 5 unter (B5.15) angegeben .

Der letzte Term enthält die expliziten Ableitungen nach  $p_\ell$  ( vergleiche (179d) ) :

- a. für  $\ell=1,3,5$  :

$$\left\{ -k^2 \cdot \frac{y |}{r^3} \right\}_{p_\ell} = 3 \cdot k^2 \cdot \frac{y |}{r^5} \cdot ( y_1^2 \cdot (\vec{r}_{11} \cdot \{\vec{r}_{11}\}_{p_\ell}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\{\vec{r}_{11}\}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{12}) )$$

- b. für  $\ell=2,4,6$  :

$$\left\{ -k^2 \cdot \frac{y |}{r^3} \right\}_{p_\ell} = 3 \cdot k^2 \cdot \frac{y |}{r^5} \cdot ( y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{r}_{11} \cdot \{\vec{r}_{12}\}_{p_\ell}) + y_2^2 \cdot (\vec{r}_{12} \cdot \{\vec{r}_{12}\}_{p_\ell}) )$$

(179i)

Man beachte , dass die auf den rechten Seiten von (179i) auftretenden Skalarprodukte  $(\vec{r}_{..} \cdot \{\vec{r}_{..}\}_{p_\ell})$  vor der numerischen Integration berechnet werden können , da die  $\vec{r}_{..}$  durch (178b) , deren partielle Ableitungen aber durch (178i) gegeben sind .

- Die Randwerte berechnet man durch Differentiation der Gleichungen (179e) nach den betreffenden Parametern . Das Resultat ist denkbar einfach :

$$\underline{z_\ell(T_i) |} = 0 | , \quad i=1,2 , \quad \ell=1,2,\dots,6 \quad (179j)$$

Anmerkung : In bezug auf das ursprüngliche Differentialgleichungssystem (171) sind die Parameter (178c) reine Parameter vom Typ 1 ( siehe Tabelle 1 ) , in bezug auf das neue Differentialgleichungssystem (179c) sind dieselben Parameter reine Parameter vom Typ 2 ( siehe Tabelle 1 ) !

Weitere Eigenschaften der Vektoren  $z_\ell(t)$  ,  $\ell=1,2,\dots,6$  werden wir im folgenden Abschnitt "Bemerkungen zu der klassischen Gauss'schen Bahnbestimmung" besprechen .

Es dürfte auch hier das einfachste sein , die Randwertaufgaben (179c) , (179e) und die sechs linearen Aufgaben (179h) , (179j) zusammen mit der Subroutine LRPV21 zu lösen ( siehe Tabelle 8 ) .

Nebenbei sei bemerkt , dass man die Bahnbestimmung ohne Störungen selbstverständlich mit denselben Methoden wie die vorher behandelte Bahnbestimmung mit Störungen hätte lösen können : der wesentliche Unterschied besteht darin , dass man an Stelle des Differentialgleichungssystems (171) mit drei Gleichungen nur das System (179c) mit zwei Gleichungen lösen muss , was sich auf die Rechenzeit positiv auswirkt .

Blöcke D6\* , D7\* , D8 (Schema (67))

Diese Blöcke sind für die Bahnbestimmung mit/ohne Störungen identisch . Die Fehlergleichungen haben wir schon in Kapitel 2.1.4.1 in (141) angegeben . Erwähnenswert ist einzig , dass bei den im vorliegenden Kapitel behandelten reinen Bahnbestimmungsaufgaben die Ortsvektoren der Beobachter bekannt sind , dass also (141c) vereinfacht werden darf :

$$\{\Delta_{k,j}^I\}_{p_\ell} = \{r_{,j}(t_k - \Delta t_k^I)\}_{p_\ell} , \quad j=1,2,3 , \quad k=1,2,\dots,n_R \quad (180)$$

$\ell=1,2,\dots,6$

Da wir nach (173) das Abbruchkriterium (64) verwenden , müssen wir bei jedem Iterationsschritt  $I=1,2,\dots,I^*$  in (67) den mittleren Einheitsfehler nach (34) und die mittleren Fehler der Unbekannten nach (46) abschätzen .

Block E\* , Schema (67)

In Schema (67) haben wir vorgesehen , in Block E\* die plausibelsten Parameterwerte  $p_\ell^+$  ,  $\ell=1,2,\dots,6$  und deren mittlere Fehler als Resultate zu drucken .

Dies ist aber bei der Parameterwahl (178c) nicht unbedingt sinnvoll , da diese Parameter - für die Charakterisierung der Bahn - nicht besonders günstig sind .

Der Astronom wird daher als Resultate die - zu einem von ihm im Intervall I (siehe (174)) gewählten Zeitpunkt  $T_{osc}$  gehörenden - oskulierenden Bahnelemente und deren mittlere Fehler angeben wollen .

a. Berechnung oskulierender Elemente zur Zeit  $T_{osc}$

Bei unserer Auffassung von der Technik der numerischen Integration ist die Berechnung der Bahnelemente mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden : Man berechnet einfach zum Zeitpunkt  $T_{osc}$  (mit Hilfe von YPOL , siehe Tabelle 4) die Komponenten der heliozentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren im KS1 und transformiert diese anschliessend mit (132c)<sub>2</sub> ins KS2 .

Diesem beiden Vektoren entspricht genau ein Satz von oskulierenden Bahnelementen (elliptischen/parabolischen/hyperbolischen) , welche mit einer Subroutine der Art XVELE ( siehe Tabelle 3 ) berechnet werden können .

Man beachte , dass bei den von uns verwendeten Bahnbestimmungsverfahren die häufig lästigen Fallunterscheidungen erst dort auftreten , wo es unbedingt nötig ist , bei der abschliessenden Berechnung der oskulierenden Elemente .

a. Berechnung der mittleren Fehler der Bahnelemente

Seien :  $E_i, i=1,2,\dots,6$  : Oskulierende Bahnelemente zur Epoche  $T_{osc}$  . (181a)

Dann gilt :  $E_i = E_i(\vec{r}(T_{osc}), \vec{r}^{(1)}(T_{osc}))$  ,  $i=1,2,\dots,6$  (181b)

Es gilt aber auch :

$$\vec{r}^{(i)}(T_{osc}) := \vec{r}(T_{osc}; p_1, p_2, \dots, p_6) , i=0,1 \quad (181c)$$

Daraus folgt unmittelbar :

$$E_i = E_i^*(p_1, p_2, \dots, p_6) , i=1,2,\dots,6 \quad (181d)$$

Die oskulierenden Bahnelemente zur Zeit  $T_{osc}$  sind also - wie nicht anders zu erwarten - Funktionen unserer Parameter  $p_\ell$  ,  $\ell=1,2,\dots,6$  .

In Kapitel 2.1.4 aber haben wir die Formel für den mittleren Fehler einer Funktion der Parameter unter (47) angegeben .

Auf die Funktionen  $E_i^*(\dots)$ ,  $i=1,2,\dots,6$  angewandt folgt :

$$m(E_i) = m_0 \cdot \left( \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \{E_i^*\}_{P_j} \cdot \{E_i^*\}_{P_k} \cdot Q_{jk}^{I*} \right)^{1/2}, \quad i=1,2,\dots,6 \quad (181e)$$

Dabei ist  $m_0$  der mittlere Einheitsfehler, die  $Q_{ij}^{I*}$  sind die ebenfalls bekannten Elemente der inversen Normalgleichungsmatrix des letzten Iterationsschrittes.

Unbekannt sind vorerst die partiellen Ableitungen der Elemente. Wegen (181b,c,d) dürfen wir diese Größen mit der Kettenregel wie folgt berechnen :

$$\begin{aligned} \{E_i^*\}_{P_k} &= \sum_{j=1}^3 \left( \{E_i\}_{r_{B_2,j}(T_{osc})} \cdot \{r_{B_2,j}(T_{osc})\}_{P_k} + \right. \\ &\quad \left. + \{E_i\}_{r_{B_2,j}^{(1)}(T_{osc})} \cdot \{r_{B_2,j}^{(1)}(T_{osc})\}_{P_k} \right) \\ &\quad i=1,2,\dots,6 \\ &\quad k=1,2,\dots,6 \end{aligned} \quad (181f)$$

Die  $\{r_{B_2,j}^{(i)}(T_{osc})\}_{P_k}$  sind die Komponenten der Vektoren  $\{\vec{r}^{(i)}(t)\}_{P_k}$  an der Stelle  $t = T_{osc}$  im KS2 (siehe (132b)).

Nun gilt aber nach (178h) :  $\vec{z}_k(t) = \{\vec{r}(t)\}_{P_k}$ ,  $k=1,2,\dots,6$ .

(Eine entsprechende Gleichung gilt für die erste Ableitung  $\vec{r}^{(1)}(t)$ ).

Da wir die  $\vec{z}_k^{(i)}(t)$  nach Abschluss der Bahnbestimmung als Lösungen der Variationsgleichungen an jeder Stelle des Intervalles I berechnen können, sind in (181f) nur noch die partiellen Ableitungen der Bahnelemente  $E_i$ ,  $i=1,2,\dots,6$  nach den Komponenten der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren des Himmelskörpers zur Zeit  $T_{osc}$  zu berechnen.

Diese Ableitungen aber sind unabhängig von der Art, wie die Parameter  $p_k$ ,  $k=1,2,\dots,6$  definiert worden sind. Es ist daher möglich, eine Subroutine zu schreiben, die aus Orts- und Geschwindigkeitsvektoren sowie deren partiellen Ableitungen nach den verwendeten Parametern zur Zeit  $t=T_{osc}$  die mittleren Fehler der Elemente unabhängig von der Bahnbestimmungsmethode und unabhängig von der speziellen Parameterwahl berechnet.

Die Kurzbeschreibung der für den Rechner des Observatoriums Zimmerwald entwickelten Subroutine MFELE entnimmt man der Tabelle 13 :

Tabelle 13

Name	Kurzbeschreibung
MFELE	<p>Eingabevariablen :</p> <p>a. Gravitationskonstante</p> <p>b. Bahnelemente <math>E_i, i=1,2,\dots,6</math></p> <p>c. <math>T_{osc}, \vec{r}^{(i)}(T_{osc}), i=0,1</math></p> <p>d. <math>\vec{z}_k^{(i)}(T_{osc}) = \{\vec{r}^{(i)}(T_{osc})\}_{P_k}, i=0,1</math>  <math>k = 1,2,\dots,6 .</math></p> <p>Mit diesen Eingabevariablen werden die mittleren Fehler <math>m(E_i), i=1,2,\dots,6</math> der Elemente <math>E_i, i=1,2,\dots,6</math> berechnet .</p> <p>Bei Parabelbahnen ( Exzentrizität <math>e = 1</math> ) wird an Stelle der Fehler für die Halbachse <math>a</math> und die Exzentrizität <math>e</math> der Fehler für den Parameter <math>p</math> der Parabel berechnet .</p>

Bemerkungen zu Tabelle 13 :

- Die Gravitationskonstante wird als Eingabevariable verwendet , damit die Subroutine MFELE auch für Satellitenbahnen verwendet werden kann .
- Wegen (181c) ist es im Prinzip nicht nötig , zusätzlich zu den Bahnelementen  $E_i, i=1,2,\dots,6$  die Orts- und Geschwindigkeitskomponenten anzugeben . Es ist aber ein Gebot der Rechenökonomie , dies trotzdem zu tun .
- In der Subroutine MFELE müssen die partiellen Ableitungen der Elemente  $E_i, i=1,2,\dots,6$  nach den Orts- und Geschwindigkeitskomponenten der Vektoren  $\vec{r}^{(i)}(T_{osc}), i=0,1$  berechnet werden . Wir verzichten auf die Wiedergabe dieser z.T. "länglichen" Ausdrücke .

## BEMERKUNGEN ZUR KLASSISCHEN GAUSS'SCHEN BAHNBESTIMMUNG

Wie schon zu Beginn von Kapitel 3.4.2 bemerkt, versteht man in der Himmelsmechanik unter dem Ausdruck "Bahnbestimmung" oder "erste Bahnbestimmung" im allgemeinen die Aufgabe,

aus drei Richtungsbeobachtungen  $\alpha'_i, \delta'_i, i=1,2,3$  zu drei verschiedenen Beobachtungszeiten  $t_i, i=1,2,3$  eine vorläufige Bahn  $\vec{r}(t)$  des beobachteten Himmelskörpers unter Vernachlässigung der Planetenstörungen zu berechnen.

Im folgenden modifizieren wir den vorhin abgeleiteten Bahnbestimmungsalgorithmus (ohne Störungen) so lange, bis er im wesentlichen mit dem von Gauss übereinstimmt.

Zunächst gilt bei der Lösung von (182a):

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \alpha_i(\vec{r}(t_i - \Delta t_i) - \vec{R}_i) = \alpha'_i, \quad i=1,2,3 \\ \delta_i &:= \delta_i(\vec{r}(t_i - \Delta t_i) - \vec{R}_i) = \delta'_i, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (182b)$$

Die  $\Delta t_i$  sind die - vorderhand unbekanntes - Lichtlaufzeiten:

$$\Delta t_i = |\vec{r}(t_i - \Delta t_i) - \vec{R}_i|/c =: \Delta_i/c, \quad i=1,2,3 \quad (182c)$$

Es ist natürlich verlockend, die Parameter nach (177) zu wählen, obwohl die Größen (182c) nicht a priori bekannt sind, da man in diesem Falle vier der insgesamt sechs Unbekannten sofort angeben kann:

$$\begin{aligned} \text{Es seien: } p_1 &= \Delta_1, \quad p_2 = \Delta_3, \quad p_3 = \alpha_1, \quad p_4 = \alpha_3 \\ p_5 &= \delta_1, \quad p_6 = \delta_3 \end{aligned} \quad (182d)$$

Wegen (182b) gilt:

$$p_3 = \alpha'_1, \quad p_4 = \alpha'_3, \quad p_5 = \delta'_1, \quad p_6 = \delta'_3 \quad (182e)$$

Mit der Wahl (182d) der Parameter haben wir also - wie bei der klassischen Gauss'schen Bahnbestimmung - die Anzahl der effektiv zu bestimmenden Unbekannten von 6 auf 2 reduziert.

Die übrigbleibenden Parameter  $p_1 = \Delta_1$  ,  $p_2 = \Delta_3$  sind nun so zu bestimmen , dass die mittlere Beobachtung exakt erfüllt wird ( die beiden übrigen Beobachtungen werden wegen (182e) , (182b) automatisch erfüllt ) .

Die Fehlergleichungen für diese zweite Richtungsbeobachtung lassen sich als Spezialfälle von (141) sofort angeben ( man beachte , dass wegen (182b) die "Residuen" gleich Null sind ) :

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_2^I\}_{\Delta_1} \cdot (\Delta_1^{I+1} - \Delta_1^I) + \{\alpha_2^I\}_{\Delta_3} \cdot (\Delta_3^{I+1} - \Delta_3^I) &= \alpha_2^I - \alpha_2^I \\ \{\delta_2^I\}_{\Delta_1} \cdot (\Delta_1^{I+1} - \Delta_1^I) + \{\delta_2^I\}_{\Delta_3} \cdot (\Delta_3^{I+1} - \Delta_3^I) &= \delta_2^I - \delta_2^I \end{aligned} \right\} \quad (182f)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2^I &:= \alpha_2 (\vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I) - \vec{R}_2) \\ \delta_2^I &:= \delta_2 (\vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I) - \vec{R}_2) \end{aligned} \right\} \quad (182g)$$

Die Bahn  $\vec{r}^I(t)$  ist dabei die Lösung der folgenden Randwertaufgabe :

$$\vec{r}^I(2) = -k^2 \cdot \frac{\vec{r}^I}{(r^I)^3} \quad (\text{keine Störungen}) \quad (182h)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}^I(t_1 - \Delta t_1) &= \vec{R}_1 + \Delta_1^I \cdot \vec{e}_1^I \\ \vec{r}^I(t_3 - \Delta t_3) &= \vec{R}_3 + \Delta_3^I \cdot \vec{e}_3^I \end{aligned} \right\} \quad (182i)$$

Da in (182i) die  $\Delta t_i, i=1, i=3$  unbekannt sind , können wir die Gleichungen (182f) aber nicht zur Berechnung neuer Näherungswerte  $\Delta_i^{I+1}, i=1, i=3$  für die gesuchten Parameter verwenden .

Was ist zu tun ? :

Da die unbekanntes Lichtlaufzeiten kleine Grössen sind , für die man überdies von Iterationsschritt zu Iterationsschritt immer bessere Näherungswerte kennt , wird man keinen grossen Fehler machen , wenn man in (182i) die unbekanntes  $\Delta t_i$  durch die beim I-ten Schritt bekannten Näherungswerte  $\Delta t_i^I, i=1, i=3$  ersetzt :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}^I(t_1 - \Delta t_1^I) &:= \vec{R}_1 + \Delta_1^I \cdot \vec{e}_1^I \\ \vec{r}^I(t_3 - \Delta t_3^I) &:= \vec{R}_3 + \Delta_3^I \cdot \vec{e}_3^I \end{aligned} \right\} \quad (182j)$$

Der Fehler , den man durch Verwendung von (182j) an Stelle von (182i) macht , ist umso kleiner , je besser die  $\Delta t_i^I$  in (182j) die  $\Delta t_i$  in (182i) approximieren (  $i=1, i=3$  ) .

Daher gilt :

Verwendet man beim I-ten Iterationsschritt in (67) zum Aufstellen der Fehlergleichungen (182f) die "nicht ganz korrekte , dafür aber bekannte" durch (182h), (182j) definierte Bahn an Stelle der "korrekten , dafür aber nicht genau bekannten" durch (182h), (182i) definierten Bahn , ist dadurch ein Iterationsprozess definiert , dessen Lösung mit der Lösung der ursprünglichen Aufgabe (182a) identisch sein wird .

Dies ist im wesentlichen das Vorgehen bei der klassischen Gauss'schen Bahnbestimmung .

Es ist natürlich korrekter und durchsichtiger , die Parameter nach (178c) und nicht nach (182d) zu wählen . Das Vorgehen bei der Gauss'schen Bahnbestimmung ist jedoch durch die Reduktion der Unbekannten von sechs auf zwei mehr als gerechtfertigt - dies insbesondere deshalb , weil die Konvergenz des durch (182j) modifizierten Iterationsprozesses (67) nicht wesentlich beeinträchtigt wird .

Damit hätten wir eigentlich das Wesentliche zum Spezialfall "Bahnbestimmung mit drei Beobachtungen" gesagt . Wir wollen jedoch noch weiter gehen und zeigen , dass die Gauss'sche Bahnbestimmungsmethode als Spezialfall unserer allgemeinen Verfahren durch Vernachlässigung einiger Terme resultiert :

Die Gleichungen (182f) sagen in linearisierter Form dasselbe wie die Gleichungen (182b) für  $i=2$  : Die theoretischen Werte für die Beobachtungen sollen gleich den Beobachtungen selbst sein . Diese Bedingungen erfüllen wir aber auch , wenn wir verlangen , dass gilt :

$$\underline{\vec{r}(t_2 - \Delta t_2)} = \vec{R}_2 + \Delta_2 \cdot \vec{e}_2' \quad (182k)$$

Dieses Gleichungssystem kann in üblicher Weise linearisiert werden ( Taylorreihenentwicklung von  $\vec{r}(t; \Delta_1, \Delta_2)$  , abbrechen nach den linearen Termen ,  $\vec{r}(\dots)$  durch  $\vec{r}^{I+1}(\dots)$  ersetzen ) :

$$\begin{aligned} \vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I) + \{\vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I)\}_{\Delta_1} \cdot (\Delta_1^{I+1} - \Delta_1^I) \\ + \{\vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I)\}_{\Delta_3} \cdot (\Delta_3^{I+1} - \Delta_3^I) = \vec{R}_2 + \Delta_2^{I+1} \cdot \vec{e}_2^I \end{aligned} \quad (182\ell)$$

Da die Gleichungen (182k) den Gleichungen (182b) (für  $i=2$ ) als Bedingungsgleichungen völlig äquivalent sind ( aus (182b) folgt (182k) und umgekehrt ) gilt dasselbe für die Bedingungsgleichungen (182f) resp. (182\ell) . Wir dürfen also die Gleichungen (182f) durch (182\ell) ersetzen .

Der Vorteil ist der , dass in (182\ell) keine partiellen Ableitungen der Polarkoordinaten  $\alpha_2, \delta_2$  zu berechnen sind .

Durch (182\ell) ist ein lineares Gleichungssystem in den drei Unbekannten  $\Delta_k^{I+1}, k=1,2,3$  definiert , das man ohne Schwierigkeiten nach den Unbekannten auflöst .

Wir formen (182\ell) ein letztes Mal um , indem wir dort den bei der Bahnbestimmung ohne Störungen üblichen Ansatz (179b) (mit den Randwerten (182j)) und die entsprechenden Ansätze (179g) für  $\ell=1,2$  einsetzen :

- Ansatz (179b) lautet für die Randwerte (182j) :

$$\begin{aligned} \vec{r}^I(t_2 - \Delta t_2^I) = y_1^I \cdot \vec{r}_{11}^I + y_2^I \cdot \vec{r}_{12}^I \\ \text{Wobei nach (182j)} \quad \left. \begin{aligned} \vec{r}_{11}^I &= \vec{R}_1 + \Delta_1^I \cdot \vec{e}_1^I \\ \vec{r}_{12}^I &= \vec{R}_3 + \Delta_3^I \cdot \vec{e}_3^I \end{aligned} \right\} \quad (182m) \end{aligned}$$

( Auf der rechten Seite von (182m)<sub>1</sub> haben wir zur Vereinfachung  $y_k^I := y_k^I(t_2 - \Delta t_2^I)$  ,  $k=1,2$  gesetzt . Wir werden unten die gleiche Vereinfachung für die partiellen Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle  $t_2 - \Delta t_2^I$  verwenden ) .

- Die partiellen Ableitungen  $\{\vec{r}(t_2 - \Delta t_2^I)\}_{\Delta_k}, k=1, k=3$  folgen mit (179g) und (178i) :

$$\begin{aligned} \{\vec{r}(t_2 - \Delta t_2^I)\}_{\Delta_1} &= y_1^I \cdot \vec{e}_1^I + \{y_1^I\}_{\Delta_1} \cdot \vec{r}_{11}^I + \{y_2^I\}_{\Delta_1} \cdot \vec{r}_{12}^I \\ &=: y_1^I \cdot \vec{e}_1^I + \vec{w}_1^I \\ \{\vec{r}(t_2 - \Delta t_2^I)\}_{\Delta_3} &= y_2^I \cdot \vec{e}_3^I + \{y_1^I\}_{\Delta_3} \cdot \vec{r}_{11}^I + \{y_2^I\}_{\Delta_3} \cdot \vec{r}_{12}^I \\ &=: y_2^I \cdot \vec{e}_3^I + \vec{w}_3^I \end{aligned} \quad (182n)$$

Setzt man (182m) und (182n) in (182l) ein , folgt nach einigen elementaren Umformungen :

$$\begin{aligned} (y_1^I \cdot \vec{e}_1 + \vec{w}_1^I) \cdot \Delta_1^{I+1} - \vec{e}_2^I \cdot \Delta_2^{I+1} + (y_2^I \cdot \vec{e}_3 + \vec{w}_3^I) \cdot \Delta_3^{I+1} \\ = -y_1^I \cdot \vec{R}_1 + \vec{R}_2 - y_2^I \cdot \vec{R}_3 + \vec{w}_1^I \cdot \Delta_1^I + \vec{w}_3^I \cdot \Delta_3^I \end{aligned}$$

(182o)

In dieser Vektorgleichung erkennen wir ohne Schwierigkeiten die von Bucerius und Schneider "Fundamentalgleichung der Bahnbestimmungsaufgabe" genannte Gleichung , falls wir in (182o) die Vektoren  $\vec{w}_k^I$  ,  $k=1, k=3$  gleich Null setzen !

Zum Vergleich siehe {H. Bucerius, Himmelsmechanik I, §11.2 , Gleichung (G) , 1966} :

$y_1^I$  ,  $y_2^I$  haben die gleiche Bedeutung wie  $n_1$  ,  $n_3$  bei Bucerius , die Vektoren  $\vec{R}_i$  ,  $i=1, 2, 3$  haben hier die Bedeutung heliozentrischer Ortskoordinaten der Beobachtungsstationen , bei Bucerius haben sie die Bedeutung topozentrischer Sonnenkoordinaten ( Vorzeichen ! ) .

Damit haben wir gezeigt , dass das Gauss'sche Verfahren eine vereinfachte Version der in der vorliegenden Arbeit entwickelten - auf einer korrekten Linearisierung der Bahnbestimmungsaufgabe beruhenden - Bahnbestimmungsverfahren ist .

Die Vereinfachung besteht darin , dass in (182o) die Terme ( siehe (182n) )

$$\vec{w}_k^I = \{y_1^I\}_{\Delta_k} \cdot \vec{r}_{11}^I + \{y_2^I\}_{\Delta_k} \cdot \vec{r}_{12}^I \quad , \quad k=1, k=3 \quad (182p)$$

vernachlässigt

werden . Dass die vernachlässigten Größen - verglichen mit den ersten Termen in (182n) - klein sind , folgt aus der Tatsache , dass die  $\{y_i^I\}_{p_\ell}$  ,  $i=1, 2$  ,  $\ell=1, 2$  ( $p_1 = \Delta_1$  ,  $p_2 = \Delta_3$ ) als Komponenten der Vektoren  $z_\ell^I$  ,  $\ell=1, 2$  Lösungen der Randwertaufgaben (179h) , (179j) sind , wobei die Randwerte nach (179j) Nullvektoren sind . Dies lässt den Schluss zu , dass die Funktionen  $z_\ell^I$  ,  $\ell=1, 2$  im Intervall I (siehe (174)) kleine Größen (der Ordnung 2 in der Intervallbreite  $(t_3 - t_1)$ ) sind .

Beim klassischen Gauss'schen Verfahren werden diese Grössen einfach gleich Null gesetzt :

$$z_{\ell}^I | := \{y^I | \}_{p_{\ell}} = 0 | , \ell=1,2 \quad (182q)$$

Damit ist aber auch klar , dass der Iterationsprozess , der durch den klassischen Gauss'schen Algorithmus definiert wird , langsamer konvergieren muss , als der durch (182l) definierte Prozess . Dieser Unterschied ist umso grösser , je länger das beobachtete Bahnsegment ist .

Bemerkung : Dass beim Gauss'schen Verfahren das Differentialgleichungssystem (179c) analytisch ( Sektor:Dreieck ) , bei den von uns angegebenen Verfahren numerisch gelöst wird , spielt in Bezug auf die Konvergenz der Verfahren keine Rolle . Es ist daher durchaus möglich , den klassischen Gauss'schen Algorithmus durch Verwendung der "verbesserten Fundamentalgleichung (182o)" zu beschleunigen .

Dies bedingt allerdings , dass die Variationsgleichungen (179h) zu den Randbedingungen (179j) gelöst werden . Eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem Gauss'schen Verfahren erreicht man schon , wenn die  $z_{\ell}^I |$  durch Polynome dritten Grades genähert werden , die durch die folgenden Bedingungen definiert sind ( siehe (179h,i,j) , Bedeutung der Randvektoren (182j) ) :

$$\left. \begin{aligned} z_{\ell}^I(t_k - \Delta t_k^I) | = 0 | , \ell=1,2 , k=1 , k=3 \\ z_1^I(t_3 - \Delta t_3^I) |^{(2)} = 0 | , z_2^I(t_1 - \Delta t_1^I) |^{(2)} = 0 | \\ z_1^I(t_1 - \Delta t_1^I) |^{(2)} = 3 \cdot k^2 / r^5 \cdot (\vec{r}_{11}^I \cdot \vec{e}_1^I) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ z_2^I(t_3 - \Delta t_3^I) |^{(2)} = 3 \cdot k^2 / r^5 \cdot (\vec{r}_{12}^I \cdot \vec{e}_2^I) \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (182r)$$

Nähert man also die  $z_{\ell}^I(t) |$  ,  $\ell=1,2$  in I durch Polynome dritten Grades mit den Bedingungen (182r) , sieht man , dass nur die erste Komponente von  $z_1^I |$  und die zweite von  $z_2^I |$  verschieden von Null sind . Der Aufwand zur Berechnung der  $z_{\ell}^I(t_2 - \Delta t_2^I) |$   $\ell=1,2$  ist daher nicht gross .

Wir wollen diese Betrachtungen zum klassischen Gauss'schen Bahnbestimmungsverfahren mit zwei Bemerkungen abschliessen :

- Bucerius und Schneider schreiben die Lösung der Randwertaufgabe (179c), (179e) formal als gekoppeltes Integralgleichungssystem ( siehe {H. Bucerius, 1966, Kapitel 11.1.2, Gleichungen (D)} ) . Es ist selbstverständlich möglich und korrekt dies zu tun - der Vorteil für die praktische Anwendung ist aber nicht einzusehen , da man - wie gezeigt - auch Randwertprobleme in ihrer ursprünglichen Formulierung mit numerischen Methoden ohne Schwierigkeiten lösen kann .
- Es ist immer wieder versucht worden , die Gauss'sche Bahnbestimmungsmethode "für mehr als drei Beobachtungen" zu verallgemeinern . Der bekannteste Algorithmus dieser Art dürfte der von P. Herget {P. Herget, 1965} sein . Aber auch der dort beschriebene Algorithmus "krankt" daran , dass nur zwei Unbekannte ( die topozentrischen Distanzen zu den Zeiten  $T_{1,2}$  ) bestimmt werden , und dass somit zwei Beobachtungen exakt dargestellt werden . Damit aber wird ein unkorrekter und unnötiger Zwang auf die Bahn  $\vec{r}(t)$  ausgeübt ( siehe dazu auch Beispiel 9 ) .

Die einzig korrekte Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode besteht darin , als Unbekannte der Aufgabe sechs die Randwerte zu den Epochen  $T_1, T_2$  eindeutig definierende Parameter einzuführen und zu bestimmen . Dass man dabei die Epochen  $T_{1,2}$  und die Parameter so wählt , dass der schwierigste Teil der Aufgabe , die Initialisierung , ohne Probleme gelöst werden kann , ist selbstverständlich . ( Man erreicht dies beispielsweise durch die Wahl der Epochen nach (178a) und durch die Wahl der Parameter nach (178c,b) ).

Als Illustration zum Thema "Bahnbestimmung ohne Störungen" dient das folgende Beispiel :

Beispiel 9 : Erste Bahnbestimmung ohne Störungen , formuliert als Randwertaufgabe

Aufgabe : Man schreibe ein Programm BBOSTR , mit dem aus  $n_R \geq 3$  Richtungen  $\alpha_j^I, \delta_j^I$  ,  $j=1,2,\dots,n_R$  zu einem Himmelskörper dessen heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  als Lösung einer Randwertaufgabe nach Schema (67) bestimmt werden kann .

- Die heliozentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{R}_i, \vec{V}_i$  der Beobachtungsstationen zu den betreffenden Beobachtungszeiten  $t_i, i=1,2,\dots,n_R$  sind gegeben ( in Zimmerwald werden diese mit dem Programm MPLORB (Tabelle 2) berechnet ) .
- Wir nehmen an , dass alle Stationen mit der gleichen Genauigkeit beobachten ; Die Gewichte sind demnach nach (140) zu definieren , wobei  $\sigma_k^2=1$  ,  $k=1,2,\dots,n_R$  gesetzt werden darf .
- Das Programm soll so gestaltet werden , dass entweder  $n_p=2$  oder  $n_p=6$  Parameter bestimmt werden :

$n_p=2$

Randepochen und Parameter werden in Verallgemeinerung von (182..) wie folgt gewählt :

$$T_1^I = t_1 - \Delta t_1^I, \quad T_2^I = t_{n_R} - \Delta t_{n_R}^I \quad (B9.1a)$$

$$\vec{r}(T_1^I) = \vec{R}_1 + \Delta_1^I \cdot \vec{e}_1^I, \quad \vec{r}(T_2^I) = \vec{R}_{n_R} + \Delta_{n_R}^I \cdot \vec{e}_{n_R}^I \quad (B9.1b)$$

$$p_1 = \Delta_1, \quad p_2 = \Delta_{n_R} \quad (B9.1c)$$

Die übrigen Parameter werden a priori wie folgt definiert :

$$p_3 = \alpha_1^I, \quad p_4 = \alpha_{n_R}^I, \quad p_5 = \delta_1^I, \quad p_6 = \delta_{n_R}^I \quad (B9.1d)$$

$n_p=6$

Die Randepochen werden nach (178a) , die sechs Parameter nach (178c,b) definiert . In (178a) setze man dabei :

$$\Delta t_k^N := \Delta_k^{*1}/c \text{ (vergleiche (178e))} , \quad k=1, k=n_R \quad (B9.1e)$$

- Für die heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  verwende man Ansatz (179b) :

$$\vec{r}(t) := y_1(t) \cdot \vec{r}_{11} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{12} \quad (B9.1f)$$

Damit haben wir bei jedem Iterationsschritt in (67) eine nicht lineare Randwertaufgabe der Art (179c,e) und  $n_p$  zugeordnete lineare Randwertaufgaben (179h,j) zu lösen . Wir verwenden dazu die in Tabelle 8 beschriebene Subroutine LRPV21 .

- Der Polynomgrad  $q$  der numerischen Approximation  $\tilde{y}(t)$  | der Funktion  $y(t)$  | soll im Laufe des Iterationsprozesses (67) in den Grenzen

$$3 \leq q \leq 9 \quad (B9.1g)$$

optimiert werden :

(B9.1)<sub>1</sub>

Für  $I = 1$  setzen wir :  $q := 5$  (B9.1h)

Am Ende eines jeden Iterationsschrittes in (67) kann  $q$  entweder gleich bleiben , um 1 erhöht oder verringert werden ( innerhalb der Grenzen (B9.1g) ) :

Sei  $\gamma_q^{I+1}$  : Schätzung für den durch Vernachlässigung des letzten  $(q - 1)$  Terms in  $\tilde{y}^{I+1}(t)$  in die theoretischen Werte der Beobachtungen eingeführten Fehler beim Schritt  $I+1$  in (67) . (B9.1i)

$q$  wird um 1 erhöht , falls  $\gamma_q^{I+1} > m_0^I$   
 $q$  wird um 1 verringert , falls  $\gamma_q^{I+1} < m_0^I/20$   
 In allen andern Fällen bleibt  $q$  unverändert . (B9.1j)  
 ( $m_0^I$  ist die Schätzung des mittleren Fehlers der Beobachtungen beim  $I$ -ten Iterationsschritt ) .

- Der Polynomgrad  $q'$  der Approximationen  $\tilde{z}_\ell^I(t)$  der Funktionen  $z_\ell^I(t)$  ,  $\ell = 1, 2, \dots, n_p$  kann innerhalb der folgenden Grenzen gewählt werden :

$-1 \leq q' \leq q$  (B9.1k)

Bei  $q' = -1$  wird  $\tilde{z}_\ell^I(t) = 0$  gesetzt .  $\ell = 1, 2, \dots, n_p$  (B9.1l)

(B9.1)<sub>2</sub>

- Nach Abschluss des Iterationsprozesses werden als erstes die Residuen in Rektaszension ( multipliziert mit  $\cos(\delta_1^i)$  ) und in Deklination und der mittlere Einheitsfehler  $m_0$  ausgedruckt . Sodann wird eine Schätzung für den maximalen Approximationsfehler ( siehe (B9.3) ) angegeben .
- Als nächstes wird das Programm RESID (Tabelle 2) aufgerufen . Hier werden aus den Residuen in Rektaszension und in Deklination die Residuen tangential und normal zur topozentrischen Bewegungsrichtung berechnet und dargestellt . "Ausreisser" , d.h. schlechte Beobachtungen , können markiert werden . Falls gewünscht , wird die Bahnbestimmung ohne diese Beobachtungen wiederholt .
- Wird die gefundene Bahn als gut erachtet , werden die oskulierenden Elemente zur Zeit  $T_{osc}$  und deren mittlere Fehler berechnet ( Subroutinen XVELE , MFELE siehe Tabellen 3,13 ) und abschliessend ausgedruckt . Die Oskulationsepoche wird dabei wie folgt gewählt :

$T_{osc} := 20 \cdot \lceil (t_1 + t_{n_R}) / 20 \rceil$  (B9.1m)

Dabei bedeutet  $\lceil a \rceil$  die kleinste in  $a$  enthaltene ganze Zahl ( Gauss'sche Klammer ) .

Kommentare zu (B9.1)

- Die Problemstellung (B9.1a,b,c) ( $n_p = 2$ ) ist im wesentlichen identisch mit der von P. Herget {P. Herget, 1965} : Die Bahn wird so bestimmt , dass sie die erste und die letzte Beobachtung exakt darstellt . Physikalisch begründen lässt sich dieses Vorgehen allerdings nur für den Spezialfall  $n_p = 3$  . Die mittleren Fehler der Elemente müssen hier unter

\*) Schätzung für  $\gamma_q^{I+1}$  siehe (B9.2)

der Voraussetzung berechnet werden dass die Parameter  $p_\ell$ ,  $\ell=3,4,5,6$  fehlerfrei sind, was im allgemeinen zu einer allzu optimistischen Abschätzung führt.

- Die Annahme gleicher Gewichte für alle Beobachtungen drängte sich auf, da in Zimmerwald nur Erfahrungswerte für die Qualität der Beobachtungen der eigenen Station vorliegen.
- Bei der Optimierung des Polynomgrades  $q$  haben wir bei jedem Iterationsschritt in (67) die Grösse (B9.1i) abzuschätzen. Wir verwenden die folgende, sehr konservative Abschätzung:

$$\gamma_q^{I+1} = \frac{|\tilde{y}_{1,q}^{I+1} \cdot \vec{r}_{11} + \tilde{y}_{2,q}^{I+1} \cdot \vec{r}_{12}| \cdot \Delta T_{\max}^q}{\Delta_{\min}} \quad (\text{im Bogenmass}) \quad (\text{B9.2})$$

Zur Bedeutung der einzelnen Terme:

Nach (B6.1) dürfen wir - unter Vernachlässigung des Indexes  $k_0$  - schreiben:

$$|\tilde{y}^{I+1}(t)| := \sum_{i=0}^q \tilde{y}_{,i}^{I+1} \cdot (t - t_0)^i \quad (\text{B9.2a})$$

Für die numerische Approximation von  $\vec{r}(t)$  folgt nach (B9.1f):

$$\vec{r}^{I+1}(t) = \tilde{y}_1^{I+1}(t) \cdot \vec{r}_{11}^{I+1} + \tilde{y}_2^{I+1}(t) \cdot \vec{r}_{12}^{I+1} \quad (\text{B9.2b})$$

Definiert man

$$\Delta T_{\max} := \max_{i=1,2,\dots,n_R} |t_i - t_0|, \quad (\text{B9.2c})$$

wird die Bedeutung des Zählers in (B9.2) unmittelbar klar: es ist der maximale Fehler von  $r(t)$  im Intervall  $I$  (siehe (174)) bei Vernachlässigung der letzten Terme in (B9.2a).

Definiert man weiter

$$\Delta_{\min} := \min_{i=1,2,\dots,n_R} (\Delta_i^I) \quad (\text{B9.2d})$$

als die minimale Distanz Beobachter - Himmelskörper (geschätzt auf Grund der  $I$ -ten Näherungsbahn), wird die Bedeutung von  $\gamma_q^{I+1}$  als maximalem Fehler in den theoretischen Werten der beobachteten Funktionen  $\alpha_i, \delta_i, i=1,2,\dots,n_R$  evident.

Nachzutragen bleibt noch, dass wir für diese Abschätzung am Ende des  $I$ -ten Schrittes in (67)  $\tilde{y}_{,q}^{I+1}(t)$  in (B9.2) mit (178k), also mit der ersten Näherung  $\vec{r}^{\rightarrow I+1,1}(t)$  der Bahn  $\vec{r}^{\rightarrow I+1}(t)$  abschätzen müssen - was für diesen Zweck sicherlich ausreicht.

- Abschätzung des Approximationsfehlers nach Abbruch des Iterationsverfahrens: Man könnte diesen Fehler genau nach (B9.2) abschätzen. Die so erhaltenen Werte sind aber sehr pessimistisch, da ja schliesslich in (B9.2a) die Terme  $q$ -ter Ordnung noch berücksichtigt worden sind.

Eine realistischere Abschätzung dieses Fehlers ist zweifellos durch

$\gamma_{q+1}^{I^*+1}$  ( $I^*$ =letzter Schritt, Berechnung dieser Grösse nach (B9.2)) gegeben.

Will man den Approximationsfehler durch  $\gamma_{q+1}^{I^{*+1}}$  abschätzen, müssen wir nach (B9.2) die folgende Grösse abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_{1,q+1}^{I^{*+1}} \cdot \vec{r}_{11} + \tilde{Y}_{2,q+1}^{I^{*+1}} \cdot \vec{r}_{12}| &\approx |\vec{r}^{I^{*+1}(q+1)}(t_0)| / (q+1)! \\ &=: |\vec{r}^{(q+1)}| / (q+1)! \end{aligned} \quad (B9.3a)$$

Im allgemeinen ist es nicht möglich, den Betrag von  $\vec{r}^{(q+1)}$  mit Hilfe der - bei Verwendung eines Polynomansatzes bis und mit Ordnung  $q$  - bekannten Näherungswerte  $\vec{r}^{(i)}$  für die  $\vec{r}^{(i)}$ ,  $i=0,1,\dots,q$  abzuschätzen. Man weist aber leicht nach, dass für Kreisbahnen

$$\frac{|\vec{r}^{(i+1)}|}{|\vec{r}^{(i)}|} = k/a^{3/2} = n, \quad i=0,1,\dots \quad *) \quad (B9.3b)$$

gilt. Für allgemeinere Bahnen ist (B9.3b) nicht erfüllt, aber in guter Näherung gilt dafür

$$\frac{|\vec{r}^{(i+1)}|}{|\vec{r}^{(i)}|} \approx \frac{|\vec{r}^{(i)}|}{|\vec{r}^{(i-1)}|}, \quad i=1,2,\dots \quad (B9.3c)$$

Damit aber können wir  $\gamma_{q+1}^{I^{*+1}}$  wie folgt mit bekannten Grössen abschätzen:

$$\gamma_{q+1}^{I^{*+1}} = \gamma_q^{I^{*+1}} \cdot (\gamma_{q+1}^{I^{*+1}} / \gamma_q^{I^{*+1}}) = \gamma_q^{I^{*+1}} \cdot \left( \frac{\Delta T_{\max}}{(q+1)} \cdot \frac{|\vec{r}^{(q+1)}|}{|\vec{r}^{(q)}|} \right) \quad (B9.3d)$$

Setzt man in (B9.3d) die Näherung (B9.3c) ein, folgt nach einigen Umformungen:

$$\gamma_{q+1}^{I^{*+1}} := \gamma_q^{I^{*+1}} \cdot (\gamma_q^{I^{*+1}} / \gamma_{q-1}^{I^{*+1}}) \cdot \frac{q}{q+1} \quad (B9.3)$$

Die Abschätzung (B9.3) für den maximalen Approximationsfehler ist völlig korrekt für Kreisbahnen, für allgemeinere Bahnen ist es jedenfalls eine realistischere Abschätzung als (B9.2). Die Abschätzung ist nicht übertragbar auf die Lösungen anderer Differentialgleichungssysteme als (171).

#### Erfahrungen mit dem Bahnbestimmungsprogramm BBOSTR

Zur Illustration sind auf den Seiten 192,193 in den Tabellen 14a,b,c und in den Figuren 8a,b,c,d wichtige Teile des "Outputs" der Programme MPLORB (Tabelle 14a), BBOSTR (Tabellen 14b,c) sowie RESID (Figuren 8a,b,c,d) wiedergegeben.

Die genannten Tabellen wurden bei der Bestimmung der Bahn des von P. Wild in Zimmerwald entdeckten Kleinplaneten 1978 RC (Nummer = 2239, noch nicht benannt) erzeugt, die Figuren 8a-8d wurden vom Programm RESID nach Bestimmung der Bahn des Kometen 1978 b (entdeckt in Zimmerwald von P. Wild) mit dem Programm BBOSTR zunächst auf dem graphischen Bildschirm des in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Kleincomputersystems dargestellt, anschliessend mit dem Programm PLOT zu Papier gebracht (siehe Tabelle 2).

\*)  $k$  = Gauss'sche Konstante,  $n$  = mittlere (tägliche) Bewegung

Zu Tabelle 14a

Diese vom Programm MPLORB (Tabelle 2) erzeugte Tabelle enthält alle Zimmerwalder Beobachtungen des Planeten 1978 RC aus der Opposition der Entdeckung . Die Beobachtungen erstrecken sich über ein Zeitintervall von ungefähr zwei Monaten .

Es handelt sich um eine typische Bahnbestimmungsaufgabe , wie sie häufig zu lösen ist .

Zu Tabelle 14b

Hier werden die Residuen der Beobachtungen sowie der nach (34) geschätzte mittlere Einheitsfehler und der nach (B9.3) berechnete maximale Approximationsfehler ausgedruckt .

In der Ueberschrift findet man zusätzlich einige wichtige technische Angaben :

- Bei unserem Beispiel waren - bei Verwendung des Abbruchkriteriums (64) - nur drei Iterationsschritte in Schema (67) nötig .
- Als Polynomgrad genügte offenbar  $q=5$  ( siehe (B9.1g,h,i,j), (B9.2) ) .
- Die Funktionen  $z_{\rho}(t)$  ( siehe (179h,j) ) wurden ebenfalls mit Polynomen des Grades  $q'=q=5$  approximiert .
- Die Parameter wurden nach (178c) ( insgesamt 6 ) gewählt .

Varianten

- Werden nur 2 Parameter bestimmt ( siehe (B9.1a,b,c,d) ) , ändert sich bei diesem Beispiel in den Resultaten nicht sehr viel , da zufälligerweise die Residuen der ersten und letzten Beobachtung relativ klein sind .

Auch die technischen Daten ( Anzahl der Iterationsschritte , Polynomgrade ) ändert sich nicht . Diese Tatsache , die sich nicht nur bei diesem Beispiel bestätigt hat , verdient festgehalten zu werden :

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Prozesses (67) bei der Lösung von "Bahnbestimmungsaufgaben als Randwertprobleme" ist weitgehend <u>unabhängig</u> davon , ob nur zwei oder aber sechs Parameter bestimmt werden .	(B9.4)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

- Werden die Funktionen  $z_{\rho}(t)$  - wie beim klassischen Gauss'schen Verfahren - vernachlässigt ( siehe (182q) ) , verringert sich die Konvergenzgeschwindigkeit des Prozesses (67) deutlich : Bei unserem Beispiel waren bei  $n_p=2$  fünf anstatt wie vorher nur drei Iterationsschritte nötig .

Zu Tabelle 14c

Dass die Fehler im Perihelabstand "PER" und in der Periheldurchgangszeit "T0" gross sind , liegt daran , dass die Exzentrizität  $e = .09$  klein , das Perihel also nicht sehr ausgeprägt ist .

Zu den Figuren 8a,b,c,d

Hier werden die Residuen der Beobachtungen des Kometen 1978 b tangential und normal zur scheinbaren , topozentrischen Bewegung dargestellt .

Zur Bahnbestimmung mit dem Programm BBOSTR wurden ursprünglich 155 , nach Markierung von vier Beobachtungen ( dargestellt durch " x " in den Figuren 8a,b,c,d ) nur noch 151 Beobachtungen von Observatorien "aus aller Welt" verwendet .

Dabei wurden einmal sechs , einmal zwei Parameter als Unbekannte der Aufgabe definiert und bestimmt ( siehe (B9.1) ) . Die Figuren 8a,b

Tabelle 14a

RC1978

Beobachtungen:

NR	J	M	T	RH	RM	RS	V	DG	DM	DS	STA
1	1978	9	13.152430	0	55	9.870	1	17	21.80		026
2	1978	9	24.919100	0	46	23.600	0	59	51.70		026
3	1978	10	1.882120	0	40	35.500	0	48	28.40		026
4	1978	10	12.063540	0	32	2.190	0	33	58.80		026
5	1978	10	12.115970	0	31	59.510	0	33	53.60		026
6	1978	10	27.817360	0	20	35.850	0	24	58.50		026
7	1978	10	27.906250	0	20	32.580	0	25	1.40		026
8	1978	10	28.855970	0	19	58.770	0	25	13.00		026
9	1978	11	7.962150	0	15	4.790	0	33	37.00		026
10	1978	11	19.755560	0	12	15.080	0	58	27.80		026
11	1978	11	24.754170	0	12	1.270	1	13	54.40		026

Tabelle 14b

RESIDUEN IN BOGENSEKUNDEN  
 ANZAHL ITERATIONSSCHRITTE= 3  
 POLYNOMGRADE FUER Y1,Z1= 5 , 5  
 ANZAHL PARAMETER= 6

NR	RA*COS(DE)	DE	STATION
1	0.56	0.05	026
2	-1.25	0.23	026
3	0.21	0.18	026
4	-0.23	-1.22	026
5	0.81	0.26	026
6	1.41	1.52	026
7	0.33	-0.52	026
8	-1.59	0.12	026
9	-0.48	-1.09	026
10	0.37	0.27	026
11	-0.14	0.21	026

MITTL. FEHLER = 0.91

MAXIMALER APPROXIMATIONSFEHLER(\*)= 0.00

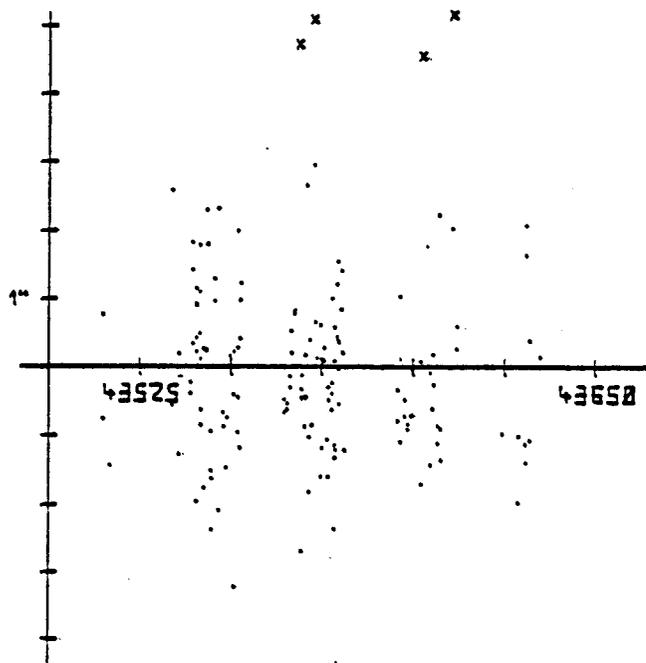
Tabelle 14c

OSKULIERENDE ELEMENTE UND MITTLERE FEHLER  
 EPOCHE = 43780.000000

A = 3.201443 +- 0.000171  
 E = 0.092254 +- 0.000081  
 I = 10.879000 +- 0.003014  
 KN = 20.312015 +- 0.002636  
 PER=-12.056386 +- 0.219096  
 TO = 43779.992500 +- 1.064056

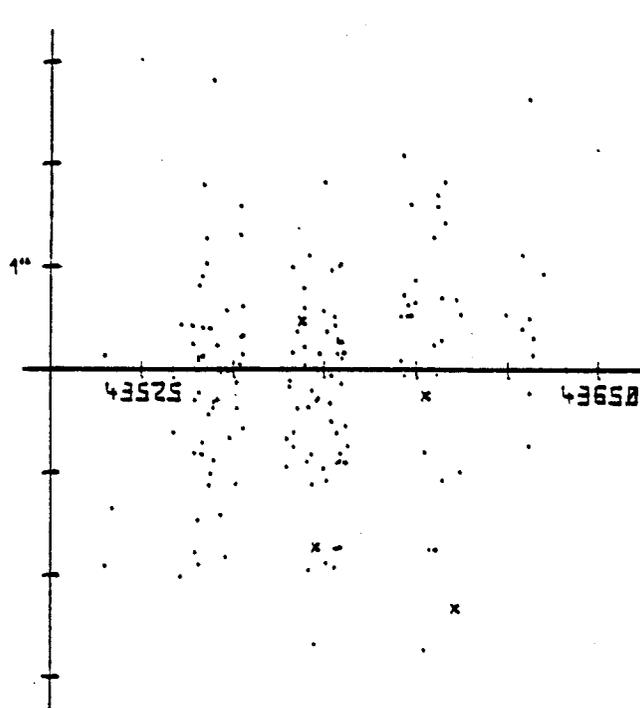
Figur 8a

Residuen tangential



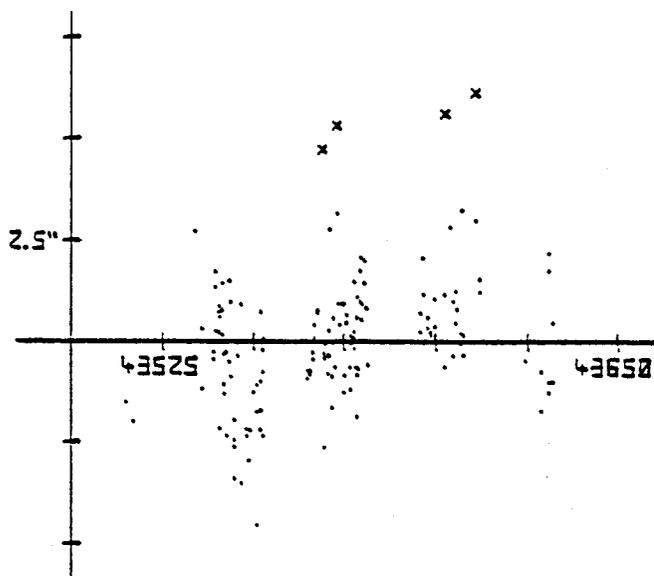
Figur 8b

Residuen normal



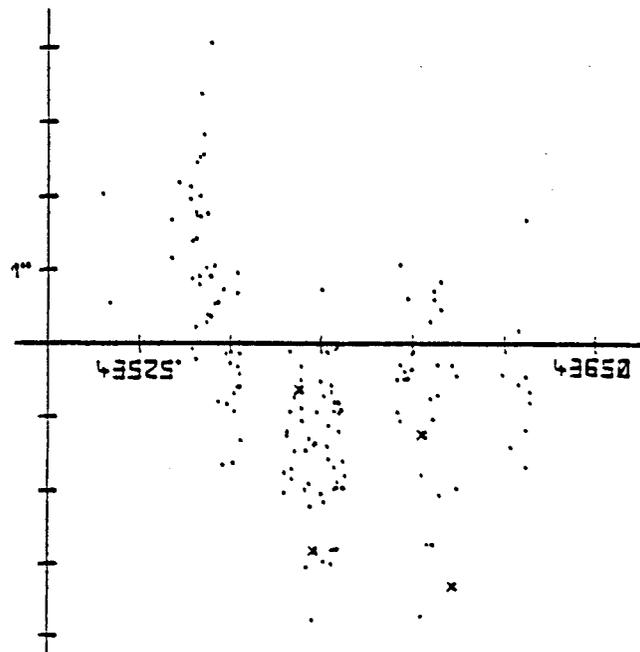
Figur 8c

Residuen tangential  
(reduzierte Bahnbestimmung)



Figur 8d

Residuen normal  
(reduzierte Bahnbestimmung)



beziehen sich auf die vollständige Bahnbestimmung ( Definition der Parameter nach (178c,b) ) : Es lässt sich kein systematischer Verlauf der Residuen feststellen . Eine solche Systematik ist hingegen in den Figuren 8c,d deutlich zu sehen : Diese Systematik ist einzig und allein dem Umstand zuzuschreiben , dass der Bahn die Bedingungen (B9.1d) aufgezwungen wurden . Die Schlussfolgerung aus diesen Darstellungen ergibt sich von selbst !

Noch einige technische Bemerkungen zur Bestimmung der Bahn von 1978 b :

- Im Programm BBOSTR wurde der Polynomgrad  $q=9$  gewählt , die Anzahl der nötigen Iterationsschritte betrug 5 ( die Initialisierung erfolgte wie bei Kleinplaneten durch (178d<sub>1</sub>,e) ) .  
Der maximale Polynomgrad zeigt an ( siehe (B9.1g) ) , dass bei diesem Beispiel ungefähr die Grenzen der Anwendbarkeit des Programms BBOSTR erreicht wurden .  
Sollten daher weitere Beobachtungen aus einem grösseren Zeitintervall zu einer Bahnbestimmung verwendet werden , ist eine Intervallunterteilung bei der numerischen Integration unumgänglich .
- Der Fachmann kann im übrigen aus den Figuren 8a,b,c,d die Mondphasen zu Beginn des Jahres 1978 rekonstruieren (!) .

Es wäre durchaus möglich , analog zum Programm BBOSTR ein Programm BBMSTR zu entwickeln , bei dem von allem Anfang an Planeten/Mondstörungen mitberücksichtigt werden . Ein solches Programm wäre von einfacherer Struktur , da die Transformationen (179b),(179f) wegfallen , dafür würde mehr Rechenzeit benötigt , da direkt das Differentialgleichungssystem (172) mit drei Gleichungen und nicht das System (179c) gelöst werden muss . Das Konvergenzverhalten einer solchen "Bahnbestimmung mit Störungen , formuliert als Randwertproblem" würde sich kaum vom Verhalten des hier besprochenen Programms BBOSTR unterscheiden . Eine typische Anwendung für ein solches Programm wäre etwa die Bestimmung der Bahn von Eros-Objekten aus Beobachtungen während ihres Vorbeifluges an der Erde , wobei die Störungen von Erde und Mond berücksichtigt werden müssen .

Fassen wir zusammen :

Mit Programmen der Art , wie sie in Beispiel 9 vorgestellt wurden , lassen sich Bahnbestimmungsaufgaben - formuliert als Randwertprobleme - schnell und sicher , (fast) ohne Hypothesen ( siehe (178e) ) , lösen . Es können von allem Anfang an beliebig viele Beobachtungen beliebiger Stationen verarbeitet werden . Eine Unterteilung in Bahnbestimmung und Bahnverbesserung erübrigt sich . Im Prinzip ist es möglich , Störungen von Anfang an zu berücksichtigen . Ist die Anzahl der beobachteten Richtungen grösser als drei , erhält man Schätzungen für die mittleren Fehler der oskulierenden Elemente zu einer (wählbaren) Epoche  $T_{osc}$  . Wurden nur drei Richtungen beobachtet , kann die Aufgabe so formuliert werden ( siehe (182..) ) , dass - wie bei der klassischen Gauss'schen

Bahnbestimmung nur zwei Parameter effektiv bestimmt werden müssen .

Im übrigen wurde gezeigt , dass die Konvergenz der Gauss'schen Bahnbestimmung beschleunigt werden kann , wenn an Stelle der Gauss'schen Fundamentalgleichung die modifizierte Gleichung (1820) verwendet wird .

### 3.4.2.2 BAHNBESTIMMUNG ALS ANFANGSWERTPROBLEM

In der Literatur werden Aufgaben dieser Art unter dem Titel "Bahnbestimmung nach dem Laplace'schen Prinzip" behandelt . Wir wollen das - in vielen Varianten vorliegende - klassische Prozedere kurz rekapitulieren ( siehe z.B. {K. Stumpff, Bd.1,1959,§67} ) :

- Es wird versucht , zu einem Zeitpunkt  $T_0$  des Intervalles  $I$  ( siehe (174) ) aus den gegebenen Richtungsbeobachtungen die Grössen  $\alpha^{(i)}(T_0), \delta^{(i)}(T_0)$  ,  $i=0,1,2$  , also die theoretischen Werte für Rektaszension , Deklination und deren beide ersten Ableitungen zu bestimmen .
- Es wird vorausgesetzt , dass
  1. alle Beobachtungen von ein und demselben Observatorium "Schwerpunkt der Erde" aus gemacht wurden ( sonst hätte ja auch die Verwendung von Funktionen  $\alpha(t), \delta(t)$  keinen Sinn ) ; weiter wird angenommen , dass sich
  2. die Bewegung des Schwerpunktes der Erde durch das Differentialgleichungssystem (171) beschreiben lässt .
- Unter diesen Voraussetzungen lässt sich leicht ein Differentialgleichungssystem für den Vektor  $\vec{\Delta}(t) := \vec{r}(t) - \vec{R}(t)$  angeben :
$$\vec{\Delta}^{(2)} = - k^2 \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \quad *) \quad (183a)$$
- Ersetzt man in (183a) die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch Polarkoordinaten , folgt ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in den Grössen  $\Delta(t), \alpha(t), \delta(t)$  . Dieses Differentialgleichungssystem ist von relativ komplizierter Struktur und wird daher hier nicht wiedergegeben .

---

\*)  $\vec{r}(t)$  ist der heliozentrische Ortsvektor des Planetoiden ,  
 $\vec{R}(t)$  derjenige des Schwerpunktes der Erde .

- Setzt man in diesem Differentialgleichungssystem  $t=T_0$  , resultiert ein algebraisches Gleichungssystem zum Bestimmen der einzigen verbleibenden Unbekannten  $\Delta(T_0), \Delta^{(1)}(T_0), \Delta^{(2)}(T_0)$  , da die übrigen Grössen  $\alpha^{(i)}(T_0)$  und  $\delta^{(i)}(T_0)$  ,  $i=0,1,2$  (näherungsweise) aus den Beobachtungen ermittelt wurden , und da  $\vec{R}(T_0)$  und dessen Ableitungen aus den Jahrbüchern entnommen werden können . Dieses algebraische Gleichungssystem ist nicht linear , die traditionelle Lösung führt auf eine Gleichung siebenten Grades in einer Hilfsgrösse ( siehe {K. Stumpff, Bd.1, §67} ) .
- Sind die Grössen  $\Delta^{(i)}(T_0)$  ,  $i=0,1$  bestimmt , lassen sich ohne Schwierigkeiten Näherungswerte für die heliozentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren des Himmelskörpers zur Zeit  $T_0$  angeben . In unserer Schreibweise erhält man also die rechten Seiten der Vektorgleichungen

$$\underline{\vec{r}^{I(i)}(T_0)} = \vec{r}_{0i}^I , \quad i=0,1 , \quad I = 1 \quad (183b)$$

- Ausgehend von dieser Näherungsbahn werden dann schliesslich mit mehr oder weniger korrekten Iterationsprozessen der Art (67) die Komponenten der Vektoren  $\vec{r}_{0i}, i=0,1$  iterativ bestimmt .

Der Schwerpunkt der klassischen Bahnbestimmung nach dem Laplace'schen Prinzip liegt also auf der Berechnung einer ersten Näherungsbahn - in unserer Sprechweise auf der Initialisierung ( Schema (67) , Block B\* ) .

Erinnern wir uns : bei der "Bahnbestimmung als Randwertaufgabe" war die entsprechende Aufgabe (Angabe erster Näherungen für die Randvektoren  $\vec{r}_{1i}, i=1,2$ ) sehr einfach zu lösen : Die Parameter wurden nach (178c) gewählt , durch (178d<sub>1</sub>,e) wurden erste Näherungen für die Parameter angegeben , die Randvektoren schliesslich wurden nach (178b) mit den genäherten Parameterwerten berechnet . Wahrhaft ein grosser Unterschied zum aufwendigen Vorgehen bei der Laplace'schen Bahnbestimmung .

Bei der eben geschilderten Initialisierung der Laplace'schen Bahnbestimmungsaufgabe sind - meines Erachtens - zwei Punkte störend :

- Es wurde vorausgesetzt , dass alle Beobachtungen von ein und demselben Observatorium "Schwerpunkt der Erde" aus gemacht wurden . Bei der Initialisierung der Bahnbestimmung nach dem Gauss'schen Prinzip ist es dagegen völlig gleichgültig , ob eine Richtung von der Erde aus , eine zweite vom Jupiter aus etc. beobachtet wurde . Diese Vernachlässigung (Identität aller Observatorien mit dem Erdschwerpunkt) liessen sich - bei den bisherigen Problemen der Himmelsmechanik - durchaus rechtfertigen , da schliesslich alle Beobachtungen von Observatorien auf der Erdoberfläche aus gemacht wurden , und da die Dimensionen der Erde verglichen mit den Distanzen im Planetensystem doch klein sind . Möchte man hingegen die Laplace'sche Bahnbestimmung auf die Bahn eines künstlichen Erdsatelliten anwenden , wird die klassische Initialisierung völlig versagen , wäre doch die Voraussetzung "Identität der Observatorien" durch nichts mehr gerechtfertigt .
- Zieht man in Betracht , dass die Bestimmung der ersten und zweiten Ableitungen der Polarkoordinaten  $\alpha(t), \delta(t)$  zur Zeit  $t = T_0$  bei wenigen Beobachtungen jedenfalls nicht ganz einfach ist ( wer's nicht glaubt schlage einmal in einem Jahrbuch für Amateure die zum Teil skurrilen Oppositionsschleifen der Planetoiden nach ) , ist die Frage berechtigt , ob sich das geschilderte klassische Vorgehen nicht durch ein günstigeres - auch auf andere Problemarten (Satellitenbahnen) anwendbares - Verfahren ersetzen lässt . Wir werden sehen , dass sich diese Frage bejahen lässt , wollen aber vorher die Aufgabe und die Voraussetzungen präziser formulieren :

#### Voraussetzungen

1. Unverändert übernehmen wir die Voraussetzungen (173), (174), (175) von der Bahnbestimmung als Randwertaufgabe .

(184a)

2. Wir beschränken uns auf die Behandlung der Bahnbestimmung ohne Störungen .

( Bahnbestimmung mit Störungen , behandelt als Anfangswertproblem , siehe {M. Rothacher, 1982} ) .

(184a)<sub>2</sub>

Wegen (184a)<sub>2</sub> dürfen wir für  $\vec{r}(t)$  den Ansatz (B5.1d) übernehmen :

$$\vec{r}(t) = y_1(t) \cdot \vec{r}_{00} + y_2(t) \cdot \vec{r}_{01} \quad (185a)$$

$$\text{Wobei : } \vec{r}^{(i)}(T_0) = \vec{r}_{0i}, \quad i=0,1 \quad (185b)$$

Genau wie in Beispiel 5 fassen wir die  $y_k(t)$ ,  $k=1,2$  zu einer Spaltenmatrix  $y(t)$  zusammen, die das Differentialgleichungssystem (B5.1f) und die Anfangsbedingungen (B5.1g) erfüllt :

$$y|^{(2)} = -k^2 \cdot \frac{y|}{r^3} \quad (185c)$$

$$y(T_0)| = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad y(T_0)|^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (185d)$$

( Definition von  $r$  siehe (B5.1f) ) .

Wiederum werden die partiellen Ableitungen des Vektors  $\vec{r}(t)$  nach den - noch nicht näher festgelegten - Parametern  $p_\ell$ ,  $\ell=1,2,\dots,6$  benötigt ( vergleiche (179f) ) :

$$\vec{z}_\ell(t) := \{\vec{r}(t)\}_{p_\ell} = y_1(t) \cdot \{\vec{r}_{00}\}_{p_\ell} + y_2(t) \cdot \{\vec{r}_{01}\}_{p_\ell} + \{y_1(t)\}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{00} + \{y_2(t)\}_{p_\ell} \cdot \vec{r}_{01} \quad (185e)$$

$$\ell=1,2,\dots,6$$

Die  $\{y_k(t)\}_{p_\ell}$ ,  $k=1,2$  sind nach der allgemeinen Schreibweise

(52) die Elemente der Spaltenmatrix  $z_\ell(t) := \{y(t)|\}_{p_\ell}$ ,  $\ell=1,2,\dots,6$  .

Diese Funktion  $z_\ell(t)|$  ist Lösung derjenigen Anfangswertaufgabe, die aus (185c,d) durch Ableiten nach dem Parameter  $p_\ell$  entsteht ( vergleiche (179h,j) ) :

$$z_\ell|^{(2)} = P_0(t) \cdot z_\ell| + \{-k^2 \cdot \frac{y|}{r^3}\}_{p_\ell} \quad (185f)_1$$

$$z_\ell^{(i)}(T_0)| = 0| \quad \ell=1,2,\dots,6 \quad (185f)_2$$

Die partiellen Ableitungen in  $(185f)_1$  sind ähnlich wie in  $(179i)$  definiert . Ihre explizite Gestalt können wir aber erst nach Definition der Parameter angeben ( siehe  $(189)$  ) .

Lösung der "Bahnbestimmung als Anfangswertaufgabe" nach Schema  $(67)$

Block A , Schema  $(67)$

Als erstes müssen wir die Ausgangsepoche  $T_0$  fixieren :

$$T_0 = t_{j_0} - \Delta t_{j_0}^1$$

Dabei sei  $t_{j_0}$  die der Mitte des Intervalles I ( siehe  $(174)$  ) am nächsten liegende Beobachtungszeit ,  $\Delta t_{j_0}^1$  sei die aus der ersten Näherungsbahn folgende Lichtlaufzeit ( siehe  $(187d)$  ) .

(186a)

Jetzt sind sechs Parameter zu wählen , die die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit  $T_0$  eindeutig festlegen . Nach den Ausführungen im letzten Kapitel wissen wir , dass diese Wahl keinesfalls eindeutig ist . Hier gehen wir zur Abwechslung der nächstliegenden Idee nach , und identifizieren die Parameter mit den kartesischen Koordinaten der Vektoren  $\vec{r}_{0i}, i=0,1$  ( siehe  $(185b)$  ) bezüglich des Koordinatensystems  $KS_1$  ( siehe  $(132a)$  ) .

Nach der Schreibweise  $(132c)_1$  sind die  $r_{0iB_1}, i=0,1$  die Komponentenmatrizen der Vektoren  $\vec{r}_{0i}, i=0,1$  im Koordinatensystem  $KS_1$  . Nach  $(130c)$  dürfen wir diese Vektoren als Linearkombinationen der Basisvektoren  $\vec{e}_{kB_1}, k=1,2,3$  des Systems  $KS_1$  schreiben :

$$\vec{r}_{0i} = r_{0iB_1,1} \cdot \vec{e}_{1B_1} + r_{0iB_1,2} \cdot \vec{e}_{2B_1} + r_{0iB_1,3} \cdot \vec{e}_{3B_1} \quad (186b)$$

$i=0,1$

Die sechs Parameter definieren wir nun wie folgt :

$$\begin{array}{l} p_\ell = r_{00B_1,\ell} \\ p_{\ell+3} = r_{01B_1,\ell} \end{array} \quad , \quad \ell=1,2,3 \quad (186c)$$

Block B\* , Schema (67)

Hier müssen erste Näherungen für die Parameter angegeben werden .

$$1. \underline{p_{\ell}^I = r_{00B_1, \ell}^I, \ell=1,2,3, I=1}$$

Das Vorgehen ist gleich wie beim Initialisieren der Randwert-  
aufgabe ( vergleiche (178b,d<sub>2</sub>,e) ) :

$$\text{Für } I := 1 \text{ gelte : } \underline{\vec{r}_{00}^I := \vec{R}_{j_0} + \Delta_{j_0}^I \cdot \vec{e}_{j_0}^I} \quad (187a)$$

(  $\vec{e}_{j_0}^I$  ist der zur Zeit  $t_{j_0}$  beobachtete Einheitsvektor ) .

$$\text{Wir verlangen nun : } \underline{|\vec{r}_{00}^I| = a_0 = 2.7 \text{ A.E.}} \quad (187b)$$

Daraus folgt ( in Analogie zu (178e) ) :

$$I := 1 : \underline{\Delta_{j_0}^I = -(\vec{e}_{j_0} \cdot \vec{R}_{j_0}) + \sqrt{(\vec{e}_{j_0} \cdot \vec{R}_{j_0})^2 + a_0^2 - R_{j_0}^2}} \quad (187c)$$

Damit folgt auch die zur Definition von  $T_0$  ( siehe (186a) )  
benötigte Lichtlaufzeit :

$$\underline{\Delta t_{j_0}^1 = \Delta_{j_0}^1 / c} \quad (c=\text{Lichtgeschwindigkeit}) \quad (187d)$$

$$2. \underline{p_{\ell+3}^I = r_{01B_1, \ell}^I, \ell=1,2,3, I=1}$$

a. Mit der bis jetzt bekannten Information sind wir im Stande ,  
 $y^I(t)|$  durch eine Taylorreihe  $y^{I,1}(t)|$  bis und mit Termen  
der Ordnung 2 zu nähern :

$$\underline{y^{I,1}(t)| := y(T_0)| + (t-T_0) \cdot y(T_0)|^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot (t-T_0)^2 \cdot y(T_0)|^{(2)}} \quad (2)$$

$$I = 1$$

(187e)

In (187e) sind die Matrizen  $y(T_0)|^{(i)}, i=0,1$  (unabhängig vom  
Index I) durch (185d) gegeben ,  $y^I(T_0)|^{(2)}$  folgt aus (185c) ,  
wenn man dort  $y| := y(T_0)|$  setzt und  $r = |\vec{r}_{00}^I| = a_0$  verwen-  
det .

Damit dürfen wir (187e) explizit wie folgt schreiben :

$$y^{I,1}(t) = \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right| + (t-T_0) \cdot \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right| - \frac{1}{2} \cdot (t-T_0)^2 \cdot \frac{k^2}{a_0^3} \cdot \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right| \quad (187f)$$

b. Setzt man die Näherung (187a) für  $\vec{r}_{00}^I$  und (187f) für  $y(t)$  in (185a) ein, folgt - mit einer noch unbekanntenen Näherung  $\vec{r}_{01}^I$  für  $\vec{r}_{01}^I$  - eine erste Näherungsbahn für den beobachteten Himmelskörper:

$$\vec{r}^{I,1}(t) := y_1^{I,1}(t) \cdot \vec{r}_{00}^I + y_2^{I,1}(t) \cdot \vec{r}_{01}^I, \quad i=1 \quad (187g)$$

c. Der Vektor  $\vec{r}_{01}^I$  wird nun durch die beiden folgenden Forderungen festgelegt:

$$\vec{r}^{I,1}(t_{n_R}^I - \Delta t_{n_R}^I) := \vec{R}_{n_R}^I + \Delta_{n_R}^I \cdot \vec{e}_{n_R}^I, \quad I=1 \quad (187h)$$

$$|\vec{r}^{I,1}(t_{n_R}^I - \Delta t_{n_R}^I)| := a_0 = 2.7 \text{ A.E.} \quad (187i)$$

In (187h) wird verlangt, dass die Bahn  $\vec{r}^{I,1}(t)$  für  $I=1$  die letzte Richtungsbeobachtung exakt darstellt, in (187i) wird - wie bei der Gauss'schen Bahnbestimmung - gefordert, dass die Distanz von der Sonne zur Zeit  $t=t_{n_R}^I - \Delta t_{n_R}^I$  gleich 2.7 A.E. beträgt; man vermutet also, dass es sich bei dem beobachteten Himmelskörper um ein Objekt im Asteroidengürtel handelt. Mit (187h,i) folgt:

$$\Delta_{n_R}^I = -(\vec{e}_{n_R}^I \cdot \vec{R}_{n_R}^I) + \sqrt{(\vec{e}_{n_R}^I \cdot \vec{R}_{n_R}^I)^2 + a_0^2 - R_{n_R}^2}, \quad I=1 \quad (187j)$$

Sowie:  $\Delta t_{n_R}^I = \Delta_{n_R}^I / c, \quad I=1 \quad (187k)$

Setzt man nun (187h) in (187g) ein, folgt der Vektor  $\vec{r}_{01}^I$ :

$$\vec{r}_{01}^I = (\vec{R}_{n_R}^I + \Delta_{n_R}^I \cdot \vec{e}_{n_R}^I - y_1^{I,1}(t_{n_R}^I - \Delta t_{n_R}^I) \cdot \vec{r}_{00}^I) / y_2^{I,1}(t_{n_R}^I - \Delta t_{n_R}^I) \quad I=1 \quad (187l)$$

Dabei sind  $\Delta_{n_R}^I$  sowie  $\Delta t_{n_R}^I$  in (187l) durch (187j,k) definiert, die Initialisierung ist abgeschlossen.

Anmerkungen :

- Es ist natürlich durchaus möglich , die Epoche  $T_0$  anders als in (186a) zu wählen . Wichtig ist wegen der Initialisierung einzig und allein , dass  $T_0$  ( bis auf die Lichtlaufzeit ) mit einer der Beobachtungszeiten übereinstimmt . ( Gleiches gilt sinngemäss für die Bedingung (187h) ) .
- Die Forderungen (187b) , (187i) sind für normale Planetoiden geeignet . Bei speziellen Objekten ( z.B. Kometen , innerhalb der Erdbahn beobachtet ) dürfte es besser sein , direkt erste Näherungen für  $\Delta_{j_0}^I, \Delta_{n_R}^I$  anzugeben .
- Die durch (187a) und (187l) definierten ersten Näherungen für die Parameter (186c) sind unabhängig von Hypothesen , wie sie bei der klassischen Bahnbestimmung nach Laplace nötig sind . Unsere Art der Initialisierung lässt sich daher auch ohne Probleme auf Satellitenbahnen übertragen .
- Bei der Bahnbestimmung als Randwertaufgabe hatten wir den Vorteil , dass im Spezialfall  $n_R = 3$  nur zwei Parameter bestimmt werden mussten . Bei der Bahnbestimmung als Anfangswertaufgabe könnten wir auf analoge Weise zwei Unbekannte "einsparen" , wenn wir die drei ersten Parameter nicht nach (186c) sondern als Polarkoordinaten des Vektors  $\vec{\Delta}_{j_0}$  (siehe (187a)) wählen würden .
- Nachzutragen haben wir noch die explizite Gestalt der in (185c) auftretenden partiellen Ableitungen der Vektoren  $r_{0i}, i=0,1$  nach den Parametern (186c) ( siehe (186b) ) :

$$\left. \begin{aligned} \{\vec{r}_{00}\}_{p_\ell} &= \vec{e}_{\ell B_1} & , & \{\vec{r}_{00}\}_{p_{\ell+3}} = \vec{0} \\ \{\vec{r}_{01}\}_{p_\ell} &= \vec{0} & , & \{\vec{r}_{01}\}_{p_{\ell+3}} = \vec{e}_{\ell B_1} \end{aligned} \right| \quad , \ell=1,2,3 \quad (188)$$

- Damit können auch die im Differentialgleichungssystem (185f)<sub>1</sub> auftretenden partiellen Ableitungen ( vergleiche (179i) ) angegeben werden :

$$\left. \begin{aligned} \{-k^2 \cdot \frac{y}{r^5}\}_{p_\ell} &= 3 \cdot k^2 \cdot \frac{y}{r^5} \cdot (y_1^2 \cdot (\vec{r}_{00} \cdot \vec{e}_{\ell B_1}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{e}_{\ell B_1} \cdot \vec{r}_{01})) \\ \{-k^2 \cdot \frac{y}{r^5}\}_{p_{\ell+3}} &= 3 \cdot k^2 \cdot \frac{y}{r^5} \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{r}_{00} \cdot \vec{e}_{\ell B_1}) + y_2^2 \cdot (\vec{r}_{01} \cdot \vec{e}_{\ell B_1})) \end{aligned} \right|$$

$$\ell = 1, 2, 3 \quad (189)$$

Beispiel 10 : Erste Bahnbestimmung ohne Störungen , formuliert als  
Anfangswertaufgabe

---

Aufgabe : Man schreibe ein Programm BBOSTA , mit dem aus  $n_R \geq 3$  beobachteten Richtungen  $\alpha_j^i, \delta_j^i$  ,  $j=1,2,\dots,n_R$  zu den Zeiten  $t_j$  ,  $j=1,2,\dots,n_R$  eines Himmelskörpers dessen heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  als Lösung einer Anfangswertaufgabe nach Schema (67) bestimmt wird .

- Diese Aufgabe soll analog zur Aufgabe in Beispiel 9 gelöst werden .
- Die Unterschiede :
  - Eine Unterscheidung  $n_p = 2$  ,  $n_p = 6$  fällt weg ,
  - die Parameter werden durch (186c) definiert ,
  - an Stelle von (B9.1f) wird der Ansatz (185a) verwendet .
  - der wichtigste Unterschied schliesslich besteht in der Initialisierung ( Block B\*, Schema (67) ) : bei der Randwertaufgabe wurden die Parameter durch (178d<sub>1</sub>,e) , bei der Anfangswertaufgabe werden die Parameter durch (187a,c) und (187l) initialisiert .

(B10.1)

Man vergleiche die Programme BBOSTR und BBOSTA miteinander !

Vergleich der Programme BBOSTA , BBOSTR

---

Wie nicht anders zu erwarten unterscheiden sich die beiden Programme sowohl bezüglich Umfang als auch bezüglich Leistungsfähigkeit nur wenig :

- Da bei der numerischen Integration bei der Lösung der Anfangswertaufgabe bei Verwendung des Polynomgrades  $q$  und Methode 2.1 "nur" eine Matrix der Dimension  $2 \cdot (q-1)$  , bei der numerischen Lösung der Randwertaufgabe jedoch eine Matrix der Dimension  $2 \cdot (q+1)$  invertiert werden muss , ist beim Programm BBOSTA der Rechenaufwand pro Iterationsschritt in Schema (67) etwas kleiner .
- Dafür ist die Initialisierung der Anfangswertaufgabe etwas weniger gut als die Initialisierung der Randwertaufgabe : Bei der Randwertaufgabe konnten wir eine erste Näherungsbahn definieren , die zwei Beobachtungen ( wir haben die erste und letzte gewählt ) exakt darstellt . Bei der Randwertaufgabe stimmt diese Aussage nur bis auf Terme der Ordnung 3 in  $(t_j - T_0)$  für  $j = n_R$  .
- Dies bewirkt , dass im Durchschnitt bei der Lösung einer Bahnbestimmung als Anfangswertproblem die Anzahl  $I^*$  der Iterationsschritte nach Schema (67) etwas grösser ist ( ungefähr 10% ) als bei der Lösung als Randwertaufgabe .
- Dieser Unterschied (verschiedene Anzahl Iterationsschritte in BBOSTA , BBOSTR) verschwindet fast vollständig , wenn man die Initialisierung (187l) nochmals verbessert , indem man in (187e,f) zusätzlich die Terme 3. Ordnung berücksichtigt und bei deren Berechnung die nach (187l) berechnete Näherung für  $\vec{r}_{01}$  verwendet .

## 4. PARAMETERBESTIMMUNGSPROBLEME IN DER SATELLITEN - GEODÄSIE

---

### 4.1 EINLEITUNG

Die Satellitengeodäsie , die Wissenschaft von der Vermessung der Erde mit Hilfe von künstlichen Erdsatelliten , hat wesentliche Impulse aus der klassischen Himmelsmechanik bezogen . Streng genommen gilt diese Feststellung allerdings nur für die sogenannten dynamischen Methoden der Satellitengeodäsie . Im Gegensatz dazu werden bei den rein geometrischen Methoden die Satelliten ausschliesslich als Hochziele verwendet , die von verschiedenen Observatorien auf der Erdoberfläche aus gleichzeitig beobachtet werden . Dass das Beobachtungsobjekt ein Satellit ist , der sich in einer Bahn um die Erde bewegt , ist bei den geometrischen Methoden nicht von Bedeutung . Bei den dynamischen Methoden hingegen , die allein Gegenstand der Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit sind , wird versucht , den Informationsgehalt einer jeden Beobachtung vollständig auszuschöpfen :

Jede Beobachtung eines künstlichen Erdsatelliten von einer Station auf der Erde aus enthält Information über die Bahn des Satelliten und über die Position der beobachtenden Station in einem erdfesten Koordinatensystem sowie über die Bewegung dieses Koordinatensystems im Raum .

(190)

In der dynamischen Satellitengeodäsie sind somit zwei physikalische Modelle zu definieren , die jedoch nicht unabhängig voneinander sind :

#### Modell 1

Durch dieses Modell wird die Bahnbewegung der Satelliten beschrieben . Im vorliegenden Kapitel wird die Bewegung des Satelliten im Koordinatensystem KS3 ( siehe (133) ) beschrieben .

(191a)

## Modell 2

Durch dieses Modell werden die Positionen der beobachtenden Stationen im erdfesten System KS4 ( siehe (134) ) festgelegt ; zusätzlich soll dieses Modell auch die Transformation KS3  $\longleftrightarrow$  KS4 beschreiben .

(191b)

Wir werden bei der Herleitung der Grundgleichungen sehen , dass dort die Parameter der Transformation KS3  $\longleftrightarrow$  KS4 gebraucht werden . Damit ist klar , dass die Parameter dieser Transformation zur Charakterisierung beider Modelle gebraucht werden , dass also die Modelle 1 und 2 nicht unabhängig voneinander sind .

Beide Modelle werden durch Parameter charakterisiert . Diese Parameter resp. Teilmengen dieser Parameter sind die Unbekannten der in der Satellitengeodäsie zu lösenden Probleme .

### Bemerkungen zu Modell 1 ( siehe (191a) )

Die Bahn eines jeden Satelliten ist bestimmt durch die zu jedem Zeitpunkt  $t$  auf ihn wirkenden Kräfte ( Parameter vom Typ 2 , Tabelle 1 ) und durch sechs - die Anfangs- oder die Randbedingungen definierenden - Grössen .

Danach erwartet man - in Analogie zur klassischen Himmelsmechanik - , dass die Bahn eines jeden Satelliten durch höchstens sechs Parameter vom Typ 1 ( siehe Tabelle 1 ) beschrieben werden kann . Das ist aber aus praktischen Gründen ausgeschlossen : Die für die Geodäsie verwendeten Satelliten umlaufen die Erde pro Tag etwa 6 bis 12 mal , pro Jahr somit etwa 2000 bis 4000 mal . In der klassischen Himmelsmechanik entsprechen 3000 Umläufe eines "normalen" Planetoiden mit 4 Jahren Umlaufszeit um die Sonne einem Zeitintervall von 12'000 Jahren ! Schon dieser Vergleich zeigt , dass in der dynamischen Satellitengeodäsie Probleme einer andern Grössenordnung zu lösen sind .

Es ist kaum möglich , die die Bahnen der nahen Erdsatelliten wesentlich beeinflussenden Kräfte wie Luftwiderstand und/oder

Strahlungsdruck so genau zu modellieren , dass eine befriedigende Darstellung der Beobachtungen über ein Zeitintervall von mehr als etwa einem Monat möglich ist .

Man kommt daher zwingend zu einer Unterteilung der Bahnen in Bahnstücke ( Bahnbogen , Bogen oder "arcs" genannt ) , die in den zu lösenden Aufgaben als voneinander unabhängige Satellitenbahnen behandelt werden . Die Anzahl der Sätze von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen<sup>\*)</sup> ist also gleich der Anzahl Bogen , in die eine Satellitenbahn unterteilt wurde .

Halten wir fest :

Die Ausdrücke "Bahnbogen" , "Bogen" oder "arc" verwenden wir als Synonyme für das durch eine Anfangs- und eine Endzeit charakterisierte Bahnstück einer Satellitenbahn . (192a)

Sei :  $N$  : Anzahl aller in einer Aufgabe zu bearbeitenden Bogen .

$T_{Ai}, T_{Ei}, i=1,2,\dots,N$  : Die den Bogen zugeordneten Anfangs- resp. Endzeiten . (192b)

$\Delta T_i := |T_{Ei} - T_{Ai}|, i=1,2,\dots,N$  : Länge der einzelnen Bogen ( kurz : Bogenlängen )

Es gibt übrigens keine festen Regeln für die Festlegung der Intervalllängen  $\Delta T_i, i=1,2,\dots,N$  ( diese variieren von einigen (Zeit)Minuten bei sogenannten "short-arc-Methoden" bis zu maximal etwa 30 Tagen bei grossangelegten Parameterbestimmungsaufgaben ) .

Wir beschränken uns hier darauf , auf den folgenden elementaren und wichtigen Zusammenhang hinzuweisen :

- Je länger die Bogen gewählt werden , um so mehr Parameter vom Typ 2 ( siehe Tabelle 1 ) müssen bestimmt werden .
- Je kürzer die Bogen gewählt werden , um so mehr Parameter vom Typ 1 ( Tabelle 1 ) müssen bestimmt werden ( im allgemeinen sechs pro Bogen ) .

Nun sind gewiss die Anfangs- resp. Randwerte der Satellitenbogen geodynamisch nicht von Interesse . Man sollte also meinen , dass die Bogen möglichst lang gewählt werden sollten .

\*) pro Satellit

Andrerseits muss bei langen Bogen das Kräftefeld sehr genau modelliert werden ; dabei müssen sehr viele Parameter ( vom Typ 2 , Tabelle 1 ) wie z.B. Koeffizienten von Termen hoher Ordnung der Entwicklung des Erdpotentials bestimmt werden , die geodynamisch kaum mehr von Interesse sind .

Das einzig zuverlässige Hilfsmittel zur Festlegung optimaler Bogenlängen bei gegebener Aufgabestellung und gegebener Beobachtungskonfiguration besteht in der Simulationsrechnung ( mehr zu diesem Thema siehe {G. Beutler,1977} ) .

Zusammenfassend kann man festhalten , dass das Modell 1 ( siehe (191a) ) durch (höchstens)  $6 \cdot N$  Parameter vom Typ 1 und durch eine - wesentlich von der Bogenlänge abhängenden - Anzahl von Parametern vom Typ 2 definiert wird .

#### Bemerkungen zu Modell 2 ( siehe (191b) )

Sind die beobachtenden Stationen selbst künstliche Erdsatelliten , ist das Modell 2 identisch mit dem Modell 1 . Werden jedoch zusätzlich Beobachtungen von der Erdoberfläche aus gemacht ( was im Normalfall zutreffen wird ) , muss das Modell 2 (zusätzlich) die Bewegung der Erde als eines endlichen Körpers beschreiben . Genau wie bei andern Parameterbestimmungsaufgaben muss auch hier die Modellwahl der eigentlichen Parameterbestimmung vorausgehen .

Das Erdmodell , das wir im folgenden ausschliesslich verwenden wollen , ist das Starrkörpermodell : Alle Massenpunkte des Erdkörpers rotieren mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine Achse , die sich sowohl im Raum ( Präzession , Nutation ) als auch auf der Erdoberfläche ( Polschwankung ) bewegt . Unter dieser Voraussetzung ist das in (191b) eingeführte Modell 2 durch die folgenden Parameter zu beschreiben :

#### Parameter des Modells 2

1. Parameter , die die Ortsvektoren der beobachtenden Stationen bezüglich des erdfesten Koordinatensystems KS4 ( siehe (134) ) eindeutig bestimmen .

(193)<sub>1</sub>

( Beispielsweise können diese Parameter als kartesische Koordinaten der Stationen im KS4 gewählt werden ) .

2. Parameter , die die Rotation des Starrkörpers Erde bestimmen : Präzession , Nutation , Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation , Polschwankung .

(193)<sub>2</sub>

Im Prinzip wäre es möglich , mit den Methoden der dynamischen Satellitengeodäsie alle in (193) erwähnten Parameter zu bestimmen . Es ist jedoch so , dass die die Präzession , Nutation und Winkelgeschwindigkeit der Erde bestimmenden Parameter wesentlich genauer mit Hilfe fundamental-astronomischer Methoden bestimmt werden können .

Die wichtigsten Grössen , die in der Vergangenheit mit den Methoden der Satellitengeodäsie bestimmt worden sind , sind ohne Zweifel die kartesischen Koordinaten der Beobachtungsstationen im KS4 ( siehe (134) ) : Erst die dynamischen Methoden dieser Wissenschaft erlaubten die Bestimmung dieser Parameter mit einer hohen Genauigkeit ( Grössenordnung : 1 m ) . Neuerdings wird auch die Polschwankung mit Hilfe von Satellitenbeobachtungen bestimmt .

Das Festkörpermodell für die Erde kann übrigens zur Verallgemeinerung des Erdmodells verwendet werden , indem die zeitliche Variation der aus Satellitenbeobachtungen verschiedener Epochen bestimmten Starrkörperparameter (193) festgestellt und geophysikalisch interpretiert wird .

#### 4.2 DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER DYNAMISCHEN SATELLITENGEODÄSIE

---

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für einen künstlichen Erdsatelliten unterscheidet sich in zwei Punkten von der Herleitung der Grundgleichungen in der Himmelsmechanik des Planetensystems :

- In der klassischen Himmelsmechanik konnten sämtliche Himmelskörper durch Massenpunkte approximiert werden , da die

gegenseitigen Abstände der betrachteten Himmelskörper im Vergleich zu ihren Durchmessern sehr gross sind . Da der Erddurchmesser von derselben Grössenordnung wie die Abstände der Satelliten vom Erdzentrum ist , und da die Massenverteilung im Erdkörper nur näherungsweise kugelsymmetrisch ist , darf die Erde bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen nicht als Punktmasse genähert werden .

- In der klassischen Himmelsmechanik mussten wir ausschliesslich die zwischen den Himmelskörpern wirkenden Gravitationskräfte berücksichtigen . In der Satellitengeodäsie treten zusätzlich Nicht-Gravitationskräfte wie Luftwiderstand , Strahlungsdruck und Kräfte elektromagnetischer Natur auf . Diese Kräfte sind zum Teil abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit des Satelliten ( zum Beispiel beim Luftwiderstand ) . Um die durch diese Kräfte auf den Satelliten ausgeübten Beschleunigungen zufriedenstellend modellieren zu können , muss man voraussetzen , dass die Orientierung des Satelliten im KS3 zu jedem Zeitpunkt  $t$  bekannt ist ( gravitationsstabilisierte Satelliten ) , oder dass diese Orientierung keine Rolle spielt ( kugelsymmetrische Satelliten ) . Wäre diese Orientierung nicht bekannt oder nicht bedeutungslos , müssten wir den Satelliten als starren Körper betrachten und die wesentlich komplizierteren Bewegungsgleichungen für einen solchen Körper aufstellen und lösen . Daher setzen wir voraus :

Die Orientierung der betrachteten Satelliten  
im KS3 soll gegeben oder aber bedeutungslos  
sein .

(194)

Bevor wir die Grundgleichungen herleiten , wollen wir noch die in der dynamischen Satellitengeodäsie üblichen Einheiten und Bezeichnungen einführen :

Längeneinheit :  $1 \text{ Mm} = 10^6 \text{ m}$   
Zeiteinheit :  $1 \text{ ksec} = 10^3 \text{ sec}$  .  
 $G \cdot M$  := Gravitationskonstante  $\cdot$  Erdmasse  
 $G \cdot M = 398.6005 \text{ Mm}^3/\text{ksec}^2$  \*)

(195)

\*) Der numerische Wert von  $G \cdot M$  wurde dem IAU(1976)-System astronomischer Konstanten entnommen .

( Es ist in der Satellitengeodäsie nicht üblich und auch nicht nötig , eine Masseneinheit zu definieren , da in den Bewegungsgleichungen lediglich das Produkt  $G \cdot M$  auftritt ) .

Die Charakteristiken der bei der Herleitung der Grundgleichungen relevanten Himmelskörper sind in Tabelle 15 zusammengestellt .

Anmerkung : Es wäre nicht schwierig , bei der Herleitung der Grundgleichungen zusätzlich Planetenstörungen zu berücksichtigen . Man kann jedoch zeigen , dass diese Störungen - in Anbetracht der kurzen Bogen ( siehe (192b) ) - unbedeutend sind .

Tabelle 15

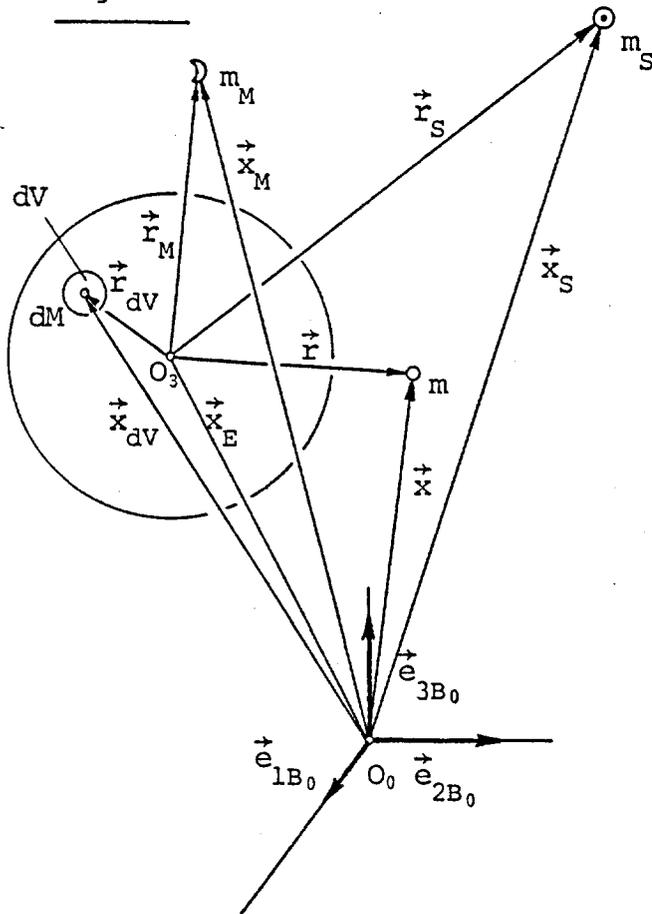
Bezeichnungen in der Satellitengeodäsie

Objekt	Masse	Ortsvektoren und Komponentenmatrizen in		
		KS0	KS3	KS4
Satellit	$m$	$\vec{x}, x_{B_0}  $	$\vec{r}, r_{B_3}  $	$\vec{r}, r_{B_4}  $
Sonne	$m_S$	$\vec{x}_S, x_{SB_0}  $	$\vec{r}_S, r_{SB_3}  $	$\vec{r}_S, r_{SB_4}  $
Mond	$m_M$	$\vec{x}_M, x_{MB_0}  $	$\vec{r}_M, r_{MB_3}  $	$\vec{r}_M, r_{MB_4}  $
Erd- schwer- punkt	$M$	$\vec{x}_E, x_{EB_0}  $	$\vec{0}, 0  $	$\vec{0}, 0  $
Volumen- element der Erde "dv"	$dM$	$\vec{x}_{dv}, x_{dvB_0}  $	$\vec{r}_{dv}, r_{dvB_3}  $	$\vec{r}_{dv}, r_{dvB_4}  $

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für einen Satelliten verläuft analog zur Herleitung der Grundgleichungen in Kapitel 3.2 : Die Bewegungsgleichungen für den Satelliten und für den Schwerpunkt der Erde folgen im Inertialsystem KS0 direkt aus den Newton'schen Axiomen . Dabei muss beim Diffe-

rentialgleichungssystem für die Bahn des Satelliten beachtet werden, dass man zur Berechnung der von der Erde auf den Satelliten ausgeübten Gravitationskraft den Erdkörper in "infinitesimale" Volumenelemente unterteilen muss. Die von diesen Volumenelementen auf den Satelliten ausgeübten Kräfte folgen direkt aus dem Gravitationsgesetz (150); die gesamte, von der Erde auf den Satelliten ausgeübte Gravitationskraft folgt dann mit Hilfe des Superpositionsprinzips (149a):

Figur 9



Legende

- $\vec{e}_{iB}$ ,  $i=1,2,3$  : Basisvektoren des KS0 (siehe (131))
- $O_0$  : Ursprung des KS0
- $O_3$  : Ursprung von KS3, KS4 .
- $m, m_S, m_M$  : Satelliten-, Sonne- und Mondmasse .
- $\vec{x}, \vec{x}_S, \vec{x}_M$  : Ortsvektoren von Satellit, Sonne, Mond im KS0 .
- $\vec{r}, \vec{r}_S, \vec{r}_M$  : Ortsvektoren von Satellit, Sonne, Mond im KS3 ( und KS4 ) .
- $\vec{x}_E$  : Ortsvektor des Erdschwerpunktes im KS0 .
- $\vec{x}_{dV}, \vec{r}_{dV}$  : Ortsvektoren eines Volumenelementes der Erde im KS0 resp KS3, KS4 .

Das Differentialgleichungssystem für den Ortsvektor  $\vec{x}$  des Satelliten bezüglich KS0 lautet :

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{\vec{x}}(2) = & - G \cdot m \cdot \int \frac{\vec{x} - \vec{x}_{dV}}{|\vec{x} - \vec{x}_{dV}|^3} \cdot dM - G \cdot m \cdot m_S \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_S}{|\vec{x} - \vec{x}_S|^3} \\
 & - G \cdot m \cdot m_M \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_M}{|\vec{x} - \vec{x}_M|^3} + \sum_{j=1}^{n_{NG}} \vec{K}_j
 \end{aligned}
 \tag{196}$$

Wobei :  $n_{NG}$  : Anzahl der Nicht-Gravitationskräfte  
 $\vec{K}_j, j=1,2,\dots,n_{NG}$  : Nicht-Gravitationskräfte .

Das Differentialgleichungssystem für den Schwerpunkt der Erde lautet ( Vernachlässigung der Gravitationsanziehung des Satelliten ,  $M = \text{Erdmasse}$  ) :

$$M \cdot \ddot{\vec{x}}_E = - G \cdot M \cdot m_S \cdot \frac{\vec{x}_E - \vec{x}_S}{|\vec{x}_E - \vec{x}_S|^3} - G \cdot M \cdot m_M \cdot \frac{\vec{x}_E - \vec{x}_M}{|\vec{x}_E - \vec{x}_M|^3} \quad (197)$$

Dividiert man (196) durch  $m$  , (197) durch  $M$  und subtrahiert die so entstehenden Vektorgleichungen voneinander , resultiert ein Differentialgleichungssystem für den geozentrischen Radiusvektor  $\vec{r}(t)$  des Satelliten . Dabei ist zu beachten , dass  $\vec{x} - \vec{x}_E = \vec{r}$  ,  $\vec{x}_S - \vec{x}_E = \vec{r}_S$  ,  $\vec{x}_M - \vec{x}_E = \vec{r}_M$

(198) gilt ( siehe Figur 9 ) .

Das Resultat lautet :

$$\ddot{\vec{r}}(2) = - G \cdot \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_{dV}}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3} \cdot dM - G \cdot m_S \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_S}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} + \frac{\vec{r}_S}{r_S^3} \right) - G \cdot m_M \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_M}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^3} + \frac{\vec{r}_M}{r_M^3} \right) + \sum_{j=1}^{n_{NG}} \vec{K}_j / m \quad (199)$$

Diesem Differentialgleichungssystem für den Vektor  $\vec{r}(t)$  entspricht das folgende System für die Komponentenmatrix  $r_{B_3}$  des Vektors  $\vec{r}(t)$  im KS3 ( siehe (133) ) :

$$r_{B_3} |^{(2)} = - G \cdot \int \frac{r_{B_3} | - r_{dV B_3} |}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3} \cdot dM - G \cdot m_S \cdot \left( \frac{r_{B_3} | - r_{S B_3} |}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} + \frac{r_{S B_3} |}{r_S^3} \right) - G \cdot m_M \cdot \left( \frac{r_{B_3} | - r_{M B_3} |}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^3} + \frac{r_{M B_3} |}{r_M^3} \right) + \sum_{j=1}^{n_{NG}} K_{j B_3} | \quad (200)$$

Bei der Berechnung der Störungen von Sonne und Mond in (200) dürfen die Funktionen  $r_{SB_3} |, r_{MB_3} |$  wegen der kurzen Bogen ( siehe (192b) ) als bekannt angenommen werden . Dasselbe gilt für die Parameter  $G \cdot m_S$  ,  $G \cdot m_M$  , deren numerische Werte ( berechnet nach den IAU(1976) System Astronomischer Konstanten ) wir vollständigshalber in den Einheiten (195) angeben wollen :

$$\left. \begin{aligned} G \cdot m_S &= 1.32712438 \cdot 10^8 \text{ Mm}^3/\text{ksec}^2 \\ G \cdot m_M &= 4.90278888 \cdot 10^0 \text{ Mm}^3/\text{ksec}^2 \end{aligned} \right\} \quad (200a)$$

Anzahl  $n_{NG}$  und explizite Gestalt der den Nicht-Gravitationskräften (196a) entsprechenden Komponentenmatrizen  $K_{jB_3} |$  ,  $j=1,2,\dots,n_{NG}$  sind sowohl von der Konstruktion als auch von den Bahncharakteristiken des betreffenden Satelliten abhängig .

Im Normalfall ist der erste Term in (200) - die von der Erde auf den Satelliten ausgeübte Gravitationskraft - auch der wichtigste .

Diesen Term müssen wir im folgenden in eine "brauchbare" Form bringen . Dazu definieren wir vorerst :

$$\underline{\underline{\vec{F}_E = - G \cdot \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_{dV}}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3} \cdot dM}} \quad (201a)$$

Diesem Vektor sind in den Koordinatensystemen KS3 , KS4 die folgenden Komponentenmatrizen zugeordnet :

$$\underline{\underline{F_{EBi} | = - G \cdot \int \frac{r_{Bi} | - r_{dVBi} |}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3} \cdot dM}} \quad , \quad i=3,4 \quad (201b)$$

Man erkennt leicht , dass der erste Term in (200) mit (201b) für  $i=3$  übereinstimmt . Beachtet man die Transformationsgleichungen (135) zwischen den Koordinatensystemen KS3 , KS4 , folgt unmittelbar :

$$\underline{\underline{F_{EB_3} | = R(t)^T \cdot F_{EB_4} |}} \quad (201c)$$

$F_{EB_4} |$  lässt sich einfacher berechnen als  $F_{EB_3} |$  , da das KS4 ( siehe (134) ) ein erdfestes System (Starrkörpermodell) ist .

Die im Volumenelement  $dV$  eingeschlossene Masse  $dM$  kann daher mit der - zeitunabhängigen - Dichte  $\rho(r_{dVB_4} |)$  berechnet werden :

$$\underline{dM = \rho(r_{dVB_4} |) \cdot dV} \quad (201d)$$

Anmerkung : An anderer Stelle wird das Symbol "ρ" zur Bezeichnung der Residuen gebraucht ( siehe (5c) ) . Eine Verwechslung ist zu vermeiden ... .

Wir dürfen somit schreiben ( (201d) in (201b) für  $i=4$  ) :

$$\underline{F_{EB_4} | = - G \cdot \int \frac{r_{B_4} | - r_{dVB_4} |}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3} \cdot \rho(r_{dVB_4} |) \cdot dV} \quad (201e)$$

Das Integral (201e) ist über das ganze Volumen des Erdkörpers zu erstrecken . Der Nenner ( im Prinzip unabhängig vom Koordinatensystem ) kann mit den kartesischen Komponenten von  $\vec{r}_{dV}$  im System KS4 wie folgt berechnet werden :

$$\underline{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|^3 = \left( \sum_{i=1}^3 (r_{B_4,i} - r_{dVB_4,i})^2 \right)^{3/2}} \quad (201f)$$

In der Potentialtheorie zeigt man , dass (201e) als Gradient einer (skalaren) Potentialfunktion  $V(r_{B_4} |)$  geschrieben werden kann :

$$\underline{F_{EB_4} | = \text{grad}(V(r_{B_4} |))} \quad (202a)$$

$$\text{Wobei : } (\text{grad}(V))^T := ( \{V\}_{r_{B_4,1}}, \{V\}_{r_{B_4,2}}, \{V\}_{r_{B_4,3}} ) \quad (202b)$$

$$\text{und : } V(r_{B_4} |) := G \cdot \int \frac{\rho(r_{dVB_4} |)}{|\vec{r} - \vec{r}_{dV}|} \cdot dV \quad (202c)$$

Anmerkung : In der Physik wird das Potential meist mit umgekehrtem Vorzeichen definiert ; wir haben uns der Schreibweise der Geodäten angeschlossen .

Wäre nun die Dichte in jedem Punkt des Erdinnern bekannt , wäre die Auswertung der Volumenintegrale (201e) , (202c) ohne Schwierigkeiten möglich . Dies ist aber nicht der Fall . Man sollte nun meinen , dass dann einfach die Dichte  $\rho(r_{dVB_4} |)$

mit den Methoden der dynamischen Satellitengeodäsie bestimmt werden könnte . Es ist aber ein bekanntes Resultat der Potentialtheorie , dass die sogenannte "inverse Aufgabe" ( Bestimmen der Massenverteilung aus Messungen des Potentials im Außenraum der Massenverteilung ) keine eindeutige Lösung besitzt .

Daher muss anders vorgegangen werden : In allen Punkten  $r_{B_4}$  | ausserhalb des Erdkörpers erfüllt die Funktion  $V(r_{B_4} |)$  die

Laplace - Gleichung :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r_{B_4,1}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r_{B_4,2}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r_{B_4,3}^2} = 0 \quad (203a)$$

(203a) kann leicht - von (202c) ausgehend - verifiziert werden . Die Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man harmonische Funktionen . Nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie kann jede harmonische Funktion - insbesondere auch das Potential der Erde  $V$  - nach einem speziellen Satz von harmonischen Funktionen , den Kugelfunktionen , entwickelt werden . Es gibt andere Sätze von Basisfunktionen , die dasselbe leisten wie die Kugelfunktionen ;einfachheitshalber beschränken wir uns auf die letzteren .

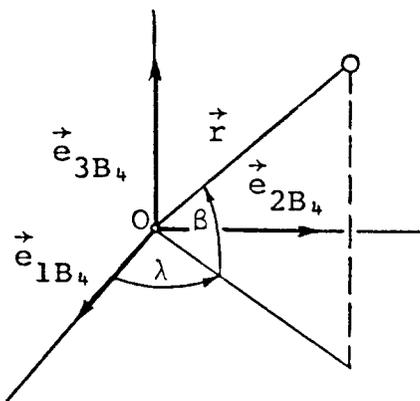
Zu den Kugelfunktionen kommt man auf natürliche Weise , wenn man die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten schreibt und einen Separationsansatz macht . Wir beschränken uns darauf , das Resultat anzugeben ( Herleitung siehe z.B. {A. Heiskanen, H. Moritz, 1967} ) :

$$V(r, \lambda, \beta) = \frac{G \cdot M}{r} \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \beta) \cdot (C_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda)) \right)$$

(203b)

$G \cdot M$  wurde schon in (195) definiert , die Definition von  $r$  (Betrag des geozentrischen Radiusvektors) ,  $\lambda$  ( geozentrische Länge ) und  $\beta$  ( geozentrische Breite ) entnimmt man Figur 10 .

Figur 10



Legende

$\vec{e}_{iB_4}, i=1,2,3$  : Basisvektoren des Systems KS4 .

O : Ursprung von KS4 .

$\vec{r}$  : Geozentrischer Radiusvektor des Satelliten .

$\lambda$  : Geozentrische Länge des Satelliten

$\beta$  : Geozentrische Breite

$r := |\vec{r}|$  : Betrag des Radiusvektors .

Die übrigen Symbole in (203b) schliesslich sind wie folgt definiert :

$a_E$  : Aequatorradius der Erde

$C_{nm}, S_{nm}$  : Koeffizienten der Potentialentwicklung .

$P_n^m(\sin\beta)$  : Zugeordnete Kugelfunktionen :

(203c)

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$$

$n=0,1,2,\dots, m=0,1,\dots,n$

Numerische Werte für einige Potentialterme und für  $a_E$  sind in Kapitel 4.4.2 zu finden .

Diesen Exkurs in die Potentialtheorie zusammenfassend , können wir die Bewegungsgleichungen für einen Satelliten ( siehe (200) ) wie folgt schreiben :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{B_3} |^{(2)} = & R(t)^T \cdot \text{grad}(V(r_{B_4} |)) - G \cdot m_S \cdot \left( \frac{r_{B_3} | - r_{SB_3} |}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} + \frac{r_{SB_3} |}{r_S^3} \right) \\ & - G \cdot m_M \cdot \left( \frac{r_{B_3} | - r_{MB_3} |}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^3} + \frac{r_{MB_3} |}{r_M^3} \right) + \sum_{j=1}^{n_{NG}} K_{jB_3} | \end{aligned}$$

(204)

Dabei muss  $V(..)$  in (204) nach (203b) berechnet werden , wobei in (203b) die obere Grenze " $\infty$ " durch eine endliche Grenze " $n_{\text{grenz}}$ " zu ersetzen ist .

Jeder bei einer Aufgabe beteiligte Bahnbogen  $\vec{r}_\ell(t)$ ,  
 $\ell=1,2,\dots,N$  ( siehe (192) ) lässt sich als Lösung eines  
Differentialgleichungssystems (204) charakterisieren :  
Man hat lediglich in (204)  $r_{Bi}$  zu ersetzen durch  $r_{\ell Bi}$ ,  
 $i=3,4$  .

Die Gesamtheit der so resultierenden Differentialgleichungssysteme für  $\ell=1,2,\dots,N$  bilden das dem Grundgleichungssystem (158) der Himmelsmechanik des Planetensystems entsprechende Grundgleichungssystem der dynamischen Satellitengeodäsie .

(205)

Diese Grundgleichungen der Satellitengeodäsie sind einerseits von komplizierterer Struktur als die Gleichungen (158) , da in (204) zusätzlich Nicht-Gravitationseinflüsse zu beachten sind , und da die Erde nicht als Massenpunkt approximiert werden darf .

Andererseits ist es aber ein nicht zu unterschätzender Vorteil der Grundgleichungen der Satellitengeodäsie gegenüber den entsprechenden Gleichungen des Planetensystems , dass sich die ersteren in jedem Falle in  $N$  Systeme der Art (204) zerlegen lassen , die unabhängig voneinander integriert werden können . Dies ist auch der Grund dafür , dass wir das Grundgleichungssystem der Satellitengeodäsie nicht explizit angegeben haben ; aus demselben Grund werden wir die weiter unten folgenden Ueberlegungen ( betreffend Anfangs- resp. Randbedingungen sowie Variationsgleichungen ) nur für einen durch (204) definierten Bogen anstellen .

Zur Erinnerung : Von den Grundgleichungen (156) oder (158) liessen sich nur die Teilsysteme für die Himmelskörper vernachlässigbarer Masse abspalten und getrennt voneinander integrieren ( siehe Abschnitt "Himmelskörper mit vernachlässigbarer Masse" in Kapitel 3.2 ) .

#### Anfangs- resp. Randbedingungen

Durch (204) allein ist ein Bogen  $\vec{r}(t)$  noch nicht eindeutig definiert . Dazu müssen noch die die Anfangs- resp. Randbedingungen (13a\*,b\*) gegeben sein . Uebertragen auf die Bezeichnungen in diesem Kapitel lauten diese Gleichungen :

a. Formulierung als Anfangswertproblem :

$$r_{B_3}(T_0) |^{(i)} = r_{0iB_3}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1'}) | \quad , \quad i=0,1 \quad * \quad (206a)$$

b. Formulierung als Randwertproblem :

$$r_{B_3}(T_i) | = r_{1iB_3}(c_1, c_2, \dots, c_{n_1'}) | \quad , \quad i=1,2 \quad * \quad (206b)$$

Wir wollen daran erinnern , dass die Parameter  $c_i, i=1,2,\dots,n_1'$  in (206a) und (206b) verschiedene physikalische Bedeutungen haben können und dass ihre Anzahl im allgemeinen sechs sein wird ( siehe dazu auch Kapitel 4.4.2 ) .

### 4.3 DIE ZUGEHÖRIGEN VARIATIONSGLEICHUNGEN

Die dem Primärgleichungssystem (204) für die verschiedenen Parameter zugeordneten Variationssysteme folgen genau nach dem in Kapitel 2.1.5 gegebenen Muster : (204) ist nach jedem der Parameter  $p_\ell, \ell=1,2,\dots,n_p$  zu differenzieren ; zu jedem Index  $\ell$  gehört genau ein Variationsgleichungssystem . (204) kann wie folgt geschrieben werden :

$$\underline{r_{B_3} |^{(2)} = F_{EB_3} | + F_{SB_3} | + F_{MB_3} | + \sum_{j=1}^{n_{NG}} K_{jB_3} | =: f_{B_3} |} \quad (204*)$$

Dabei ist  $F_{EB_3} |$  durch (201c), (202a) und (203b) definiert ( von der Erde ausgeübte Gravitationskraft ) ,  $F_{SB_3} |$  ,  $F_{MB_3} |$  sind die Sonnen- resp. Mondstörungen .

Definiert man ( wie üblich )

$$\underline{z_{\ell B_3} | := \{r_{B_3} | \}_{P_\ell}} \quad , \quad \ell=1,2,\dots,n_p \quad (207a)$$

, kann das Resultat

wie folgt geschrieben werden :

$$\underline{z_{\ell B_3} |^{(2)} = P_{OE} \cdot z_{\ell B_3} | + P_{OS} \cdot z_{\ell B_3} | + P_{OM} \cdot z_{\ell B_3} | + \sum_{j=1}^{n_{NG}} ( P_{ONGj} \cdot z_{\ell B_3} | + P_{INGj} \cdot z_{\ell B_3} |^{(1)} ) + \{f_{B_3} | \}_{P_\ell}} \quad (207)$$

$$\ell = 1,2,\dots,n_p$$

\*) Wir verwenden  $n_1'$  und nicht  $n_1$  , um anzudeuten , dass sich die Gleichungen (206a,b) auf ein Teilsystem (204) und nicht auf das Gesamtsystem (205) beziehen .

Die Terme in (207)

Die Bedeutung der Matrizen  $P_{..}$  folgt aus der allgemeinen Definition (54a) und aus den in (204\*) (siehe Seite 218) verwendeten Bezeichnungen :

a.  $P_{0E}$

Es gilt (siehe (54a)) :

$$\underline{P_{0E,ik}} := \{F_{EB_3,i}\}_{r_{B_3,k}} \quad , \quad i=1,2,3 \quad , \quad k=1,2,3 \quad (207b)$$

Wegen (201c), (203b) sowie (135) folgt :

$$\underline{P_{0E}} = R(t)^T \cdot P_{0E}^* \cdot R(t) \quad (207c)$$

Wobei :

$$\underline{P_{0E,ik}^*} = \frac{\partial^2 V}{\partial r_{B_4,i} \cdot \partial r_{B_4,k}} \quad , \quad i=1,2,3 \quad , \quad k=1,2,3 \quad (207d)$$

b.  $P_{0S} \cdot z_{\ell B_3} |$

Durch Differentiation des zweiten Terms auf der rechten Seite von (204) nach  $p_\ell$  folgt :

$$\underline{P_{0S} \cdot z_{\ell B_3} |} = - G \cdot m_S \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} \cdot \left( z_{\ell B_3} | - 3 \cdot \frac{z_{\ell B_3} \cdot (r_{B_3} | - r_{SB_3} |)}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^2} \cdot (r_{B_3} | - r_{SB_3} |) \right) \quad (207e)$$

c.  $P_{0M} \cdot z_{\ell B_3} |$

Dieser Term folgt aus (207f) , wenn man dort "S" durch "M" ersetzt .

d.  $P_{0NGj} \quad , \quad P_{1NGj} \quad , \quad j=1,2,\dots,n_{NG}$

$$\text{Es gilt : } \underline{P_{1NGj,k_1,k_2}} := \{K_{jB_3,k_1}\}_{r_{B_3,k_2}} \quad (i) \quad (207f)$$

$$k_1=1,2,3 \quad , \quad k_2=1,2,3 \quad , \quad i=0,1 \quad , \quad j=1,2,\dots,n_{NG}$$

e.  $\{f_{B_3} | \}_{p_\ell}$

Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden :

1.  $p_\ell = c_k$  ,  $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$

Dann gilt :  $\{f_{B_3} | \}_{p_\ell} = 0$

2.  $p_\ell = C_{ik}$  oder  $p_\ell = S_{ik}$

Dann gilt :

$$\{f_{B_3} | \}_{p_\ell} = R(t)^T \cdot \text{grad}(\{V\}_{p_\ell})$$

3.  $p_\ell$  ist ein die Drehmatrix  $R(t)$  definierender Parameter . Dann gilt :

(207g)

$$\{f_{B_3} | \}_{p_\ell} = \{R(t)^T\}_{p_\ell} \cdot \text{grad}(V)$$

4.  $p_\ell$  ist ein die  $j$ -te Nicht-Gravitationskraft charakterisierender Parameter .

Dann gilt :

$$\{f_{B_3} | \}_{p_\ell} = \{K_{jB_3} | \}_{p_\ell}$$

Vollständigkeitshalber erinnern wir daran , dass die den Variationssystemen (207) zugeordneten Anfangs- oder Randbedingungen durch Differentiation der Gleichungen (206a,b) nach dem betreffenden Parameter  $p_\ell$  folgen .

#### 4.4 KONKRETE PROBLEMSTELLUNGEN

Wie in Kapitel 3.4 sollen auch hier von allen möglichen Problemstellungen zwei wesentlich verschiedene herausgegriffen und eingehender besprochen werden : die praktische Lösung der ersten Aufgabe ( Bestimmen aller geodynamischen Parameter ) muss des grossen Umfangs wegen den grösseren Institutionen vorbehalten bleiben , Aufgaben der zweiten Art ( erste Bahnbestimmung , Datenaufbereitung ) gehören an jeder Satellitenbeobachtungsstation zur täglichen Routinearbeit . Dass zwischen diesen beiden Aufgaben sehr viele andere Probleme definiert werden können , liegt auf der Hand .

#### 4.4.1 BESTIMMEN "ALLER" GEODYNAMISCHEN PARAMETER

Bei der Lösung dieser Aufgabe müssen insgesamt  $N$  ( siehe (192b) ) Anfangswertaufgaben der Art (204) , (206) gelöst werden ( eine Formulierung als Randwertaufgabe wäre möglich , würde jedoch kaum Vorteile bringen ) , wobei  $n_1^! = 6$  sein wird ( siehe (206a) ) , da hier keine Voraussetzungen über die Anfangsbedingungen gemacht werden dürfen .

Zu bestimmen sind dabei die folgenden Parameter :

1. Pro Bogen sind sechs Parameter vom Typ 1 ( siehe Tabelle 1 ) zu bestimmen . Es gilt also :

$$\underline{n_1 = 6 \cdot N} \quad (208a)$$

2. Alle das Potential  $V(\dots)$  ( siehe (203b) ) definierenden Parameter  $C_{ik}, S_{ik}$  :

$$\left. \begin{array}{l} C_{ik} , i=2,3,\dots,n_{\text{grenz}} , k=0,1,\dots,i *) \\ S_{ik} , i=2,3,\dots,n_{\text{grenz}} , k=1,2,\dots,i *) \end{array} \right\} \quad (208b)$$

Bezeichnet man mit  $n_C$  resp.  $n_S$  die Anzahl der zu bestimmenden Parameter  $C_{ik}$  resp.  $S_{ik}$  , so gilt :

$$n_C = (n_{\text{grenz}} + 1) \cdot (n_{\text{grenz}} + 2) / 2 - 4 \quad (208c)$$

$$n_S = n_{\text{grenz}} \cdot (n_{\text{grenz}} + 1) / 2 - 2 \quad (208d)$$

Anmerkungen : - Im Prinzip wäre es möglich , auch  $G \cdot M$  als Parameter zu bestimmen , falls neben Richtungen auch Distanzen und Distanzdifferenzen beobachtet wurden . Normalerweise wird jedoch  $G \cdot M$  als bekannt angenommen .

- In (203b) tritt noch der Aequatorradius  $a_E$  als Parameter auf . Man überlegt sich aber leicht , dass  $a_E$  mit den Methoden der Satellitengeodäsie nicht zusätzlich zu den Potentialparametern (208b) bestimmt werden kann , da in (203b) lediglich die Produkte  $a_E^n \cdot C_{nm}$  ,  $a_E^n \cdot S_{nm}$  vorkommen .

3. Alle die Nicht-Gravitationskräfte  $\vec{K}_j$  ,  $j=1,2,\dots,n_{NG}$  ( siehe (196a) ) definierenden Parameter .

\*) ausgenommen  $C_{21}, S_{21}$  , die gleich Null sind , da die dritte Achse von KS4 mit der Achse des maximalen Trägheitsmoments der Erde übereinstimmt .

4. "Alle" die Matrix  $R(t)$  definierenden Parameter ( siehe Bemerkungen unten ) .
5. Parameter , die die kartesischen Koordinaten aller Beobachtungsstationen bezüglich des KS4 ( siehe (134) ) eindeutig festlegen .

Diese Parameter treten weder in den Differentialgleichungssystemen (204) noch in den Anfangsbedingungen (206a) auf . Es handelt sich somit um Parameter des Typs 3 in Tabelle 1 . Das bedeutet , dass Variationsgleichungssysteme (207) nur für die ersten vier der hier aufgeführten Parameterarten gelöst werden müssen , oder , anders ausgedrückt , die Lösungen der den Parametern des Typs 3 zugeordneten Variationsgleichungssysteme verschwinden identisch .

#### Bemerkungen zu den Parametern der Matrix $R(t)$

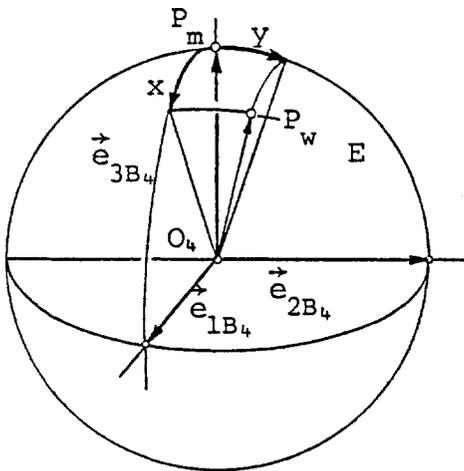
Da die Matrix  $R(t)$  als Produkt der Präzessions- , Nutations- Sternzeit- und Polschwankungsmatrix dargestellt werden kann ( siehe (135a) ) , wäre es im Prinzip möglich , alle Parameter zu bestimmen , die diese vier Matrizen definieren . In Anbetracht der kurzen Bogenlängen ( siehe (192b) ) und der hohen Genauigkeit der fundamental-astronomischen Beobachtungen ist es - wie schon erwähnt - nur sinnvoll , die Parameter der Polschwankungsmatrix mit den Methoden der Satellitengeodäsie zu bestimmen .

Die Polschwankungsmatrix  $X(t)$  kann wie folgt geschrieben werden :

$$X(t) = R_1(y) \cdot R_2(x) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x(t) \\ 0 & 1 & y(t) \\ x(t) & -y(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (209)$$

Die  $R_i(\dots)$  ,  $i=1,2$  sind partikuläre Drehmatrizen um die Winkel  $x$  resp.  $y$  um die Achsen 1 resp. 2 ( siehe (130g) , Definition der den wahren Pol im Koordinatensystem KS4 definierenden Winkel  $x(t)$  ,  $y(t)$  siehe Figur 11 ) .

Figur 11



Legende

- $O_4$  : Ursprung des KS4
- $\vec{e}_{kB_4}, k=1,2,3$  : Basisvektoren des KS4 .
- $P_m$  : mittlerer Pol (1900-1905)
- $P_w$  : wahrer Pol zur Zeit  $t$  .
- $E$  : Einheitskugel
- $x=x(t), y=y(t)$  : "Koordinaten des wahren Pols" .

Will man die Parameter der Polschwankungsmatrix bestimmen , muss man zunächst ein mathematisches Modell für die Polbewegung , also für  $x(t)$  und  $y(t)$  ansetzen .

Nach allem , was man bisher über die Polbewegung weiss , wird man kaum um rein empirische Ansätze herumkommen . Diese Ansätze sind häufig von der folgenden Art :

$$\text{Sei : } T_A := \min_{i=1,2,\dots,N} (T_{Ai})$$

$$T_E := \max_{i=1,2,\dots,N} (T_{Ei})$$

(Bedeutung von  $T_{Ai}, T_{Ei}$  siehe (192b))

$$\Delta T := (T_E - T_A) / m_{\text{pol}} , m_{\text{pol}} \geq 1$$

$$\text{Ansatz für } t \in [T_A + (i-1) \cdot \Delta T, T_A + i \cdot \Delta T] : \tag{210}$$

$$x(t) := x_i(t) = \sum_{k=0}^{q^*} x_{ik} \cdot (t - T_A)^k$$

$$y(t) := y_i(t) = \sum_{k=0}^{q^*} y_{ik} \cdot (t - T_A)^k$$

$$i = 1, 2, \dots, m_{\text{pol}}$$

Die  $x_{ik}, y_{ik}$  ,  $k=0,1,\dots,q^*$  ,  $i=1,2,\dots,m_{\text{pol}}$  sind die bei Verwendung des Modells (210) zu bestimmenden Parameter . Polynomgrad  $q^*$  und Anzahl  $m_{\text{pol}}$  der Teilintervalle müssen "sinnvoll" gewählt werden , wozu - einmal mehr - die Simulationsrechnung das einzige zuverlässige Hilfsmittel darstellt .

Ist  $m_{\text{pol}} > 1$ , dürfte es sinnvoll sein, den Ansatz (210) dahingehend zu modifizieren, dass an den Teilintervallgrenzen  $T_A + i \cdot \Delta T$ ,  $i=1, 2, \dots, m_{\text{pol}} - 1$  Stetigkeit (eventuell Differenzierbarkeit) der Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  verlangt wird.

Bemerkungen zu den Stationskoordinaten im KS4

Seien :  $n_{\text{Stat}}$  : Anzahl der Beobachtungsstationen  
 $\vec{R}_i, i=1, 2, \dots, n_{\text{Stat}}$  : Ortsvektoren der Beobachtungsstationen im KS3 und KS4 .  
 $R_{iBk} |, k=3, k=4, i=1, 2, \dots, n_{\text{Stat}}$  : Komponentenzmatrizen der Vektoren  $\vec{R}_i$  bezüglich der Koordinatensysteme KS3, KS4 . (211)

In Analogie zu (135) gilt :

$$\underline{R_{iB_4} |} = R(t) \cdot \underline{R_{iB_3} |}, \quad \underline{R_{iB_3} |} = R(t)^T \cdot \underline{R_{iB_4} |} \quad i=1, 2, \dots, n_{\text{Stat}} \quad (212)$$

Auf den ersten Blick das Einfachste dürfte es wohl sein, direkt die (zeitunabhängigen) Koordinaten  $R_{iB_4, k}, k=1, 2, 3, i=1, 2, \dots, n_{\text{Stat}}$  als Parameter zu wählen.

Es ist aber bei "benachbarten" Observatorien (Distanzen kleiner als ca. 200 km) sinnvoll, die relativen Positionen als bekannt anzunehmen. Es ist klar, dass sich dabei die Anzahl der Unbekannten vom Typ 3 (Tabelle 1) reduzieren wird.

Vergleicht man die im vorliegenden Kapitel aufgeführten Parameter mit den entsprechenden Größen im Planetensystem (Kapitel 3.4.1), wird ein Unterschied offenbar: die Anzahl der zu bestimmenden Parameter vom Typ 2 (Tabelle 1) ist bei den Aufgaben der Satellitengeodäsie wesentlich grösser. Allein die Anzahl der zu bestimmenden Potentialparameter  $C_{ik}, S_{ik}, i=1, 2, \dots, n_{\text{grenz}}, k=(0), 1, \dots, i$  (siehe (208)) beträgt bei  $n_{\text{grenz}} = 20$  (was bei Aufgabestellungen dieser "umfassenden" Art keineswegs ungewöhnlich ist) 435 (!). Dies ist wahrhaft ein Unterschied zu den wenigen in der klassischen Himmelsmechanik zu bestimmenden Planetenmassen.

Schon aus dieser Tatsache folgt , dass  $N$  , die Anzahl der Bogen ( siehe (192b) ) , gross sein muss ( eine untere Grenze dürfte  $N = 1000$  bilden ) und dass möglichst viele Satelliten mit wesentlich verschiedenen Bahncharakteristiken ( Halbachsen und Neigungen gegen die Erdäquatorebene ) in die Analyse einbezogen werden müssen . Zudem folgt aus Simulationsrechnungen , dass die Bogen eine gewisse Länge ( von der Grössenordnung einiger Tage ) aufweisen müssen , da sonst die höheren Potentialkoeffizienten kaum zu bestimmen sind . Ein weiterer Unterschied zur klassischen Himmelsmechanik wird deutlich , wenn wir die zur Verfügung stehenden Beobachtungsarten in Betracht ziehen :

In der klassischen Himmelsmechanik kommt den Richtungsbeobachtungen noch heute eine dominierende Bedeutung zu . Diese Beobachtungsart hat auch in der Satellitengeodäsie bis Ende der sechziger Jahre die wichtigste Rolle gespielt . Sie wurde aber im folgenden Jahrzehnt von der neuen Beobachtungstechnik der Lasertelemetrie und durch die Messung von Distanzdifferenzen "mit Hilfe" des Dopplereffektes ( siehe Kapitel 2.4.2.2 , 2.4.2.3 ) praktisch verdrängt . Den Richtungen wird aber in Zukunft wiederum erhöhte Bedeutung zukommen , wenn diese nicht mehr auf photographischem , sondern auf elektronischem Weg (mittels Televisionsaufzeichnungen) gemessen werden . Wir haben also heute in der dynamischen Satellitengeodäsie drei Beobachtungsarten von vergleichbarer Bedeutung ( Richtungen , Distanzen , Distanzdifferenzen ) . Daneben gibt es weitere Arten , wie zum Beispiel Altimeterbeobachtungen , die in Spezialuntersuchungen von grosser Bedeutung sind , für die Aufgabestellungen des vorliegenden Kapitels jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen .

In zwei Punkten schliesslich sind die Aufgaben der Satellitengeodäsie einfacher als die entsprechenden Aufgaben der klassischen Himmelsmechanik :

- Das Grundgleichungssystem der Satellitengeodäsie lässt sich - im Gegensatz zum Grundgleichungssystem des Planetensystems - immer in  $N$  Teilsysteme der Dimension 3 zerlegen , die unabhängig voneinander integriert werden können ( siehe (204) , (205) ) .
- In der Satellitengeodäsie stand mit der Atomzeit von allem Anfang an eine ausreichende Näherung für die Newton'sche Zeit zur Verfügung . Die Definition einer der Ephemeridenzeit entsprechenden Zeitbasis erübrigte sich daher in dieser jungen Disziplin .

Bevor wir wie in Kapitel 3.4.1 die möglichen Problemstellungen kurz zusammenfassen , sollen einige Fragen aufgezählt werden , die bei Parameterbestimmungsaufgaben dieser allgemeinen Art in der Satellitengeodäsie unbedingt vor in Angriffnahme der Auswertung beantwortet werden müssen . Einige Fragen haben wir ja bereits beantwortet : das Modell 2 ( siehe (191b) ) haben wir mit dem Starrkörpermodell für die Erde identifiziert , das Erdpotential  $V(..)$  haben wir nach Kugelfunktionen entwickelt . Es bleiben aber auch so noch viele Fragen offen :

- Welche obere Grenze wird in der Potentialentwicklung (203) gewählt ?
- Welche Modelle werden für die Nicht-Gravitationskräfte  $\vec{K}_j, j=1,2,\dots,n_{NG}$  ( siehe (196a) ) angesetzt ?
- Welche Parameter werden aus anderer Quelle übernommen ? ( z.B.  $G \cdot M$  , Mond- , Sonnenmasse , ... ) .
- Die Beobachtungen welcher Observatorien auf der Erdoberfläche werden verarbeitet ?
- Werden für jedes Observatorium die drei kartesischen Koordinaten (bezüglich KS4) als Parameter eingeführt , oder werden die relativen Positionen benachbarter Observatorien als bekannt angenommen ?
- Wird nur eine , oder werden mehrere Beobachtungsarten in derselben Aufgabe verarbeitet ?
- Wie werden die Gewichte der einzelnen Beobachtungen definiert ?

- Werden terrestrische Beobachtungen ( Messungen der Distanzen zwischen Observatorien , Schweremessungen an der Erdoberfläche etc. ) in die Auswertung einbezogen ?
- Werden Zwischensatellitenbeobachtungen verwendet ?

Diese Liste liesse sich noch lange fortsetzen . Für unsere sich auf die Grundzüge beschränkende Diskussion haben wir aber die wichtigsten Punkte erwähnt . Jedenfalls sollte klar geworden sein , dass die Modellwahl in der Satellitengeodäsie sehr viel komplexer ist als in der klassischen Himmelsmechanik . Eine unangenehme Folge der vielen möglichen Varianten in der Aufgabestellung ist die , dass sich häufig die von verschiedenen Institutionen angegebenen Resultate nur schwer miteinander vergleichen lassen .

Damit aber endlich zur Problemdefinition in Stichworten . Wie bei der entsprechenden Definition (165) in der klassischen Himmelsmechanik versuchen wir auch hier , den allen möglichen Fragestellungen gemeinsamen Kern herauszuarbeiten :

Problemdefinition

Bestimmen "aller" geodynamischen Parameter

1. Modellwahl

Es müssen zwei Modelle definiert werden ( siehe (191) ):

- a. Modell für die die Satellitenbahn beeinflussenden Kräfte . Wichtigster Teil : Die von der Erde auf den Satelliten ausgeübte Gravitation . Diese Kraft lässt sich als Gradient eines Potentials darstellen . Dieses Potential kann nach Kugelfunktionen entwickelt werden ( siehe (203b) ) . Die Potentialkoeffizienten sind geodynamisch interessierende Parameter .
- b. Modell für die Bewegung des erdfesten Koordinatensystems KS4 ( siehe (134) ) bezüglich KS3 und für die Positionen der Beobachtungsstationen in KS4 . Am einfachsten wird dieses Modell , wenn die Erde als starrer Körper genähert wird .

(213)<sub>1</sub>

## 2. Parameterwahl

N sei die Anzahl der verwendeten Bogen ( siehe (192b) ).  
Dann müssen  $6 \cdot N$  Parameter vom Typ 1 bestimmt werden .

Am einfachsten wird es sein , diese Parameter den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der Matrizen  $r_{\ell 0 i B_3} |$   
 $i=0,1 , \ell=1,2,\dots,N$  gleichzusetzen ( siehe (206a) ) .

Die Parameter vom Typ 2 folgen aus der Wahl des speziellen Modells . Die geodynamisch wichtigsten Parameter vom Typ 2 sind die das Potential der Erde charakterisierenden Grössen , bei Verwendung des Ansatzes (203b) die  $C_{nm}, S_{nm}, n=2,3,\dots,n_{\text{Grenz}}, m=(0),1,\dots,n$  .

Die Aufgaben der Satellitengeodäsie zeichnen sich gegenüber den Aufgaben der klassischen Himmelsmechanik durch eine grosse Zahl von Parametern vom Typ 2 aus .

Die wichtigsten Parameter vom Typ 3 sind die die Ortsvektoren  $\vec{R}_i , i=1,2,\dots,n_{\text{Stat}}$  definierenden Grössen .

## 3. Beobachtete Funktionen

Die wichtigsten Beobachtungsarten sind Richtungs- , Distanz- und Distanzdifferenzbeobachtungen ( siehe Kapitel 2.4.2 ) . Jeder beobachteten Distanz- resp. Distanzdifferenz entspricht eine , jeder beobachteten Richtung entsprechen zwei beobachtete Funktionen im Sinne von (3) . Die beobachteten Funktionen sind von der folgenden Struktur :

a. Beobachtungen von der Erde aus :

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \psi_j(r_{\ell B_3}(t_j + \Delta t_{j_1}) |, R_{kB_4}(t_j + \Delta t_{j_2}) |)$$

b. Zwischensatellitenbeobachtungen

$$\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = \psi_j(r_{\ell B_3}(t_j + \Delta t_{j_1}) |, r_{kB_3}(t_j + \Delta t_{j_2}) |)$$

Wobei :  $\ell$ : Index des beobachteten Bogens ,

$k$ : Index der Beobachtungsstation ; diese kann ein Satellit(enbogen) sein .

$\Delta t_j$  : Die exakte Bedeutung hängt von der Beobachtungsart ab . Es handelt sich stets um Signallaufzeiten .

$t_j$  : Beobachtungszeit .

(213)<sub>2</sub>

4. Beobachtungen , a priori Schätzungen für die  
mittleren Fehler der Beobachtungen

Gegeben sind die Beobachtungen  $\phi_j^i$  der beobachteten Funktionen  $\phi_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$  sowie Schätzungen für deren Varianzen  $\sigma_j^2, j=1, 2, \dots, n_b$  .

5. Schätzverfahren

Die wahrscheinlichsten Werte für die Parameter erhält man als Lösungen der folgenden Extremalaufgabe ( falls die Beobachtungsfehler Werte von normalverteilten , unabhängigen Zufallszahlen mit Erwartungswerten Null und Varianzen  $\sigma_j^2, j=1, 2, \dots, n_b$  sind ) :

(213)<sub>3</sub>

$$\sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\rho_j(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}))^2 = \text{Min}$$

Wobei :  $g_j := 1/\sigma_j^2, j=1, 2, \dots, n_b$  (213a)

6. Lösungsweg

Dieser ist - je nach Wahl des Abbruchkriteriums - durch Schema (66) oder Schema (67) gegeben .

Bemerkungen zu (213)

- Alle Bemerkungen zur Problemdefinition (165) können sinn- gemäss auf (213) übertragen werden . Insbesondere wollen wir betonen , dass auch bei der Lösung von Aufgaben der Art (213) die Verwendung von verschiedenen Beobachtungs- arten - bei Verwendung der Gewichtung (213a) - keine Proble- me bietet .
- Bei Parameterbestimmungsaufgaben (213) treten sehr viele mathematisch reizvolle Teilprobleme ( z.B. Inversion von Matrizen grosser Dimension  $d > 1000$  ) auf , die wir aber in dieser Uebersicht unmöglich behandeln können .
- Probleme der Art (213) wurden und werden von verschiedenen grossen Institutionen behandelt . Lange Zeit hatten die vom Smithsonian Astrophysical Observatory ( SAO ) heraus-

gegebenen "Standard Earths" - im Moment ist die Zählung bei Nummer VI angelangt - praktisch eine Monopolstellung ( siehe z.B. {C.A. Lundquist, G. Veis, 1966} , {E.M. Goposchkin, 1973} ) .

Ein interessantes Detail : Die Differentialgleichungssysteme (204) werden bei SAO nicht numerisch , sondern analytisch gelöst .

Erwähnen wollen wir weiter die vom Goddard Space Flight Center publizierte GEMs (Goddard Earth Models) ( die Modelle GEM 9 und GEM 10 sind unter {F.J. Lerch et al., 1979} beschrieben ) , sowie die vom französischen Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) in Zusammenarbeit mit dem deutschen Sonderforschungsbereich 78 berechneten GRIM - Modelle ( Beschreibung von GRIM 2 siehe {G. Balmino, 1977} ) .

- Bemerkenswert ist die Tatsache , dass bei den neueren Modellen ( beispielsweise bei GEM 10 ) zusätzlich zu den Satellitenbeobachtungen terrestrische Messungen der Schwereanomalien sowie Altimeterbeobachtungen des Satelliten GEOS-3 zur Bestimmung der Koeffizienten des Erdpotentials verwendet wurden .

#### 4.4.2 ERSTE BAHNBESTIMMUNG , DATENAUFBEREITUNG

Es ist bemerkenswert , dass das Problem der Bestimmung einer ersten Bahn eines künstlichen Erdsatelliten nie dieselbe Bedeutung erlangt hat wie die entsprechende Aufgabe im Planetensystem .

Das mag zunächst damit zusammenhängen , dass die Satelliten künstlich sind , dass daher für deren Bahndaten schon vor der Beobachtung sehr gute Näherungen bekannt sind . Dies gilt jedenfalls für die Bahnelemente der zu wissenschaftlichen Zwecken beobachteten Satelliten , die ja ausschliesslich auf Grund von laufend verbesserten sogenannten Prognosen beobachtet werden .

Weiter spielen die Störungen ( vorab die durch die Erdabplattung verursachten ) vergleichsweise eine viel wichtigere

Rolle als in der Himmelsmechanik des Planetensystems , sodass die Formulierung einer "Bahnbestimmungsaufgabe ohne Störungen" wenig sinnvoll erscheint . Zwei weitere wichtige Unterschiede bestehen darin , dass in der Satellitengeodäsie nicht wie in der klassischen Himmelsmechanik vor dem Raumfahrtzeitalter ausschliesslich Richtungen beobachtet werden , und dass der in der klassischen Bahnbestimmungstheorie so wichtige Spezialfall "Anzahl der Unbekannten = Anzahl der Beobachtungen (im Sinne von (3))" praktisch bedeutungslos ist , da schon die von einer einzigen Station während eines Durchgangs des Satelliten über der Station ( dies entspricht der Opposition eines Kleinplaneten ) gewonnenen Beobachtungen die Bahnbestimmungsaufgabe im allgemeinen wesentlich überbestimmen .

Aus diesen Gründen war es nicht möglich , die klassischen - auf Gauss und Lagrange zurückgehenden - Bahnbestimmungsverfahren mehr oder minder unverändert zu übernehmen . Da zudem zu Beginn der Satellitenära nur wenige Satelliten mit gut bekannten Bahndaten die Erde umkreisten , schien für "erste Bahnbestimmungsaufgaben" auch kein Bedürfnis zu bestehen . Die folgenden Ueberlegungen veranlassen uns dazu , dieser Aufgabe in der vorliegenden Arbeit trotzdem eine gewisse Beachtung zu schenken :

- Es gibt heute unzählige künstliche Erdsatelliten , für die keine oder nur sehr ungenaue Bahndaten bekannt sind ( man denke nur an die vielen Nachrichtensatelliten , militärischen Satelliten , "ehemaligen" Forschungssatelliten ) . Das Bedürfnis nach schneller Identifikation solcher "unbekannter Flugobjekte" ist daher heute durchaus vorhanden .
- Der Bahnbestimmungsaufgabe kommt bei der Beobachtung von Satelliten zu wissenschaftlichen Zwecken ( Laser- oder Dopplerbeobachtungen ) eine grosse Bedeutung zu : Es ist nämlich für jede Beobachtungsstation wichtig , die Qualität ihrer Beobachtungen selbst abzuschätzen . Dazu ist es nötig , die Beobachtungen irgendwie darzustellen ( in der wissenschaftlichen Vulgärsprache nennt man diesen Prozess auch "Data-fitting" ) . Präziser : die Beobachtungen werden

als Funktionswerte einer Funktion der Zeit  $t$  interpretiert, deren Parameter so bestimmt werden, dass die Residuenquadratsumme minimal wird. Sehr beliebt waren in diesem Zusammenhang (einmal mehr) Polynome als approximierende Funktionen (mit den Polynomkoeffizienten als unbekanntem Parametern). Die korrekteste Art, diese Aufgaben zu lösen, besteht aber unzweifelhaft darin, die Beobachtungen als Funktionen eines Bahn Bogens darzustellen, der durch (maximal) sechs Parameter charakterisiert wird. Man erkennt unschwer, dass eine solche Aufgabe im Kern mit einer ersten Bahnbestimmung identisch ist. Diese Auffassung von "Data-fitting" scheint sich langsam durchzusetzen (siehe z.B. {Wakker, Ambrosius, 1981}).

Im Gegensatz zu den klassischen Bahnbestimmungsverfahren nach Gauss und Laplace lassen sich die auf den Blockschemen (66) oder (67) aufbauenden Verfahren ohne nennenswerte Schwierigkeiten auf die Probleme der Satellitengeodäsie anwenden:

- Die Verwendung von "beliebig vielen" Beobachtungen ist ohne weiteres möglich.
- Die Berücksichtigung von Störungen bedeutet lediglich, dass in Block D1 (Schema (66) oder (67)) an Stelle von (171) ein komplizierteres Differentialgleichungssystem der Art (204) zu lösen ist. Löst man die Differentialgleichungssysteme durch numerische Integration, besteht der Unterschied "nur" in einem grösseren numerischen Rechenaufwand.
- Auch die Verwendung von verschiedenartigen Beobachtungen ist einfach: In Block D6 resp. Block D6\* in (66) resp. (67) hat man einfach die Fehlergleichungen (141) für die Richtungsbeobachtungen zu ersetzen durch die entsprechenden Gleichungen für Laserbeobachtungen (146) resp. für Dopplerbeobachtungen (148).

Bevor wir dieses Kapitel - und damit die ganze Arbeit - mit zwei Beispielen für solche Bahnbestimmungsaufgaben aus der Satellitengeodäsie abschliessen, wollen wir die Aufgabestel-

lung präzisieren :

Wie bei jeder reinen Bahnbestimmungsaufgabe geht es auch in der Satellitengeodäsie darum , eine Bahn ( genauer den Bahnbogen zwischen  $T_A$  und  $T_E$  , siehe (192b) ) eines Satelliten in einem vorgegebenen Kräftefeld zu bestimmen . Man nimmt bei der Bahnbestimmungsaufgabe in der Satellitengeodäsie also an , dass sämtliche das Differentialgleichungssystem (204) definierenden Parameter vom Typ 2 (Tabelle 1) bekannt sind . Zudem werden die Koordinaten (211) der beobachtenden Station(en) als bekannt angenommen .

Es ist plausibel , dass in (204) umso mehr Störterme berücksichtigt werden müssen , je länger die zu bestimmenden Bogen ( siehe (192) ) sind . Wir vereinfachen uns die Aufgabe beträchtlich durch die folgende Annahme :

Annahme : Die maximal zulässige Bogenlänge bei der Bahnbestimmungsaufgabe in der Satellitengeodäsie betrage  $1/3 \cdot U$  , wobei  $U$  die Umlaufzeit des Satelliten um die Erde sei .

(214)

(214) stellt natürlich eine willkürliche Einschränkung dar . Immerhin werden dadurch - meines Erachtens - die wichtigsten Spezialaufgaben ( erste Bahnbestimmung aus Beobachtungen über einer Station ( einem Land ) während eines Durchgangs , Datenbeurteilung bei Laser/Doppler-Beobachtungen aus den Beobachtungen eines Durchganges ) erfasst .

Unter der Annahme (214) können in (204) die Störungen von Sonne und Mond sowie sämtliche Nicht-Gravitationskräfte vernachlässigt werden ; zudem dürfte es in den meisten Fällen ausreichen , bei der Entwicklung (203b) des Erdpotentials nur den grössten Term  $C_{20}$  ( Abplattung ) zu berücksichtigen . Garantiert ausreichend ist eine Entwicklung bis und mit  $n_{\text{grenz}}=4$  in (203b) . ( Das einfachste und wirkungsvollste Mittel für die Festlegung von  $n_{\text{grenz}}$  bei speziellen Satelliten besteht in der Simulationsrechnung ) .

Die folgenden , das Potential  $V$  definierenden Parameter sind identisch mit den Parametern des Modells GEM 10 ( siehe

{F.J. Lerch et al., 1979} ) :

$$\begin{aligned}
 G \cdot M &= 398.60047 \text{ Mm}^3/\text{ksec}^2 \text{ (vgl. (195) )} \\
 a_E &= 6.378140 \text{ Mm} \\
 C_{20} &= -1082.627 \cdot 10^{-6} \\
 C_{22} &= 1.571 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{22} = -0.903 \cdot 10^{-6} \\
 C_{30} &= 2.536 \cdot 10^{-6} \\
 C_{31} &= 2.191 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{31} = 0.272 \cdot 10^{-6} \\
 C_{32} &= 0.305 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{32} = -0.213 \cdot 10^{-6} \\
 C_{33} &= 0.098 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{33} = 0.197 \cdot 10^{-6} \\
 C_{40} &= 1.623 \cdot 10^{-6} \\
 C_{41} &= -0.508 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{41} = -0.445 \cdot 10^{-6} \\
 C_{42} &= 0.079 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{42} = 0.148 \cdot 10^{-6} \\
 C_{43} &= 0.059 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{43} = -0.012 \cdot 10^{-6} \\
 C_{44} &= -0.004 \cdot 10^{-6} \quad , \quad S_{44} = 0.006 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}
 \tag{215}$$

Anmerkungen : - In der zitierten Arbeit von Lerch et al. werden die Werte für die vollständig normierten Koeffizienten gegeben , die Werte (215) beziehen sich jedoch auf die Definition (203c) .

- Lerch berechnet ( zu Kontrollzwecken ? ) zusätzlich die Koeffizienten  $C_{21}$  ,  $S_{21}$  , die hier als Null angenommen werden .

- Gegenüber Lerch haben wir uns hier mit einer kleineren Anzahl von Dezimalstellen für die Koeffizienten begnügt .

Die den Satellitenbogen  $\vec{r}(t)$  zugeordneten Komponentenmatrizen  $r_{B_3}(t)$  können somit bei den Bahnbestimmungsaufgaben der Satellitengeodäsie als Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems dargestellt werden :

$$\underline{r_{B_3} |^{(2)}} = R(t)^T \cdot \text{grad}(V(r_{B_4} |)) \tag{216}$$

Dabei ist das Potential  $V(..)$  im Wesentlichen durch (203b) ( " ∞ " durch " 4 " ersetzen ) und durch (215) gegeben , wobei

man meistens alle  $C_{nm}, S_{nm}$  mit Ausnahme von  $C_{20}$  vernachlässigen darf .

Selbstverständlich wird nicht nur  $V(..)$  sondern auch  $R(t)$  in (216) als bekannt angenommen . Dabei ist es in den meisten Fällen erlaubt ,  $R(t)$  wie folgt zu approximieren :

$$\begin{aligned} & \text{Für } t \in [T_A, T_E] \text{ ( siehe (192b) ) gelte :} \\ & R(t) := \theta(t) \cdot N(t_M) \cdot P(t_M) , \quad t_M := (t_A + t_E) / 2 \end{aligned} \quad (217)$$

Bei so kurzen Bogen (siehe (214)) ist es nicht nötig , die Präzessions- und Nutationsmatrizen zu jedem Zeitpunkt  $t$  neu zu berechnen . Zudem darf man bei den meisten Anwendungen die Polschwankungsmatrix  $X(t)$  als Einheitsmatrix nähern ( siehe (209) ) .

Durch das Differentialgleichungssystem (216) allein ist ein Bahnbogen noch nicht eindeutig bestimmt dazu müssen noch Anfangs- oder Randbedingungen ( siehe (206a,b) ) definiert werden . Die in (206a) oder (206b) auftretenden Parameter  $c_i, i=1,2,\dots,n'_1$  ,  $n'_1 \leq 6$  sind die bei den Bahnbestimmungsaufgaben der Satellitengeodäsie zu bestimmenden Parameter .

Fassen wir zusammen :

### Problemstellung

#### Bahnbestimmungsaufgaben in der Satellitengeodäsie

##### 1. Voraussetzungen

1. Die Bogenlängen seien durch (214) limitiert .
2. Die den Bogen  $\vec{r}(t)$  zugeordneten Komponentenmatrizen  $r_{B_3}(t)$  seien partikuläre Lösungen des Differentialgleichungssystems (216) , wobei für  $V(..)$  maximal eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 4 angesetzt wird ; die Parameter der Entwicklung sind durch (215) gegeben .
3. Die geozentrischen Koordinaten  $R_{iB_4}$  ,  $i=1,2,\dots, n_{Stat}$  der beobachtenden Station(en) sowie die Drehmatrizen  $R(t)$  sind bekannt ( siehe (211) ) .

(218)<sub>1</sub>

## 2. Parameterwahl

Die Bahnbestimmungsaufgaben können als Anfangs- oder als Randwertaufgaben gestellt werden . Die entsprechenden Bedingungsgleichungen sind durch (206a) oder (206b) gegeben . Die Parameter  $c_i$  ,  $i=1,2,\dots,n'_1$  ,  $n'_1 \leq 6$  können wie in der klassischen Himmelsmechanik auf die verschiedensten Arten gewählt werden . Im allgemeinen ist man bestrebt , diese Parameter so zu wählen , dass die Initialisierung ( Block B/B\* in Schema (66)/(67) ) möglichst einfach wird .

## 3. Beobachtete Funktionen

Zugelassen sind Richtungs-, Laser- und Dopplerbeobachtungen . Die diesen Beobachtungsarten entsprechenden Fehlergleichungen sind durch (141) , (146) und (148) gegeben .

## 4. Beobachtungen , a priori Varianzen

Gegeben sind die Beobachtungen  $\phi_j^!$  der Funktionen  $\phi_j(c_1, c_2, \dots, c_{n'_1})$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  .

Werden in einer Bahnbestimmungsaufgabe verschiedene Beobachtungsarten und/oder die Beobachtungen verschiedener Stationen verwendet , müssen zusätzlich Schätzungen für die Varianzen  $\sigma_j^2$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  gegeben sein .

## 5. Schätzverfahren

Unter denselben statistischen Voraussetzungen wie in (213) erhält man den wahrscheinlichsten Parametersatz als Lösung der folgenden Extremalaufgabe :

$$\sum_{j=1}^{n_b} g_j \cdot (\rho_j(c_1, c_2, \dots, c_{n'_1}))^2 = \text{Min} .$$

Wobei :  $g_j := 1$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  , falls nur Beobachtungen eines Typs und einer Station verwendet wurden .

$g_j := 1/\sigma_j^2$  ,  $j=1,2,\dots,n_b$  , falls mehrere Beobachtungsarten und/oder die Beobachtungen verschiedener Stationen verwendet werden .

(218)<sub>2</sub>

6. Lösungsmethode

Diese ist - je nach Wahl des Abbruchkriteriums -  
durch Schema (66) oder (67) gegeben .

(218)<sub>3</sub>

Bemerkungen zu (218)

- Es ist also ohne weiteres möglich , die Bahnbestimmungsaufgaben so zu formulieren , dass beliebige Beobachtungsarten und die Beobachtungen beliebiger Stationen miteinander verarbeitet werden .

Im allgemeinen ist es sogar so , dass die heikelste Teilaufgabe , die Initialisierung ( Block B/B\* in (66), (67) ) , einfacher ist , wenn verschiedene Beobachtungsarten resp. Stationen beteiligt sind .

- Werden nur Beobachtungen einer Art und einer Station verwendet , können die Gewichte alle gleich 1 gesetzt werden ( siehe (218) , 5. ) . Die unter dieser Annahme berechnete Varianz ( siehe (34) , Kapitel 2.1.4 ) ist die objektivste Schätzung für die in folgenden Analysen der Art (213) benötigten a priori Schätzwerte für die Varianzen der Beobachtungen des betreffenden Instrumentes .
- Es wäre durchaus möglich ein einziges , alle verschiedenen Problemarten einschliessendes Bahnbestimmungsprogramm zu schreiben . Man muss sich aber darüber im klaren sein , dass ein solches Programm eine relativ komplexe Logik haben wird , und somit recht umfangreich sein wird . Ob ein solches Programm sinnvoll ist , hängt vor allem von den zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten ab . Steht - wie in Zimmerwald - "nur" ein Kleincomputersystem zur Verfügung , ist es sinnvoller , für verschiedene Spezialaufgaben verschiedene Programme zu schreiben .

Zwei solche für die Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald entwickelte Spezialprogramme sollen zum Abschluss vorgestellt werden :

Beispiel 11 : Bestimmung einer ersten Satellitenbahn unter Berücksichtigung von Störungen mit Hilfe von Richtungsbeobachtungen

---

Im folgenden soll ein für die Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald in Entwicklung begriffenes Programmsystem in groben Umrissen beschrieben werden :

1. Historisches

Das Observatorium Zimmerwald des astronomischen Institutes der Universität Bern war von Anfang an als Beobachtungsstation an der Lösung von Aufgaben der Satellitengeodäsie beteiligt .

Zu Beginn ( 1964 - 1970 ) wurden ausschliesslich Richtungen zu künstlichen Erdsatelliten gemessen : Beobachtet wurden die aktiven Satelliten GEOS 1,2,3 ( genauer die von diesen Satelliten erzeugten kurzen Lichtblitze ) sowie die Spuren von passiven Satelliten wie ECHO I,II und PAGEOS .

Als Instrument diente die Schmidt-Kamera des Observatoriums Zimmerwald ( Brennweite = 104 cm , Durchmesser des Hauptspiegels = 62 cm , freie Oeffnung der Korrekturlinse = 39 cm ) . Im Laufe der Zeit hat es sich gezeigt , dass die mit diesem Instrument gewonnenen Richtungen im internationalen Vergleich sehr gut "abschnitten" - dies obwohl zu Beginn wegen der Verwendung von (deformierbaren) Filmen an Stelle von Platten und wegen der Auswertemethode (astrometrische Methode) von einigen Fachleuten Bedenken geäussert wurden ( mehr dazu siehe {M. Schürer,1966} ) .

Gegen Ende der sechziger Jahre wurde beschlossen , in Zusammenarbeit mit dem Institut für angewandte Physik Bern ein Laser-Telemetrie-System zu bauen ( Rubin-Rieserpuls-Laser mit Pulsen von ca. 30 nsec Länge und einer Energie von ca. 1 - 5 Joules ) .

Dieses Laser-System wurde auf das bestehende astronomische Instrument \*) montiert . Als Empfangsfernrohr für das am Satelliten reflektierte Laserlicht diente dabei das Cassegrain-Teleskop . Erste erfolgreiche Versuche wurden mit diesem Versuchsaufbau im Jahre 1971 während der ISAGEX-Beobachtungskampagne unternommen . Es stellte sich aber bald einmal heraus , dass mit dieser Anordnung an ein routinemässiges Beobachten nicht zu denken war , da pro Durchgang eines Satelliten über der Station höchstens eine Distanz gemessen werden konnte ( das Instrument ist siderisch nachgeführt , das genaue Einrichten auf eine neue Position ist recht zeitintensiv ) .

Auf Grund dieser Erfahrungen wurde mit der Planung und dem Bau einer Satellitenbeobachtungsstation unmittelbar neben dem astronomischen Observatorium in Zimmerwald begonnen . Fertiggestellt wurde der Bau 1976 ( Beschreibung des damaligen Zustands siehe {W. Lüthi,1975} ) , erste erfolgreiche Messungen gelangen 1978 ( siehe {P. Klöckler et al.,1978} ) .

2. Instrumentelle Voraussetzungen

Das Instrument der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald vereinigt drei Instrumente auf einer einzigen (azimutalen) Montierung :

1. Sendefernrohr
2. Empfangsfernrohr
3. Nachführungsfernrohr

---

\*) Das astronomische Instrument besteht aus zwei Teleskopen , der erwähnten Schmidt-Kamera und einem Cassegrain-Spiegelteleskop , die zusammen auf einer deutschen Kniemontierung aufgebaut sind ( siehe {M. Schürer,1966} ) .

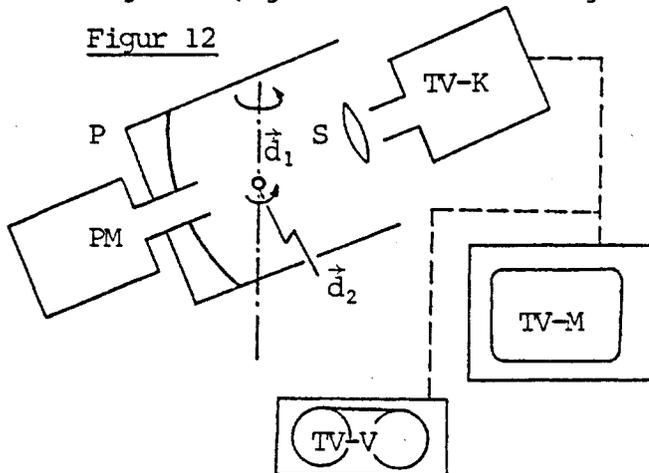
Das Sendefernrohr dient dazu , die vom Laser erzeugten Lichtblitze mit möglichst kleiner Strahldivergenz in Richtung zum Satelliten zu schicken ( Es wird uns im folgenden nicht weiter interessieren ) .

Mit dem Empfangsfernrohr soll ein möglichst grosser Prozentsatz des vom Laser erzeugten , am Satelliten reflektierten Lichtblitzes aufgefangen und mit einem Photomultiplier detektiert werden .

Das Nachführungsteleskop schliesslich dient dazu , Satellit und Hintergrundsterne auf einen TV-Monitor zu "projizieren" .

Empfangsfernrohr und Nachführungsfernrohr benützen denselben (sphärischen) Hauptspiegel . Aufbau von Empfangs- und Nachführungsteleskop siehe Figur 12 , genauere Beschreibung siehe {I. Bauersima,1978} ) .

Figur 12



Legende

$\vec{d}_1$  : Vertikale Drehachse

$\vec{d}_2$  : Horizontale Drehachse

Wichtigste Komponenten von Empfangs- und Nachführungsteleskop :

P : Primärspiegel ( 54 cm Durchmesser )

S : Sekundäroptik

TV-K : Fernsehkamera

TV-M : " monitor

TV-V : " videobandstation .

PM: Photomultiplier .

P,S und PM bilden zusammen das Empfangsteleskop , P,S,TV-K,TV-M und TV-V bilden zusammen das Nachführungsteleskop .

Die vorderste Linse der Sekundäroptik S ist mit einem Filter versehen , welches das Licht der Wellenlänge des Laserlichts reflektiert und durch den (in der Mitte durchbohrten) Primärspiegel P in den Photomultiplier PM wirft .

Das Licht aller übrigen Wellenlängen tritt durch die Sekundäroptik S und wird auf auf die Photokathode der Kamera TV-K geworfen . Das Fernsehbild kann nun mit dem Monitor TV-M betrachtet und - falls gewünscht - auf Videoband aufgezeichnet werden .

Bei den Laserbeobachtungen hat das Nachführungsteleskop nur überwachende Funktion : Falls die mit dem in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Rechner via Winkelgeber gesteuerte Nachführung des Teleskops nicht genau genug ist ( Satellit nicht im Zentrum des Monitors ) , kann der Operator diesen "Schaden" manuell beheben .

Damit aber wird die im Fernsehbild vorhandene Information bei weitem nicht ausgeschöpft : Es ist nämlich möglich , die Richtungen zum beobachteten Satelliten zu bestimmten Zeiten zu messen . Zwei verschiedene Möglichkeiten sollen erwähnt werden :

1. Man kann die Winkelgeber der beiden Drehachsen zu den gewünschten Zeiten ablesen und in computer-gerechter Form abspeichern . Als Beobachtungen erhält man also Azimut und Höhe des Satelliten zu bestimmten Zeiten . Diese Methode der Richtungsmessung ist naturgemäss nicht sehr genau ( limitiert wird die Genauigkeit primär durch die mechanische Konstruktion , beim Zimmerwalder Instrument liegt die Genauigkeit dieser Ablesungen bei ca. 10" - 30" ) .

2. Im Idealfall befindet sich das Bild des beobachteten Satelliten während der Zeit seines Durchganges über der Station stets ungefähr in der Mitte des TV-Monitors , während im Hintergrund Sterne vorbeiziehen . An dieser Stelle müssen zwei technische Spezifikationen erwähnt werden :
- Auf dem TV-Monitor ist ein Himmelsausschnitt von  $1/2^0 \times 2/3^0$  sichtbar .
  - Mit der in Zimmerwald verwendeten TV-Kamera vom Typ JAI-741-ISIT ( siehe {P. Klöckler et al., 1978} ) können bei normalen Verhältnissen ( keine Wolken , kein Vollmond ) ohne Schwierigkeiten Sterne bis zur fünfzehnten Grössenklasse beobachtet werden .
- Damit aber steht fest , dass während des Durchgangs alle Sterne der genauesten Sternkataloge (FK4 , AGK3 , siehe {FK4} , {AGK3} ) auch bei ungünstigen Bedingungen problemlos beobachtet werden können . Daher ist es auch möglich , nach dem Durchgang die relativen Positionen Satellit  $\longleftrightarrow$  Katalogsterne auf einer Video - Aufzeichnung mit einer Genauigkeit auszumessen , die nur vom Auflösungsvermögen des optischen Systems abhängt , beim Zimmerwalder Instrument dürfte die erreichbare Genauigkeit bei rund 0"5 bis 1"0 liegen ) . Sind nun zu einem bestimmten Zeitpunkt einige (4 bis 10) Katalogsterne auf dem Monitor vorhanden , lässt sich das Monitorbild analog wie eine photographische Aufnahme auswerten : als Resultat erhält man die Richtung von der Station zum Satelliten zum betreffenden Zeitpunkt mit einer hohen Genauigkeit .

Unbefriedigend an dieser Methode ist , dass - in Anbetracht des kleinen auf dem Monitor sichtbaren Himmelsausschnittes ( siehe oben ) - pro Durchgang längst nicht zu jedem Zeitpunkt genügend Sterne auf dem Monitor sichtbar sind , um Richtungen nach der angedeuteten Methode zu messen . Eine Verbesserung dieser Situation ist durch eine Verallgemeinerung zu erreichen , auf die in "5. Zukünftige Entwicklungen" kurz eingegangen werden soll .

Fassen wir zusammen :

Richtungen können auf zwei verschiedene Arten gemessen werden : Die erste Art (Winkelgeberablesungen) ist sehr schnell ("on-line") dafür aber - bei dem in Zimmerwald aufgestellten Instrument - nicht sehr genau (0!2 bis 0!5) . Diese Genauigkeit ist natürlich für wissenschaftliche Zielsetzungen uninteressant , die Messungen eignen sich aber als Test-Messungen für das zu beschreibende Bahnbestimmungsprogramm . Die zweite Art Richtungen zu messen verspricht eine viel höhere Genauigkeit , ist aber mit einem wesentlich grösseren Arbeitsaufwand verbunden ( Ausmessen von Videobändern nach dem Durchgang ) ; an eine "on-line" Auswertung ist mit dem in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Kleincomputersystem jedenfalls nicht zu denken .

### 3. Ziel und Zweck des Bahnbestimmungsprogramms

Bevor wir auf das im Titel angegebene Thema eingehen , scheinen einige Bemerkungen zur Bedeutung der Richtungsbeobachtungen angezeigt :

Richtungsbeobachtungen sind in der Satellitengeodäsie mit dem Aufkommen der Laser- und Dopplerbeobachtungen fast völlig verdrängt worden . Dies vor allem aus den beiden folgenden Gründen :

1. Der Arbeitsaufwand bei der Reduktion von Richtungsbeobachtungen ist wesentlich grösser als bei den andern beiden Beobachtungsarten .
2. Eine einfache Ueberlegung scheint zu zeigen , dass die Laserbeobachtungen viel genauer als die Richtungsbeobachtungen sind :

Nimmt man an , dass eine Richtung mit einer Genauigkeit von  $0.5$  gemessen wurde , entspricht dies in einer Distanz von  $2000$  km ( ein realistischer Wert für Satelliten wie Starlette , Geos-C ) einem linearen Fehler von rund  $10$  m . Die Laser der dritten Generation aber messen die Distanzen zu diesen Satelliten mit einer Genauigkeit von  $5$  cm !

Daraus scheint nun zu folgen , dass die Laser-Beobachtungen den Richtungsbeobachtungen um mehr als zwei Zehnerpotenzen überlegen sind .

Dabei vergisst man die Tatsache , dass bei den Richtungsbeobachtungen der geometrische Ort für die Position des Satelliten zur Beobachtungszeit (minus Lichtlaufzeit) eine Gerade , also ein eindimensionales Gebilde , bei Laser-(und Doppler-) beobachtungen hingegen ein zweidimensionales Gebilde - bei Distanzbeobachtungen eine Kugel - ist . Dieser Vergleich ist daher grundfalsch , "dafür" aber kaum auszurotten !

Die einzige Möglichkeit , den Wert verschiedener Beobachtungsarten bezüglich einer wohldefinierten Aufgabe gegeneinander abzuwägen , besteht darin , die unbekannten Parameter der Aufgabe mit den Beobachtungen der verschiedenen Arten getrennt zu berechnen und anschliessend die mittleren Fehler der bestimmten Parameter miteinander zu vergleichen . Dass die Resultate einer solchen Untersuchung nicht a priori feststehen (d.h. zu Gunsten der Distanzbeobachtungen mit Lasern sprechen) wird offensichtlich , wenn man versucht , aus Beobachtungen einer einzigen Station eine erste Bahn zu bestimmen : Hat man Richtungsbeobachtungen zur Verfügung , ist die Aufgabe ohne Schwierigkeiten zu lösen , geht man von "sehr genauen" Distanzbeobachtungen einer einzigen Station aus , treten Probleme auf ( siehe dazu auch Beispiel 12 ) .

Dass Richtungsbeobachtungen auch aus rein theoretischen Ueberlegungen von grosser Bedeutung sind , wurde an unserem Institut immer wieder betont ( siehe {I. Bauersima,1978,Kap.3.3.7} ) :

"Die astrographischen Richtungsbeobachtungen bleiben ... aktuell . Denn sie bieten ja die einzig objektive Möglichkeit , das Erdmodell mit der ihm entsprechenden Satellitenbahn in einem Inertialsystem dynamisch zu konfrontieren . Eine solche Konfrontation ist bei der dynamischen Auswertung der Entfernungs- oder Dopplerbeobachtungen prinzipiell unmöglich . Bei den Richtungsbeobachtungen wird nämlich das Inertialsystem durch das wohlbekannte und von der Theorie her relativ problemlose Modell der Fixsternpositionen realisiert . Bei der dynamischen Auswertung hingegen wird ein "Modell-Inertialsystem" zum Inertialsystem "in natura" deklariert . "

Aus diesen Gründen wird in Zimmerwald konsequent daran gearbeitet , die Richtungen zu den Satelliten (oder zu andern Himmelskörpern) mit Hilfe des TV-Systems zu messen . Einschränkend muss allerdings gesagt werden , dass das Instrument der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald nicht für solche Zielsetzungen gebaut wurde ; die instrumentellen Gegebenheiten weisen daher Versuchscharakter auf .

Es ist unmöglich , an dieser Stelle auf technische Einzelheiten einzugehen - bis zur zufriedenstellenden Realisierung von Richtungsbeobachtungen mit dem TV-System ist sowieso noch ein weiter Weg zu gehen . Wir nehmen daher für das folgende an , dass zu gewissen (Beobachtungs-)Zeiten  $t_j$  ,  $j=1,2,\dots,n_r$  Richtungen von der Station zum Satelliten im Sinne vom Kapitel 2.4.2.1 gegeben sind ( Verallgemeinerungen siehe " 5. Zukünftige Entwicklungen " ) .

Nach dieser langen Vorgeschichte wenden wir uns endlich dem zu besprechenden Bahnbestimmungsprogramm zu :

Es handelt sich um das erste in einer Reihe von drei Bahnbestimmungsprogrammen realisierte Projekt und trägt den Namen WINGEB . Wie schon sein Name sagt , soll es primär dazu dienen , Bahnen mit Hilfe von Winkelgeberablesungen ( Richtungsbeobachtungen erster Art , siehe Seite 239 unten ) zu bestimmen .

Die Bahnbestimmung soll möglichst schnell und möglichst hypothesenfrei erfolgen . Dabei wird die resultierende Bahn - in Anbetracht der bescheidenen Beobachtungsgenauigkeit und in Anbetracht der kurzen Bogen ( siehe (214) ) nicht sehr genau bestimmt sein .

Mit WINGEB können tatsächliche oder simulierte Beobachtungen verarbeitet werden :

Werden tatsächliche Beobachtungen verwendet , dient WINGEB als schnelles Identifikationsprogramm für die beobachteten Satelliten .

Mit simulierten Beobachtungen können Fragen der folgenden Art beantwortet werden :

- Wie schnell konvergiert das Verfahren bei Beobachtungen von nur einer oder mehreren Stationen ?
- Wie genau sind die Bahndaten - in Abhängigkeit der Beobachtungsgenauigkeit , der Anzahl und der Verteilung der Beobachtungen - bestimmt ?
- Reichen die mit WINGEB mit den Beobachtungen eines bestimmten Instrumentes bestimmten Bahndaten aus , um den Satelliten nach einem Umlauf um die Erde , nach einem Tag , ... wiederzufinden ?

Eine Bemerkung zum Arbeiten mit simulierten Beobachtungen : Im ersten Teil des Programms WINGEB können den simulierten , fehlerfreien Beobachtungen zufällige , normalverteilte Fehler überlagert werden , wobei die Varianz vom Programmbenützer gewählt werden kann . Aus diesem Grunde können mit WINGEB auch Fragen beantwortet werden , die sich auf Richtungsbeobachtungen zweiter Art ( siehe Seite 240 oben ) beziehen . Wir überlassen solche Fragestellungen der Phantasie der Leser , da wir in diesem Beispiel - wie übrigens in der ganzen Arbeit - das Gewicht auf die Methoden und nicht auf spezielle Fragestellungen legen .

#### 4. Das Programm WINGEB

Wir haben gefordert , dass WINGEB schnell und hypothesenfrei arbeiten soll .

Der ersten Forderung würde man wohl am ehesten mit einem "on-line" Verfahren gerecht . Daran ist aber mit der in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Rechenanlage nicht zu denken . Immerhin ist es möglich , die Beobachtungen ( Winkelgeberablesungen ) on-line (auf Disk-Files) abzuspeichern , sodass die Bahn unmittelbar nach Ende des Durchganges ohne grosse manuelle Eingabeoperationen bestimmt werden kann . Das Resultat ( die oskulierenden Bahnelemente zu einem Zeitpunkt ungefähr in der Mitte des Durchganges ) steht spätestens 10 Minuten nach Ende des Durchganges zur Verfügung .

Die zweite Forderung ( "Hypothesenfreiheit" ) lässt sich nur bedingt erfüllen , da - wie wir von der klassischen Himmelsmechanik ( siehe Kapitel 3.4.2 ) her wissen - jede Bahnbestimmung ein Iterationsprozess ist , der initialisiert werden muss . Immerhin wissen wir von der klassischen Theorie , dass sich für solche Fragestellungen die Formulierung als Randwertproblem eignet , da sehr gute erste Näherungen für vier der insgesamt

sechs Parameter direkt aus den Beobachtungen berechnet werden können .  
( Vergleiche zum folgenden auch Kapitel 3.4.2.1 ) .

Lösung der Bahnbestimmungsaufgabe nach Schema (67)

Block A , Schema (67)

Vor der Definition der Parameter müssen wir die Aufgabe genauer definieren :

1. Die dem gesuchten Bahnbogen  $\vec{r}(t)$  zugeordnete Komponentenmatrix  $r_{B_3}(t) |$  ist Lösung einer Randwertaufgabe (216), (206b) .

- Wegen der kurzen Bogen ( siehe (214) ) und wegen der bescheidenen Genauigkeit der Winkelgeberablesungen darf man das Erdpotential  $V$  in (216) durch den Hauptterm und durch die Abplattung approximieren ( in (215) können bis auf  $C_{20}$  sämtliche Koeffizienten vernachlässigt werden ) .

- Das Vorgehen in der klassischen Himmelsmechanik ( siehe (178a) ) etwas vereinfachend setzen wir :

$$T_1 := t_1 , T_2 := t_{n_R} \tag{B11.1a}$$

( Dabei sind die  $t_k, k=1, k=n_R$  die Zeiten , zu denen die erste resp. letzte Richtung beobachtet wurden ) .

- Analog zu (178b) setzen wir :

$$r_{B_3}(t_k) | =: R_{i_k B_3}(t_k) | + \Delta_k^* \cdot e_{kB_3}^* | , k=1 , k=n_R \tag{B11.1b}$$

Dabei sind die  $R_{i_k B_3}(t_k) |$  die Komponentenmatrizen der Observatorien ( im Koordinatensystem KS3 ) , von denen aus die erste resp. letzte Richtung gemessen wurden .

$\Delta_k^*$  sind die Distanzen von den beobachtenden Observatorien zum Satelliten zu den betreffenden Beobachtungszeiten ; die  $e_{kB_3}^* |$  sind die den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_k^* := ( \vec{r}(t_k) - \vec{R}_{i_k}(t_k) ) / | \vec{r}(t_k) - \vec{R}_{i_k}(t_k) | \tag{B11.1c}$$

k=1, k=n<sub>R</sub>

im KS3 entsprechenden Komponentenmatrizen . Diese Komponentenmatrizen können noch wie folgt geschrieben werden :

$$e_{kB_3}^* | = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k^* \cdot \cos \delta_k^* \\ \sin \alpha_k^* \cdot \cos \delta_k^* \\ \sin \delta_k^* \end{bmatrix} , k=1 , k=n_R \tag{B11.1d}$$

2. Die Komponentenmatrizen (B11.1b) sind eindeutig bestimmt , wenn die  $\Delta_k^* , \alpha_k^* , \delta_k^* , k=1, k=n_R$  gegeben sind . Somit können wir die Parameter wie folgt definieren :

$$p_1 = \Delta_1^* , p_2 = \Delta_{n_R}^* , p_3 = \alpha_1^* , p_4 = \alpha_{n_R}^* , p_5 = \delta_1^* , p_6 = \delta_{n_R}^* \tag{B11.2}$$

Anmerkung : Bei kurzen Bogen der Art (214) dürfen wir annehmen , dass auch die Annahme (174) erfüllt ist , dass sich also bei der numerischen Integration eine Intervallunterteilung erübrigt . Wäre dies nicht der Fall , müssten wir die Epochen  $T_k, k=1,2$  anders definieren ( siehe (B11.1a) ) oder die Aufgabe als Anfangswertproblem formulieren .

Die Formulierung als Anfangswertproblem ist auch vorzuziehen , falls ( mit einem schnellen Kleinrechner ) die Bahnbestimmungsaufgabe als "on-line-Problem" gelöst werden soll .

Block B\* , Schema (67)

Beobachtet werden im wesentlichen ( Vernachlässigung der Lichtlaufzeiten und Vernachlässigung der Refraktion ) die Einheitsvektoren  $\vec{e}_k^*$  ,  $k=1,2,\dots, n_R$  . ( Genau genommen werden die Polarkoordinaten Azimut und Höhe dieser Einheitsvektoren im topozentrischen Horizontsystem beobachtet ; bei einer reinen Bahnbestimmungsaufgabe darf aber die Transformation vom Horizontsystem ins KS3 als bekannt angenommen werden , sodass mit Azimut und Höhe auch Rektaszension  $\alpha_k^*$  und Deklination  $\delta_k^*$  ,  $k=1,2,\dots,n_R$  bekannt sind ) .

Damit bieten sich für die letzten vier Parameter die folgenden ersten Näherungen an :

$$I := 1 : p_3^I = \alpha_1^* , p_{n_R}^I = \alpha_{n_R}^* , p_5^I = \delta_1^* , p_6^I = \delta_{n_R}^* \quad (B11.3a)$$

Dabei sind die  $\alpha_k^*$  ,  $\delta_k^*$  ,  $k=1, k=n_R$  die aus den ( um die Refraktion korrigierten ) Beobachtungen von Azimut und Höhe berechneten Rektaszensionen und Deklinationen , wobei die Transformation vom Horizontsystem ins KS3 bekannt ist . ( Wir verzichten darauf , diese Transformation explizite anzugeben ) .

Zu initialisieren bleiben die beiden ersten Parameter (B11.2) : In der klassischen Himmelsmechanik haben wir erste Näherungen für diese Größen durch die Forderung festgelegt , dass sich der Himmelskörper (Kleinplanet) im Asteroidengürtel aufhält ( siehe (178d<sub>2</sub>) ) .

In der Satellitengeodäsie unterscheiden wir zwei Fälle : Beträgt die totale Bogenlänge ( siehe (192b) ) mehr als eine Stunde , nehmen wir an , dass es sich beim beobachteten Objekt um einen geostationären Satelliten handelt ; beträgt die Bogenlänge höchstens eine Stunde , nehmen wir an , dass es sich um einen "nahen" Erdsatelliten handelt .

In mathematischer Sprache :

$$\text{Falls } |t_{n_R} - t_1| \begin{cases} \leq 1^h , \\ > 1^h , \end{cases} \quad |\vec{r}(t_k)| = a_0 \quad \begin{cases} = 10 \text{ Mm} \\ = 42 \text{ Mm} \end{cases} \quad k=1, k=n_R \quad (B11.3b)$$

Sollten sich bei dieser automatischen Initialisierung Schwierigkeiten einstellen , hat der Programmbenutzer immer noch die Möglichkeit , eigene Schätzungen für die beiden Distanzen einzugeben . Dies wird jedoch nur in den wenigsten Fällen nötig sein , da auch in der Satellitengeodäsie die Bahnbestimmung "nach dem Gauss'schen Prinzip" ihre ausgezeichneten Konvergenzeigenschaften behält .

Aus (B11.3b) folgt ( in Analogie zu (178e) ) :

$$I := 1 : \Delta_k^I = - (\vec{e}_k^* \cdot \vec{R}_{i_k}) + \sqrt{(\vec{e}_k^* \cdot \vec{R}_{i_k})^2 + a_0^2 - \vec{R}_{i_k}^2} \quad k=1, k=n_R \quad (B11.3c)$$

### Blöcke D1 , D5 , Schema (67)

Auch bei dieser Aufgabe wäre es weitaus am einfachsten , die numerische Integration des Primärgleichungssystems ( Randwertaufgabe (216), (206b) ) zusammen mit den zugehörigen Variationsgleichungen mit der Subroutine LRPV21 ( siehe Tabelle 8 ) durchzuführen . Es handelt sich hier aber um eine Bahnbestimmung mit Störungen , eine Transformation (179b) , mit der die Dimension der Differentialgleichungssysteme von  $d = 3$  auf  $d = 2$  reduziert werden kann , ist folglich in unserem Beispiel nicht möglich . Daher wurde hier zur Lösung des Primärgleichungssystems der Integrationsmethode 2.2 ( siehe (108) ) vor der Methode 2.1 der Vorzug gegeben , da erstere weniger Kernspeicherplatz benötigt . Bei der Lösung des Primärsystems wurde der Polynomgrad  $q$  gleich wie in Beispiel 9 im Laufe der Bahnbestimmung optimiert .

Die Variationsgleichungen ( Block D5 , Schema (67) ) wurden mit der Methode 2.1 gelöst , wobei der Polynomgrad  $q'$  ( siehe (76c) ) gleich vier gewählt wurde . ( Um Platz zu sparen wurde dabei das Gleichungssystem (107) formal und nicht numerisch gelöst ) .

Zu den übrigen Blöcken von Schema (67) ist nichts besonderes zu bemerken .

Nachzutragen bleibt , dass beim Programm WINGEB - zur Abwechslung - das Abbruchkriterium (65) verwendet wurde , und dass auch hier das Programm RESID ( siehe Tabelle 2 ) zum "Säubern" der Beobachtungen benutzt werden kann .

### 5. Zukünftige Entwicklungen

Neben dem bereits existierenden Programm WINGEB sind für die Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald zwei weitere Bahnbestimmungsprogramme geplant :

#### a. Bahnbestimmung mit Hilfe von Richtungsbeobachtungen der zweiten Art

Bei den Richtungsbeobachtungen nach der zweiten Methode ( siehe Seite 240 oben ) werden die Richtungen von der Station zum Satelliten zu bestimmten Zeiten relativ zu bekannten Katalogsternen bestimmt .

Es wurde schon kurz angetönt , dass bei dieser astronomischen Methode einige Referenzsterne gleichzeitig auf dem Monitor sichtbar sein müssen , damit eine Abbildung Himmel  $\longleftrightarrow$  Bildschirm für den betreffenden Zeitpunkt berechnet werden kann . Diese Abbildung wird dann dazu verwendet , aus den gemessenen Koordinaten des Satelliten auf dem Monitor dessen Koordinaten am Himmel zu berechnen . Die Anzahl der zur Bestimmung dieser Transformation benötigten Katalogsterne hängt natürlich vom verwendeten Ansatz ab , dürfte aber kaum weniger als drei betragen .

Man darf nun nicht erwarten , dass diese Bedingung ( mehr als drei Katalogsterne gleichzeitig auf dem Monitor sichtbar ) zu jedem Zeitpunkt  $t$  während des Durchgangs des Satelliten über der Station erfüllt ist . Der Erwartungswert für die Anzahl der Katalogsterne auf dem Monitor beträgt bei dem Gesichtsfeld von  $1/2^0 \times 2/3^0$  des Zimmerwalder Instrumentes ungefähr 2 ( für Gebiete ausserhalb der Milchstrasse ) . Daher ist bei der gegebenen Konstellation zu erwarten , dass nur zu relativ wenigen Zeitpunkten während des Durchganges genügend Katalogsterne sichtbar sind , um Richtungen nach der klassischen astronomischen Methode zu messen . Dass der Beobachter diese "günstigen" Zeitpunkte zudem nicht wählen kann ,

dass ihm diese vielmehr aufgezwungen werden , macht die Situation vollends unbefriedigend .

Eine zufriedenstellende Lösung ist möglich , sie bedingt jedoch eine vollständige Abkehr vom klassischen Begriff der Richtungsbeobachtung : Als beobachtete Funktionen führt man nicht mehr die Richtung von Observatorium zum Satelliten zu bestimmten Zeiten ein , sondern die Distanzen ( im Winkel ) des Satelliten zu den einzelnen Katalogsternen , Diese Funktionen ( genauer : die Projektionen dieser Distanzen auf den Monitor ) sind nun ohne Schwierigkeiten der Messung zugänglich . Es ist sogar zu erwarten , dass mit diesen "neuen" Beobachtungen gegenüber den klassischen Beobachtungen wesentlich bessere Resultate erzielt werden können , da

1. die Distanzen Satellit  $\longleftrightarrow$  Stern während des Vorbeigangs des betreffenden Sterns auf dem Monitor "beinahe beliebig oft" gemessen werden können , und da
2. alle Katalogsterne , die während des Durchganges auf dem Monitor erscheinen , zur Bildung von Fehlergleichungen herangezogen werden können , während sich bei der klassischen Beobachtung die Messungen auf einige wenige Sternfelder zu beschränken hatten .

Einen Eindruck von der zu erwartenden Datendichte liefert die folgende

Abschätzung : Bei einem beobachteten ( topozentrischen ) Bogen von  $120^{\circ}$  ( ein mittlerer Wert ) ist mit dem Zimmerwalder Teleskop ein Feld von mindestens  $120^{\circ} \times 0.5$  auf dem Monitor vorbeigezogen , in welchem mindestens 500 Sterne des momentan genauesten Sternkataloges AGK-3 enthalten sein dürften .

Dass bei diesen modifizierten Richtungsbeobachtungen der Messaufwand sehr gross ist , leuchtet ein . Richtungsmessungen nach dieser neuen Methode werden sich daher nur dann durchsetzen , wenn es gelingt , den Messprozess weitgehend zu automatisieren .

Wie dem auch sei : Vorderhand soll ein Bahnbestimmungsprogramm entwickelt werden , das Bahnen mit diesen neuen Beobachtungen bestimmen soll . Mit Hilfe von simulierten Beobachtungen müssen zunächst Antworten auf Fragen der folgenden Art gefunden werden :

- Wie genau können Bahnen auf diese Weise ( bei gegebenen Instrumenten ) bestimmt werden ? ( Von Interesse ist natürlich der Vergleich mit der klassischen Beobachtung ) .
- Wie ist der Messprozess zu gestalten ( wie oft sollen Distanzen gemessen werden , ist es sinnvoll alle oder nur einige wenige Sterne zu verwenden , ... ) ?
- Wie müsste ein speziell für Richtungsbeobachtungen konzipiertes Teleskop gebaut werden , um optimale Resultate zu liefern ( Gesichtsfeld des Monitors , Brennweite ) ?

Auch diese Problemliste liesse sich noch um einiges verlängern .

Das neue Bahnbestimmungsprogramm wird sich im Wesentlichen vom Programm WINGEB durch die Art der Fehlergleichungen ( Block D6\* , Schema (67) ) unterscheiden .

b. Bahnbestimmung mit Hilfe von Richtungs- und Distanzbeobachtungen

---

Dieses Programm soll in Zukunft - falls tatsächlich Richtungen ( nach der zweiten Art , siehe Seite 240 oben ) und Distanzen ( mit Lasern ) zu demselben Satelliten während desselben Durchganges beobachtet werden - im Rahmen der Datenreduktion zur Beurteilung der Beobachtungsqualität verwendet werden .

Das neue Programm wird sich in einigen Punkten von WINGEB unterscheiden :

- Da Beobachtungen verschiedener Arten miteinander verarbeitet werden , muss zunächst gegenüber WINGEB der Block D6\* in Schema (67) modifiziert werden .
- Aus demselben Grund dürfen die Gewichte  $g_j, j=1,2,\dots,n_b$  nicht mehr wie bei der Bahnbestimmung mit Beobachtungen einer Art und eines Instrumentes alle gleich 1 gesetzt werden . Vielmehr hat man nach (218) , 5. zu setzen :

$$g_j = 1/\sigma_j^2 , \quad j=1,2,\dots,n_b \quad (B11.4)$$

Dabei wird man für Beobachtungen derselben Art ( die mit dem gleichen Instrument gewonnen wurden ) dieselben numerischen Werte für die Varianzen annehmen dürfen . Schätzungen für diese Werte erhält man in der Gestalt der nach (34) berechneten Fehler bei Bahnbestimmungsaufgaben mit Beobachtungen (ausschliesslich) der betreffenden Beobachtungsart ( dabei wird man in (34) alle Gewichte gleich 1 setzen ) .

- Einfacher als im Programm WINGEB wird schliesslich die Initialisierung :  
Anstatt erste Näherungen für die topozentrischen Distanzen zu zwei verschiedenen Zeiten nach (B11.3c) zu berechnen , wird man bedeutend bessere Näherungen direkt mit Hilfe der Laser-Beobachtungen angeben können .  
Diese verbesserte Initialisierung wird zur Folge haben , dass die Anzahl der Iterationsschritte anstatt ( wie in WINGEB ) 3 - 5 nur noch 1 - 2 betragen wird .

Beispiel 12 : Bahnbestimmung mit Störungen mit Hilfe von Laserbeobachtungen

---

Wir beschreiben an dieser Stelle das Programm "SCREEN" , das in der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald seit 1979 zur Beurteilung der Qualität der Laser-Beobachtungen im Einsatz steht . Es handelt sich gegenüber dem früher verwendeten - in {P. Klöckler et al. , 1978} beschriebenen - Datenbereinigungsprogramm um eine Neuentwicklung .

Im wesentlichen ( Einschränkungen siehe weiter unten ) berechnet SCREEN die Bahn mit Hilfe der während eines Durchgangs des Satelliten über einer Station mit einem Lasertelemeter gewonnenen Beobachtungen .

Die Messungen wurden in Kapitel 2.4.2.2 beschrieben , die Fehlergleichungen findet man unter (146) .

Anmerkung : Einfachheitshalber sprechen wir im folgenden von Distanzbeobachtungen und nicht von Messungen von Lichtlaufzeiten .

(B12.1)

Dass in SCREEN die Bahn nach dem Schema (67) berechnet wird , dürfte kaum überraschen . Dass als Resultat dieser Bahnbestimmung weniger die Bahnelemente - diese werden in der Tat nirgends gedruckt oder abgespeichert - als vielmehr der unter der Hypothese gleichgenauer Beobachtungen nach (34) berechnete mittlere Fehler interessiert , wäre auch kein ausreichender Grund , dieses Beispiel zum Abschluss anzuführen .

Die neue Bahnbestimmungsaufgabe unterscheidet sich aber in einem wichtigen Punkt von allen bisher besprochenen Problemen dieser Art :

Die "zweifellos existierende und eindeutige" Bahn lässt sich mit den gegebenen Messungen - auch wenn deren Zahl sehr gross ist - nur sehr schwer finden . (B12.2)

Enttäuscht ist insbesondere der von den sehr rasch konvergierenden Bahnbestimmungen mit Hilfe von Richtungsbeobachtungen verwöhnte Himmelsmechaniker : Eine Bahnbestimmung allein mit Distanzbeobachtungen einer Station nach Schema (67) konvergiert auch bei sehr guten ersten Näherungen für die Parameter nur sehr langsam oder sie konvergiert überhaupt nicht !

Des Rätsels Lösung ist einfach : Unter leicht geänderten Voraussetzungen hat die gestellte Aufgabe nicht eine sondern beliebig viele Lösungen . Diese Voraussetzungen lauten :

Voraussetzungen :

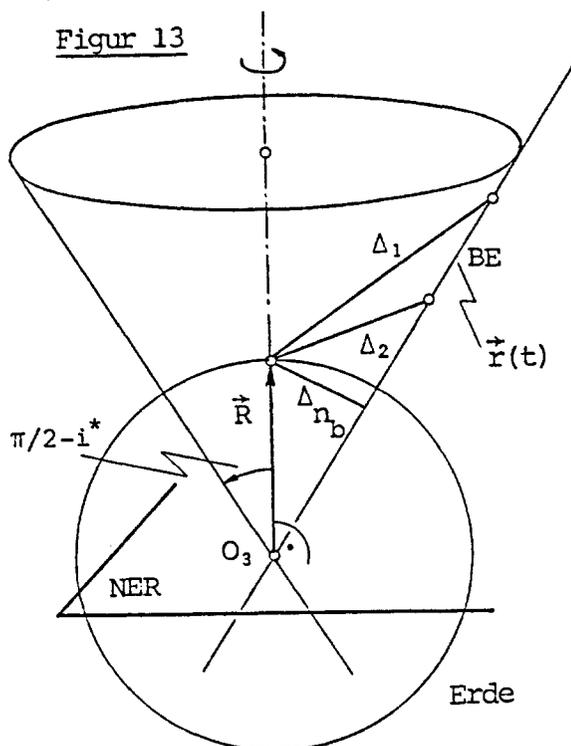
- a. Die Massenverteilung in der Erde ist kugelsymmetrisch .
- b. Die Beobachtungsstation wird während des Durchgangs des Satelliten über der Station als ruhend im System KS3 ( siehe (133) ) angenommen . ( Vernachlässigung der Erdrotation während der Zeit des Durchganges ) . (B12.3)

Aus a. folgt , dass die Bahn des beobachteten Satelliten ein Kegelschnitt - in den für uns interessanten Fällen - eine Ellipse ist .

Die Voraussetzung b. scheint vielleicht etwas exotisch , kann aber wegen der hier behandelten kurzen Bogen ( siehe (214) ) durchaus als eine erste Näherung für die realen Verhältnisse angesehen werden .

Unter den Voraussetzungen (B12.3) wird die Lösungsschar der Aufgabe der Figur 13 entnommen :

Figur 13



Legende

- $O_3$  : Schwerpunkt der Erde
- $\vec{R}$  : Ortsvektor der Station im KS3 ( wegen (B12.3) ruhend im KS3 )
- BE : Wahre Bahnebene des Satelliten ( hier normal zur Blattebene angenommen ) .
- $\vec{r}(t)$  : Bahnkurve des Satelliten in BE .
- $\Delta_j, j=1,2,\dots,n_b$  : gemessene Distanzen "zu den Beobachtungszeiten" ( genauere Definition siehe Kapitel 2.4.2.2 ) .
- NER : Normalebene zu R durch  $O_3$  ,
- $i^*$  : Neigung der Bahnebene BE gegen die Ebene NER .

Man sieht nun anhand von Figur 13 ohne weiteres ein, dass die wahre Bahnebene BE und mit ihr die wahre Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  um die durch  $\vec{R}$  definierte Drehachse gedreht werden kann, ohne dass die Distanzen  $\Delta_j, j=1,2,\dots,n_b$  geändert werden.

Das heisst mit andern Worten, dass sich die Bahnebene mit Hilfe von Distanzmessungen einer einzigen Station unter der Voraussetzung (B12.3) gar nicht eindeutig bestimmen lässt: Jede Ebene, die Tangentialebene an den Rotationskegel mit Achse  $\vec{R}$  und halbem Öffnungswinkel  $\pi/2-i^*$  (siehe Figur 13) ist, kommt prinzipiell als Bahnebene in Frage.

Nun sind die Voraussetzungen (B12.3) in Wirklichkeit nicht erfüllt: Weder ist die Erde eine Kugel, noch steht sie still... Die reale Situation ist aber der in Figur 13 dargestellten noch so nahe verwandt, dass bei der Lösung der Bahnbestimmungsaufgabe die erwähnten Schwierigkeiten auftreten.

Diesen Schwierigkeiten kann man durchaus auf verschiedene Arten entgegenkommen. Zwei Möglichkeiten seien erwähnt:

- Man fügt den Distanzbeobachtungen einige Richtungsbeobachtungen hinzu und löst eine Bahnbestimmungsaufgabe, wie sie zum Schluss von Beispiel 11 geschildert wurde.  
Diese Lösung liesse sich prinzipiell in Zimmerwald leicht realisieren, da bei jeder Distanzbeobachtung zusätzlich die Winkelgeber der vertikalen und horizontalen Drehachse des Instrumentes abgelesen und die abgelesenen Werte zusammen mit den Distanzen abgespeichert werden.
- Man arbeitet nur mit Distanzbeobachtungen, verzichtet dafür aber auf eine vollständige Bahnbestimmung: An Stelle von sechs Parametern bestimmt man nur deren fünf. Man darf und muss dann allerdings eine Zwangsbedingung einführen, die die Bahnebene eindeutig festlegt, d.h. die unter den beliebig vielen Tangentialebenen in Figur 12 genau eine auswählt.

Von den beiden Möglichkeiten ist zweifellos die zweite vorzuziehen, da sie den kleineren Arbeitsaufwand verspricht: Es werden keine neuen Beobachtungen eingeführt, das Normalgleichungssystem ist kleiner als bei der ersten Methode. Daher werden wir uns von hier an nur noch mit der zweiten Variante befassen.

Gehen wir gleich auf das unangenehmste Teilproblem los: Wie ist die Zwangsbedingung zu wählen, sodass von den Tangentialebenen in Figur 13 genau eine - wenn möglich eine, die mit der wahren Bahnebene BE gut übereinstimmt - herausgegriffen wird?

Selbstverständlich lässt sich diese Frage auf die verschiedensten Arten lösen. Wir geben eine für das folgende bequeme Möglichkeit an:

Wir verlangen, dass sich der Satellit zur Zeit  $t_1$  der ersten Beobachtung in einer - bei den Voraussetzungen (B12.3) fast \*) beliebig wählbaren - Ebene  $E^*$  befindet.

Damit die so festgelegte "Bahnebene" mit der wahren möglichst gut übereinstimmt, identifizieren wir  $E^*$  mit der durch die Prognosen für den betreffenden Satelliten vorausgesagten Bahnebene zum Zeitpunkt  $t_1$ .

(B12.4)

\*) Es gelte  $O_3 \in E^*$ . Dann muss die Neigung von  $E^*$  gegen die Ebene NER (siehe Figur 13) grösser oder gleich  $i^*$  sein.

Lösung der Aufgabe nach Schema (67)

Block A , Schema (67) : Problemdefinition und Parameterwahl

Ein wesentliches Charakteristikum dieser Bahnbestimmungsaufgabe besteht darin , dass mit den - schon mehrmals erwähnten - Prognosen für die mit Lasern beobachteten Satelliten sehr gute Näherungsbahnen bekannt sind .

Diesen Umstand nützen wir in zweierlei Hinsicht aus :

1. Wir können das Differentialgleichungssystem (216) vereinfachend wie folgt schreiben :

$$r_{B_3} |^{(2)} = R(t)^T \cdot \left( -G \cdot M \cdot \frac{r_{B_3} |}{r^3} + \text{grad} \left( \sum_{n=2}^4 \left( \frac{a_E}{r_N} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \beta_N) \cdot (C_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda_N) + S_{nm} \sin(m \cdot \lambda_N)) \right) \right)$$

(B12.5)

Dabei soll der Index "N" andeuten , dass sich die betreffenden Grössen auf die aus der (bekannten) Näherungsbahn ( Prognosen ) berechneten Grössen beziehen .

(B12.5) kann damit formal einfacher wie folgt geschrieben werden :

$$r_{B_3} |^{(2)} = R(t) \cdot \left( -G \cdot M \cdot \frac{r_{B_3} |}{r^3} \right) + \tilde{f}(t) | \tag{B12.6}$$

Dabei ist  $\tilde{f}(t) |$  eine ( aus (B12.5) und der Näherungsbahn folgende ) bekannte Funktion der Zeit .

Die Verwendung von (B12.5,6) an Stelle von (216) ist eine beträchtliche Vereinfachung , da die bei der numerischen Integration benötigten Funktionswerte von  $\tilde{f}(t) |$  nicht bei jedem Iterationsschritt neu berechnet werden müssen , und da die partiellen Ableitungen von  $\tilde{f}(t) |$  nach den Parametern der Bahnbestimmung gleich Null sind .

Diese Vereinfachungen erübrigen sich , wenn ein schnellerer Rechner als der in Kapitel 2.2.1 beschriebene zur Verfügung steht . ( Bessere Resultate sind aber kaum zu erwarten ) .

Zu erwähnen bleibt , dass die Koeffizienten in (B12.5) gemäss (215) definiert wurden .

2. Wir brauchen bei der Parameterwahl ( und bei der Problemdefinition ) nicht speziell darauf zu achten , dass sich die Parameter auf einfache Weise initialisieren lassen - aus der bekannten Prognosenbahn lassen sich auf alle Fälle gute Näherungswerte herleiten . Beim Programm SCREEN wurde einmal mehr der Formulierung als Randwertaufgabe der Vorzug gegeben . D.h. die gesuchte Bahn ist Lösung einer Randwertaufgabe (B12.6) , (206b) , wobei hier  $n_1' = 5$  ist ( Normalfall ; Varianten siehe weiter unten ) .

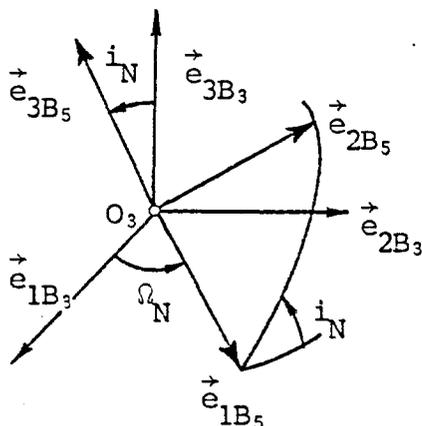
Als erstes wählen wir die Randepochen  $T_1, T_2$  gleich wie im Programm WINGEB :

$$\underline{T_1 := t_1}, \quad \underline{T_2 := t_{n_b}} \quad (B12.7a)$$

Weiter seien :  $\Omega_N, i_N$  : Den Prognosen entnommene, genäherte Werte für Knotenlänge und Neigung der momentanen Bahnenebene z.Z.  $t_1$  (= Knotenlänge und Neigung der Ebene  $E^*$  von (B12.4) ) . (B12.7b)

KS5 : Kartesisches Koordinatensystem mit der Ebene  $E^*$  als Fundamentelebene ( siehe Figur 14 ) . (B12.7c)

Figur 14



Legende

$O_3$  : Gemeinsamer Ursprung von KS3 und KS5 ( siehe (133) resp. (12.7c) ) .

$\vec{e}_{iB_3}, i=1,2,3$  : Basisvektoren des KS3 .

$\vec{e}_{iB_5}, i=1,2,3$  : Basisvektoren des KS5 .

Die Transformation zwischen KS3 und KS5 kann in Figur 14 abgelesen werden :

$$\underline{r_{B_3}(t) | = R_3(-\Omega_N) \cdot R_1(i_N) \cdot r_{B_5}(t) |} \quad (B12.7d)$$

Dabei sind die  $R_{..}$  nach (130g) definierte partikuläre Drehmatrizen .

Für  $t := T_k, k = 1,2$  dürfen wir schreiben

$$\underline{r_{kB_3} | = R_3(-\Omega_N) \cdot R_1(i_N) \cdot r_{B_5}(t) |}, \quad k=1, k=2 \quad (B12.7e)$$

, falls wir nach (206b)

$$r_{kB_3} | := r_{B_3}(T_k) |, \quad r_{kB_5} | := r_{B_5}(T_k) |, \quad k=1,2 \quad (B12.7f)$$

Zu (B12.7d,e,f) zwei Bemerkungen :

1. Wäre die Prognosenbahnenebene ( siehe (B12.7b) ) identisch mit der wahren Bahn , würde gelten :  $r_{1B_5,3} = 0$
2. Wäre die Bahn zusätzlich nicht gestört ( Bewegung des Satelliten in einer Ebene ) , würde sogar  $r_{B_5,3}(t) = 0$  für alle  $t$  gelten .

Da beide Voraussetzungen nur näherungsweise erfüllt sind , gilt dasselbe für die Folgerungen .

Die Forderung (B12.4) lässt sich jetzt auf sehr einfache Weise formulieren :

$$\underline{r_{1B_5,3}} := 0 \quad (B12.7g)$$

Die Parameter werden nun wie folgt gewählt :

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = r_{1B_5,1} \quad , \quad p_3 = r_{2B_5,1} \\ p_2 = r_{2B_5,2} \quad \quad p_4 = r_{2B_5,2} \\ \quad \quad \quad \quad \quad p_5 = r_{2B_5,3} \end{array} \right\} (B12.7h)$$

Uebrige Blöcke in Schema (67)

Die Parameter werden mit Hilfe der Prognosenbahn initialisiert ( Block B\* ) .

In den Blöcken D1 , D5 werden die ( 1 + 5 ) Randwertaufgaben nach genau den gleichen Methoden wie im Programm WINGEB gelöst .  
Erwähnenswert ist einzig die Tatsache , dass - bei vergleichbarer Bogenlänge - der ( automatisch nach (B9.1j) optimierte ) Polynomgrad q in SCREEN etwas höher ist als in WINGEB .

Das Programm SCREEN hat sich - in der bisher geschilderten Version - sehr gut bei der Bearbeitung von relativ langen Bogen ( geozentrische Länge  $\geq 60^\circ$  ) bewährt . Bei kürzeren Bogen hat es sich gezeigt , dass die Fehler der Parameter (B12.7h) sehr gross wurden , und dass das Verfahren z.T. langsam konvergierte . Diese Erscheinungen deuten immer darauf hin , dass man versucht , zuviele Unbekannten mit dem gegebenen Beobachtungsmaterial zu bestimmen .

Für den angestrebten Zweck ( Beurteilung der Beobachtungsqualität ) ist es in diesen Fällen bestimmt gerechtfertigt , eine weitere Zwangsbedingung a priori anzunehmen und dafür nurmehr vier Parameter zu bestimmen .

In der neuen Version von SCREEN wird daher für kurze Bogen ( geozentrische Länge  $< 60^\circ$  ) zusätzlich zu (B12.7g) automatisch

$$\underline{r_{2B_5,3}} = 0 \quad \text{gesetzt .} \quad (B12.8)$$

(B12.7g) und (B12.8) zusammen sind im wesentlichen mit der Annahme identisch , dass die Bahnebene a priori bekannt ist .

In dieser modifizierten Version hat sich SCREEN bei der Bearbeitung von Beobachtungen mit dem Rubin-Lasersystem , bei dem die Beobachtungsfehler von der Grössenordnung von 1 m sind , sehr gut bewährt .  
Möglicherweise wird man auf (B12.8) verzichten können , wenn in Zimmerwald ( ca. ab Frühjahr 1983 ) das neue Nd:YAG - Lasersystem mit erwarteten Beobachtungsfehlern von weniger als 10 cm zur Verfügung steht .



- Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 4 , Druckerei der Universität Bern .
- Beutler G. 1982 Probleme der Parameterbestimmung in physikalischen Systemen . Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 8 , Druckerei der Universität Bern .
- B.I.H. 1981 Bureau International de l'heure Annual Report for 1981 . Paris 1981 .
- Bucerus H. 1966 Himmelsmechanik I . B.I. Hochschultaschenbücher Nr. 143,143a . Hochschultaschenbücher-Verlag , Mannheim .
- Explanatory Supplement 1961 Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Nautical Almanac . H.M. Stationery Office , London .
- Erwe F. 1973 Differential- und Integralrechnung , Band 1 . B.I. Hochschultaschenbücher Band 30 . Hochschultaschenbücher-Verlag , Mannheim .
- FK4 1963 Fourth Fundamental Catalogue (FK4) . Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Institutes Heidelberg Nr. 10 , Verlag G. Braun , Karlsruhe .
- Gaposchkin E.M. 1973 1973 Smithsonian Standard Earth (III) . Smithsonian Astrophysical Observatory , Special Report 353 .
- Grossmann W. 1969 Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie . Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York .
- Gurtner W. 1979 Programmbeschreibung für die Uebertragung formatierter Files IBM ↔ PDP 11 per Magnetband (Fortran-Programm auf der IBM) .

- Berichte der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 2 , Druckerei der Universität Bern .
- Gurtner W, 1982 PLOT, Programm zum Plotten von VT 11 Graphic Displays . Berichte der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 11 , Druckerei der Universität Bern .
- Hall G. 1976 Modern numerical methods for ordinary differential equations . Clarendon Press , Oxford .
- Watt J.M.
- Heiskanen A. 1967 Physical Geodesy . W.H. Freeman and Company , San Francisco and London .
- Moritz
- Herget P. 1965 Computation of Preliminary Orbits . Astronomical Journal , Vol. 70 , No. 1 .
- Klöckler P. 1978 Progress Report 1978 of the Zimmerwald Satellite Observation Station .
- Bauersima I. Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 3 ,
- Beutler G. Druckerei der Universität Bern .
- Kopal Z. 1955 Numerical Analysis . Chapman & Hall , London .
- Lüthi W. 1975 Laser für die Vermessung von Erdsatelliten . Dissertation Bern , Druckerei der Universität Bern .
- Lerch F.J. 1979 Gravity Model Improvement Using GEOS 3 (GEM 9 and 10) .
- Klosko S.M. Journal of Geophysical Research ,
- Laubscher R.E. Vol. 84 , No. B8 , p. 3897 .
- Wagner C.A.
- Lundquist C.A. 1966 Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth ,
- Veis G. Vol. I,II,III . Smithsonian Astrophysical Observatory , Special Report 200 .
- Natanson I.P. 1977 Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen . Verlag Harry Deutsch , Zürich , Frankfurt a.M. , Thun .

- Newton I. 1687 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica . London
- Orelyskaya V.I. 1980 On the Improvement of the FK4 Equinox and Equator by means of Photographic Observations of Asteroids . Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft Nr. 48 , Hamburg .
- Roy A.E. 1978 Orbital Motion . Adam Hilger Ltd. , Bristol .
- Rothacher M. 1982 Programmsystem und Datenorganisation zur Berechnung von Kleinplaneten- und Kometenbahnen . Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald , Nr. 9 , in Vorbereitung .
- Schürer M. 1937 Ueber die theoretische und praktische Festlegung eines Inertialsystems . Dissertation Bern , Astronomische Nachrichten 264 , 81 .
- Schürer M. 1966 Satellitengeodäsie . Schweizerische Zeitschrift für Vermessung , Photogrammetrie und Kulturtechnik , Heft Nr. 10 .
- Stiefel E. 1965 Einführung in die Numerische Mathematik . B.G. Teubner Verlagsgesellschaft , Stuttgart .
- Stiefel E. 1970 Remarks on numerical Integration of Keplerian Orbits . Celestial Mechanics , Vol. 2 , p. 274 .
- Stumpff K. 1959 Himmelsmechanik , Band 1 . Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin .
- Wakker K.F. 1981 Kalman Filter Satellite Orbit Improvement using Laser Ranging Measurements from a Single Tracking Station . Memorandum M-414 Technische Hogeschool Delft .
- Ambrosius B.A.C.

- Wells D.E.      1974      Doppler Satellite Control . Technical Report No. 29 , Dept. of Surveying Engineering , University of New Brunswick , Fredericton N.B. , Canada .
- Wolfers J.Ph.    1872      Isaac Newton : Mathematische Prinzipien der Naturlehre mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J.Ph. Wolfers . Nachdruck 1963 , Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt .

