

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

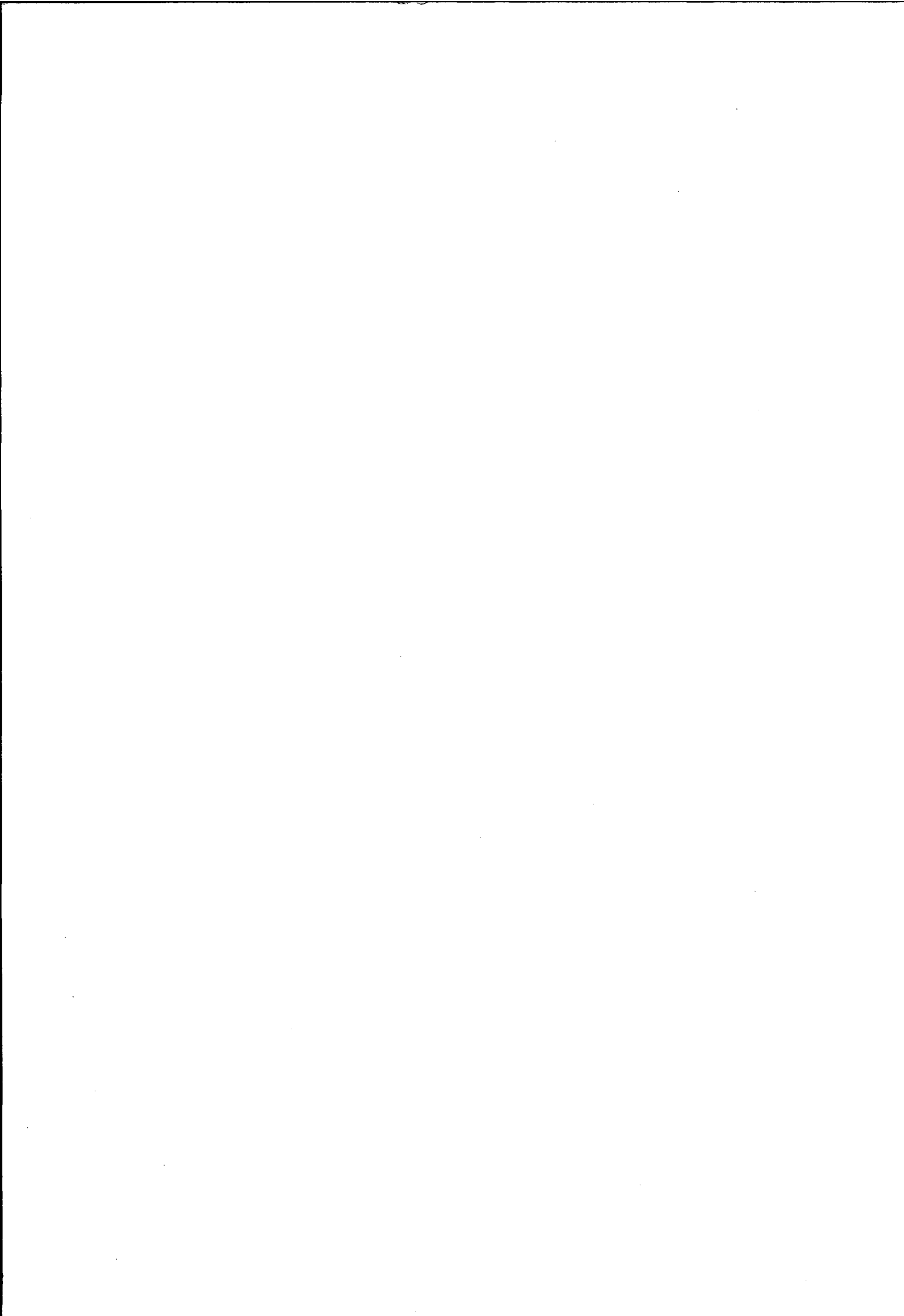
Schweizerischen Geodätischen Kommission
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Dreiunddreißigster Band

Integrale Auswertung
von Satellitenbeobachtungen

G. Beutler

1977



Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Dreiunddreißigster Band

Integrale Auswertung
von Satellitenbeobachtungen

G. Beutler

1977

Adresse der Schweizerischen Geodätischen Kommission:

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie

ETH-Hönggerberg

CH-8093 Zürich

Redaktion des 33. Bandes

Dr. G. Beutler

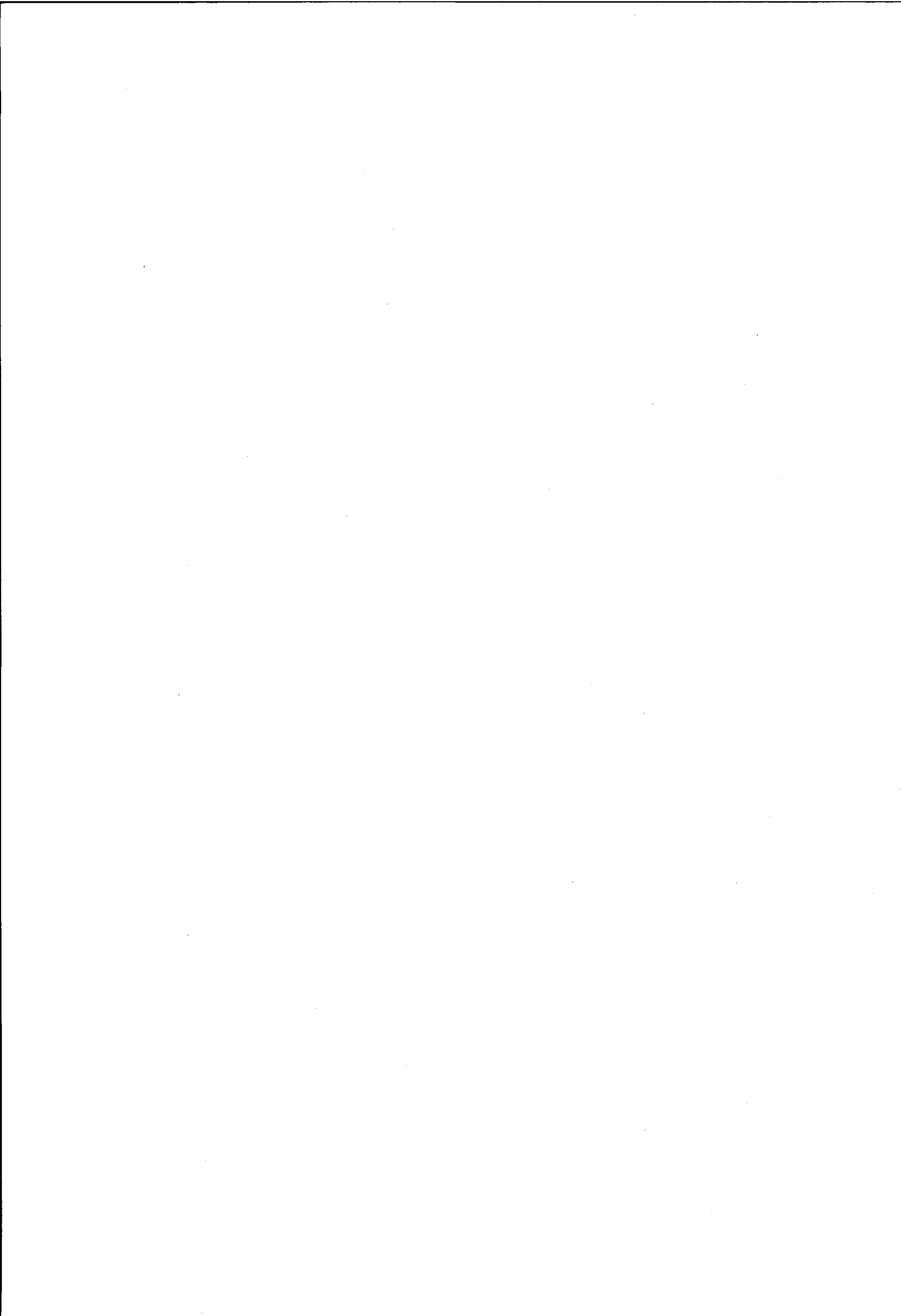
Astronomisches Institut

Universität Bern

Druck: Offsetdruck Bern AG

INHALTSVERZEICHNIS

| | Seite |
|---|-------|
| 1. EINLEITUNG | 5 |
| 1.1. Problemstellung | 5 |
| 1.2. Analytische und numerische Methoden | 8 |
| 1.3. Zielsetzungen und Konzept | 12 |
| <u>1. Teil GRUNDLAGEN</u> | |
| 2. PARAMETERBESTIMMUNG MIT NUMERISCHEN METHODEN | 16 |
| 2.1. Variationsgleichungen | 18 |
| 2.2. Koordinatensysteme | 20 |
| 2.3. Aufstellen der Bewegungsgleichungen | 22 |
| 2.4. Technischer Anhang | 24 |
| 3. BEOBACHTUNGSMODELLE UND PARAMETERBESTIMMUNG | 34 |
| 3.1. Definition und Berechnung der einzelnen Beobachtungen .. | 35 |
| 3.2. Berechnung der partiellen Ableitungen | 37 |
| 3.3. Das Simulationsprogramm | 41 |
| 3.4. Das Parameterbestimmungsprogramm | 44 |
| 4. DAS INTEGRATIONSVERFAHREN | 47 |
| 4.1. Auswahl des Verfahrens | 47 |
| 4.2. Das Integrationsverfahren nach Störmer | 50 |
| 4.3. Gleitkomma-Arithmetik | 54 |
| 4.4. Fehlerakkumulation | 55 |
| <u>2. Teil ANWENDUNG AUF DAS SHORT-ARC-PROGRAMM</u> | |
| 5. THEORETISCHE VORARBEITEN | 64 |
| 5.1. Das Timing Problem | 64 |
| 5.2. Der Strahlungsdruck | 66 |
| 5.3. Weitere Simulationen - Kritische Bemerkungen | 79 |
| 5.4. Datenaufbereitung | 81 |
| 5.5. Vergleichswerte für die Stationskoordinaten | 82 |
| 6. DATENANALYSE | 84 |
| 6.1. Untersuchungsmethode | 84 |
| 6.2. Resultate | 86 |
| 7. BERECHNUNG VON STATIONSKOORDINATEN | 100 |
| 7.1. Vorgehen | 100 |
| 7.2. Resultate | 105 |
| 7.3. Strahlungsdruck | 109 |
| 7.4. Abschliessender Kommentar | 110 |



VORWORT

Seit dem Aufkommen der Satellitengeodäsie hat man sich auch in der Schweiz (bisher vor allem im Astronomischen Institut der Universität Bern) praktisch und theoretisch mit diesem Gebiet befasst, und Ergebnisse dieser Arbeiten sollen ebenfalls in den "Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz" veröffentlicht werden. Die vorliegende Abhandlung von Herrn Dr. G. Beutler beschäftigt sich mit der Auswertung von Satellitenbeobachtungen. Die bisher übliche Trennung in geometrische und dynamische Methoden wurde zugunsten einer integralen Betrachtungsweise aufgegeben. Es hat sich gezeigt, dass auch für Bogen über 2 - 3 Tage eine befriedigende Darstellung der Beobachtungen möglich ist, und dies bei sehr problematischen Satelliten wie PAGEOS einer war. Es kann dadurch der Informationsinhalt der Beobachtungen wesentlich besser ausgeschöpft werden, als bei der Beschränkung auf simultane Beobachtungen allein. Systematische Fehlereinflüsse und fehlerhafte Beobachtungen können sofort entdeckt und eliminiert werden. Das Verfahren erfordert allerdings eine ausgeklügelte numerische Integration.

Die Schweizerische Geodätische Kommission dankt Herrn Beutler für diese mit grosser Akribie durchgeführte Arbeit. Erste Anwendungen auf Beobachtungen in Zimmerwald, Delft und Graz haben die Nützlichkeit der Methode voll bestätigt. Zu danken ist auch für die Niederschrift des Manuskripts durch Frau Ch. Strickler und das Zeichnen der Figuren durch Herrn W. Gurtner. Die Arbeit wurde in verdankenswerter Weise unterstützt vom Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (Forschungskredit Nr. 2.396 - 0.75).

Der Präsident der
Schweizerischen Geodätischen Kommission
Prof. Dr. M. Schürer



1. EINLEITUNG

1.1 Problemstellung

Die Bahn jedes künstlichen Erdsatelliten ist bestimmt durch die zu jedem Zeitpunkt auf ihn wirkenden Kräfte und durch die Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 .

Die wichtigsten bahnbestimmenden Kräfte sind:

- Gravitationskräfte von
Erde
Sonne und Mond
- Nicht gravitationelle Kräfte:
Luftwiderstand
Strahlungsdruck

Unproblematisch sind die Gravitationseinflüsse von Sonne und Mond: Die Positionen und Massen dieser Himmelskörper sind mit hinreichender Genauigkeit bekannt, so dass diese Kräfte berechnet werden können.

Das Erdpotential: Am gebräuchlichsten ist eine Entwicklung nach Kugelfunktionen. Eine Hauptaufgabe der Geodäsie ist es jedenfalls, die Koeffizienten dieser (oder anderer) Entwicklungen zu bestimmen.

Schwieriger ist eine befriedigende Behandlung der beiden nicht gravitationellen Kräfte. Zwar können im allgemeinen recht einfache Ansätze gemacht werden; diese beinhalten aber Parameter, die kaum kontrollierbar sind: beim Luftwiderstand die atmosphärische Dichte, beim Strahlungsdruck Solarkonstante und Rückstreulicht von der Erde (Albedo-Strahlung). Bei beiden Kräften ist zudem die Form und Oberflächenbeschaffenheit des Satelliten von Bedeutung.

Fassen wir zusammen:

- Die geozentrische Bahn eines Satelliten ist Funktion der Anfangsbedingungen und der auf den Satelliten wirkenden Kräfte. Für alle Kräfte müssen (analytische) Ansätze gemacht werden. Diese Ansätze beinhalten Parameter, die zum Teil bekannt, zum Teil unbekannt sind.

Die Satelliten werden von Beobachtungsstationen von der bewegten Erde aus beobachtet. Irgendeine Beobachtung ist also Funktion der geozentrischen Bahn und der Koordinaten der betreffenden Beobachtungsstation.

Die Gesamtheit aller Ansätze für die wirkenden Kräfte mit den entsprechenden Parametern und die Gesamtheit aller Stationskoordinaten definieren ein Modell für die Bewegung eines Satelliten.

Es geht nun darum, in diesem Modell die Bahn des Satelliten optimal darzustellen, d.h. Anfangsbedingungen, Modellparameter und Stationskoordinaten so zu bestimmen, dass die Summe der Residuenquadrate (Beobachtungen minus die mit dem Modell errechneten Werte für die Beobachtungen) minimal wird.

Aus dem Gesagten wird auch klar, dass die in einem solchen Prozess bestimmten Parameter streng genommen nur bezüglich des gewählten Modells ihre Gültigkeit haben.

Aufstellen der Fehlergleichungen

Bezeichnungen:

ϕ'_{ik} : Beobachtung des Satelliten zur Zeit t_k von der Station Nr. i aus (z. B. Rektaszension, Deklination, Distanz oder Dopplerverschiebung).

ϕ_{ik} : Theoretischer Wert für diese Beobachtung

$$\phi_{ik} = \phi_{ik}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$$

$\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$: Gesamtheit aller Modellparameter, Gesamtheit aller Stationskoordinaten, Anfangsbedingungen

Falls ein Satz von genäherten Werten für diese Parameter zur Verfügung steht, kann der Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den Parametern linearisiert werden:

$\overset{(N)}{\kappa_1}, \overset{(N)}{\kappa_2}, \dots, \overset{(N)}{\kappa_m}$ } : Satz von genäherten Parametern

$$\overset{(N)}{\kappa_1}, \overset{(N)}{\kappa_2}, \dots, \overset{(N)}{\kappa_m} = \{ \overset{(N)}{\kappa_1} + \Delta\kappa_1, \dots, \overset{(N)}{\kappa_m} + \Delta\kappa_m \}$$

$$\overset{(N)}{\phi_{ik}} = \overset{(N)}{\phi_{ik}}(\overset{(N)}{\kappa_1}, \overset{(N)}{\kappa_2}, \dots, \overset{(N)}{\kappa_m})$$

Für infinitesimale $\Delta\kappa_\ell$ gilt:

$$\overset{(N)}{\phi_{ik}} = \overset{(N)}{\phi_{ik}} + \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial \overset{(N)}{\phi_{ik}}}{\partial \kappa_\ell} \cdot \Delta\kappa_\ell$$

Daraus ergeben sich die Fehlergleichungen zu:

$$\sum_{\ell=1}^m \frac{\partial \phi_{ik}^{(N)}}{\partial \kappa_{\ell}} \Delta \kappa_{\ell} - (\phi_{ik}' - \phi_{ik}^{(N)}) = \rho_{ik} \quad (1)$$

Die Unbekannten $\Delta \kappa_{\ell}$ werden so bestimmt, dass

$$\sum_{i,k} \rho_{ik}^2 = \text{Min.}$$

Da die $\Delta \kappa_{\ell}$ in der Praxis sicher nicht infinitesimal sind, folgt, dass jede Methode zur Parameterbestimmung ein iterativer Prozess sein muss.

Es muss erwähnt werden, dass bei der Lösung von vielen Problemen nicht alle κ_{ℓ} bestimmt werden müssen. Vielmehr ist häufig ein Teil dieser Parameter für die spezielle Aufgabe mit hinreichender Genauigkeit bekannt. Die Struktur der Fehlergleichungen wird jedoch dadurch nicht beeinträchtigt.

1.2 Analytische und numerische Methoden

1.2.1 Analytische Methoden

Analytische Methoden benützen die Tatsache, dass das verwickelte dynamische Problem der Bewegung eines Satelliten im geschilderten Kräftefeld eine einfache Näherung aufweist, die analytisch lösbar ist: Bewegung im Feld einer kugelsymmetrisch angenommenen Erde (d.h. vom Kräftefeld wird lediglich der Hauptterm der Potentialentwicklung der Erde berücksichtigt). Die Lösungen sind die aus der Himmelsmechanik wohlbekanntes Kegelschnitte mit den Keplerschen Bahnelementen als Integrationskonstanten. Das weitere Vorgehen ist ebenfalls der klassischen Himmelsmechanik entnommen: Alle nicht berücksichtigten Effekte werden als Störkräfte interpretiert. Die Integrationskonstanten des ungestörten Problems werden zeitlich variabel angesetzt, und für diese zeitliche Variation werden Differentialgleichungen aufgestellt. In diese Differentialgleichungen gehen selbstverständlich die Störkräfte ein. Diese Störkräfte müssen jetzt als Funktionen der Bahnelemente dargestellt werden. Man sieht zwar leicht ein, dass dies prinzipiell möglich ist: Diese Störkräfte sind ja im allgemeinen einfach als Funktion des geozentrischen Ortes und der geozentrischen Geschwindigkeit ausdrückbar. Andererseits ist jedem Satz von Ort und Geschwindigkeit eineindeutig ein Satz von Keplerschen Elementen zugeordnet. Leider erfordert aber diese Transformation eine sehr grosse analytische Arbeit. Man kann sich davon z.B. durch das Studium der Referenzen {1} und {2} überzeugen. Die Differentialgleichungen, die so gewonnen werden, können zwar nach wie vor nicht analytisch exakt integriert werden. Es ist jedoch möglich, mittels Störungsrechnung Näherungslösungen zu erhalten: In 1. Ordnung werden die Bahnelemente in den Differentialgleichungen als konstant angenommen. Dadurch wird das Problem reduziert auf das Lösen von Integralen. Auch hier: Die analytische Lösung dieser Integrale ist alles andere als trivial. Diese Näherung ist hier für den grössten Störterm, die Abplattung, nicht ausreichend. Für diesen Term muss Störungsrechnung in 2. Ordnung getrieben werden, d.h. die zeitliche Variation der Elemente muss bei der Integration berücksichtigt werden. Der Aufwand, der dazu getrieben werden muss, ist enorm. Es ist auch zu sagen, dass mit der Verbesserung der Beobachtungsqualität (vor allem der Laser- und Dopplerbeobachtungen) in Zukunft noch höhere Anforderungen an den ganzen Apparat gestellt werden müssen, so dass man kaum darum herum kommt, auch für weitere Terme Störungsrechnung höherer Ordnung zu betreiben.

Heute wird aber, ausgenommen für wenige Terme niedriger Ordnung, Störungsrechnung erster Ordnung verwendet.

Mit dem dargestellten Vorgehen erreicht man schliesslich, dass die Bahnelemente als Funktionen der Zeit und der Modellparameter bekannt sind. Auch die Berechnung der in (1) auftretenden partiellen Ableitungen ist dann unproblematisch. Sehr vorteilhaft ist im übrigen, dass man a priori entscheiden kann, welche Modellparameter säkulare, langperiodische und/oder kurzperiodische Störungen verursachen. Dies erlaubt eine gewisse Aufspaltung bei der Bestimmung der Modellparameter: Es können zunächst diejenigen Parameter berechnet werden, die langperiodische und säkulare Auswirkungen zeigen. Ist dies geschehen, können die kurzperiodischen Effekte dieser Parameter angebracht werden. Die übrig bleibenden Residuen wären dann noch den restlichen Modellparametern und den Stationskoordinaten zuzuordnen.

Der schon mehrmals erwähnte grosse Aufwand an Analyse hat dazu geführt, dass nur sehr wenige Lösungen in grossem Rahmen durchgeführt wurden. Zu erwähnen sind vor allem die Arbeiten des Smithsonian Astrophysical Observatory. Die sogenannten "Standard Earths" liefern heute wohl die zuverlässigsten Sätze von Potentialparametern und Stationskoordinaten. Die Arbeit ist beeindruckend. Analytiker wie Izsak, Kozai, Gaposchkin etc. haben hier Pionierarbeit geleistet.

Man sollte aber bedenken, dass dieses Verfahren auf genäherten Lösungen von Differentialgleichungssystemen beruht. Besonders heikel wird das ganze Vorgehen, wenn sogenannte Resonanzen auftreten, d.h. wenn die Umlaufzeit des Satelliten und die Rotationsperiode der Erde kommensurabel sind. Es ist bekannt, dass in solchen Fällen eine Theorie erster Ordnung nicht mehr zulässig ist. Wie nahe bei einer solchen Resonanz diese Theorie noch gültig ist, ist schwierig zu sagen. De facto bleibt nicht viel anderes übrig, als sie zu verwenden, da eine befriedigende Theorie für diese Resonanzen für nahe Erdsatelliten bislang noch nicht existiert. Jedenfalls kann nicht ausgeschlossen werden, dass durch eine "falsche" Theorie Fehler in die Modellparameter eingeführt werden.

Ein weiterer Nachteil tritt bei der Behandlung der nicht gravitationellen Einflüsse zu Tage:

Die Trennung von gravitationellen und nicht-gravitationellen Einflüssen ist, unabhängig von der Methode, ein grosses Problem. Man kann aber in guten Treuen verschiedenartige Ansätze für diese Kräfte machen. Auch ist es zuweilen nicht möglich, sich zum vornherein z.B. für ein bestimmtes Strahlungsdruckmodell zu

entscheiden. Gerade in solchen Fällen wäre es wichtig zu experimentieren, d.h. möglichst viele verschiedene Modelle zu untersuchen. Eine analytische Methode ist in diesem Sinne aber nicht experimentierfreudig: Jedes weitere Modell erfordert eine neue, eingehende Analyse.

Es ist natürlich zu sagen, dass zur Zeit der Entwicklung der Satellitengeodäsie aus praktischen Erwägungen ein analytischer Weg gefunden werden musste: Selbst der (verglichen mit der numerischen Methode) bescheidene Rechenaufwand war an der Grenze dessen, was ein Computer damals bewältigen konnte.

1.2.2 Numerische Methoden

Bei den numerischen Methoden werden die Differentialgleichungen für den geozentrischen Ort des Satelliten numerisch integriert. Ebenso werden Differentialgleichungen für die partiellen Ableitungen dieses Ortes nach den Parametern aufgestellt und simultan mit den Gleichungen für den Ort numerisch integriert. (Für die Herleitung dieser Gleichungen siehe Kapitel 2)

Man arbeitet nicht mit Näherungslösungen. Die numerisch integrierten Werte sind, bis auf die bei jeder numerischen Integration auftretenden Fehler, korrekt. Schwierigkeiten bei der Darstellung von Satellitenbahnen sind dann eindeutig dem zugrundegelegten Modell zuzuschreiben. Eine Modelländerung bedeutet lediglich eine Änderung in der Berechnung einer Kraft (z.B. des Strahlungsdruckes).

Nachteilig ist es, dass eine Aufspaltung bei der Bestimmung der Modellparameter, wie sie sich bei analytischen Methoden anbietet, hier nicht zum vornherein möglich ist. Ueberhaupt scheinen solche numerische Methoden auf den ersten Blick nicht sehr transparent: Es ist im allgemeinen nicht möglich, vor einer Parameterbestimmung Prognosen über die Auswirkungen von bestimmten Parametern zu machen. Physikalische Schwierigkeiten (wie z.B. Resonanzen) treten als numerische Probleme zu Tage (z.B. schlecht bedingte Gleichungssysteme). Es ist klar, dass Verfahren entwickelt werden müssen, um auch den numerischen Methoden eine gewisse Transparenz zu verleihen.

Numerische Methoden wurden in den sechziger Jahren vor allem durch die Institutionen

- a) Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus Ohio,
unter der Leitung von R. Rapp,
- b) National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), U.S. Department of
Commerce

angewandt (siehe {3} bis {8}).

Während das SAO das Problem mehrheitlich als himmelsmechanisches Problem anging, stehen hier klassische geodätische Erwägungen im Vordergrund. Man versucht nämlich von allem Anfang an, terrestrische Gravitationsdaten bei den Lösungen mitzubersichtigen. Dies führt dazu, dass das Gravitationspotential der Erde nicht mehr "nur" nach Kugelfunktionen entwickelt wird. In beiden Fällen kommt eine Darstellung $V = U + T$ zur Anwendung, wobei U die normale Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zu einer Ordnung n ist und T ein Störpotential, dessen Parameter bestimmt resp. verbessert werden sollen. Dabei wird in beiden Fällen T so gewählt, dass zu einer ersten Schätzung der Parameter von T die terrestrischen Gravitationsanomalien herangezogen werden können. (Für genauere Informationen siehe z.B. {3} für a) und {8} für b).) Eine solche Wahl von T trägt zudem dem Umstand Rechnung, dass die Abweichungen des Erdpotentials von dem eines Rotationsellipsoides vermutlich Masseanomalien nahe der Erdoberfläche zuzuschreiben sind.

In neuerer Zeit wurden numerische Verfahren mit Erfolg bei der Auswertung von Doppler-Beobachtungen angewandt. Siehe die Arbeiten von Anderle et al z.B. {28}

In Europa wurden numerische Verfahren bislang am CNES in Toulouse entwickelt und angewandt unter der Leitung von C. Balmino und andern. Die dort entwickelten Verfahren wurden bei der Auswertung der Isagex-Beobachtungen mit Erfolg angewandt. Diese Beobachtungen dienen u.a. zur Berechnung eines globalen Satzes von Potentialparametern. (GRIM-Earth Models s. z.B. {26}, {27})

Es kann festgehalten werden, dass die Entwicklung solcher numerischer Methoden, verglichen mit den analytischen Methoden, noch ganz am Anfang steht. Andererseits werden mit grösster Wahrscheinlichkeit noch sehr viele numerische Konzepte ausgearbeitet werden, sind doch solche Methoden praktisch universell anwendbar.

Zum ersten Mal in der Geschichte der Satellitengeodäsie können auch kleinere Institute sinnvolle Beiträge zur Auswertung von Satellitenbeobachtungen beisteuern, ist doch der technische Aufwand bei der numerischen Lösung geodätischer Probleme relativ bescheiden. Voraussetzung dazu ist allerdings eine schnelle Rechenmaschine.

1.3 Zielsetzungen und Konzept

1.3.1 Zielsetzungen

In diesem Abschnitt werden einige Probleme angegeben, die als a priori Zielsetzungen vor Erstellen der dazu notwendigen Computerprogramme formuliert wurden. Anhand dieser Zielsetzungen erkennt man, dass es hier nicht primär darum geht, globale Lösungen im Sinne von SAO oder CNES zu suchen, sondern vielmehr darum, gezielte Fragen betreffend die numerischen Methoden zu stellen und zu beantworten. Die hier folgende Liste erhebt keinesfalls den Anspruch auf Vollständigkeit. Es ist im Gegenteil so, dass bei der Lösung von irgendwelchen Problemen sich automatisch neue Fragestellungen ergeben.

1. Eine genaue Untersuchung der allgemein verwendeten schnellen Integrationsverfahren bezüglich ihrer Eignung zur Behandlung der hier zu lösenden Probleme.
 - a) Untersuchung der Fehlerfortpflanzungsgesetze
 - b) Untersuchung der für numerische Methoden gefährlichen Unstetigkeiten des Strahlungsdruckes bei Licht-Schatten-Übergängen
2. Modellrechnungen zum Problemkreis "Trennung von gravitationellen und nicht-gravitationellen Einflüssen".

Beispiel

Simulation von Satellitenbeobachtungen unter Verwendung eines bestimmten Potentials und "komplizierter" Ansätze für Luftwiderstand und/oder Strahlungsdruck. Anschliessend Bestimmung von einigen Modellparametern bei Verwendung von "einfachen" Ansätzen für Luftwiderstand und/oder Strahlungsdruck. Einfluss auf Parameterbestimmung?

3. Modellrechnungen zum Thema "Mit welcher Genauigkeit können Modellparameter bei einer fest vorgegebenen Beobachtungskonfiguration bestimmt werden?"

Beispiel

Pageos-Beobachtungs-Kampagne

Gegeben: N beobachtende Stationen;

Station Nr. j liefert l_j Beobachtungen zu den Zeiten t_j , mittlerer Fehler für eine Beobachtung sei m_j ; $j = 1, \dots, N$

Modellrechnung: Ein Quasi-Pageos wird definiert, dessen Elemente möglichst gut mit den wirklichen übereinstimmen. Weiterhin werden für jede Station wahre geozentrische Koordinaten festgelegt. Nun werden für diese Konfiguration

mit numerischer Integration in einem ebenfalls vorgegebenen Kräftefeld zu den verlangten Zeiten für alle Stationen die erforderlichen Beobachtungen berechnet, wobei zufällige Fehler an die Beobachtungen angebracht werden.

Das Problem sei jetzt die Bestimmung der Stationskoordinaten: Vorerst müssen für alle Stationen "falsche" Koordinaten festgelegt werden. Davon ausgehend kann jetzt versucht werden, die "wahren" Koordinaten mit Hilfe dieser Methode zu ermitteln.

Dabei ist es z.B. möglich, die Effizienz kurzer und langer Bogen zu untersuchen.

Oder: Welchen Einfluss haben Modellfehler (z.B. falsche Potentialparameter) auf die Bestimmung geozentrischer Koordinaten?

Es sind hier viele Varianten denkbar!

4. Verwendung von Zimmerwalder-Pageos-Aufnahmen mit zwei Zielen:

- a) Erweiterung der Kenntnisse der bei der Reduktion von passiven Satelliten auftretenden Fehler (Streuungen von Aufnahme zu Aufnahme).
- b) Versuch, mit Hilfe dieser Beobachtungen möglichst lange zuverlässige Ephemeriden für diesen Satelliten zu rechnen.

Die Aufgabe 4 kann natürlich mit jeder an den Pageos-Beobachtungskampagnen beteiligten Station wiederholt werden.

5. Verwendung von allen im Rahmen des Short-Arc-Projektes {31} vorhandenen Pageos-Beobachtungen mit dem Ziel, geozentrische Koordinaten der beobachtenden Stationen zu bestimmen. Wegen der grossen Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche darf das Potential auch für relativ lange Bogen als bekannt vorausgesetzt werden. Hingegen ist eine genaue Untersuchung von Strahlungsdruckeffekten unumgänglich.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden dann schliesslich die Projekte 1, 4 und eine Voruntersuchung zu 5 durchgeführt.

Die Wahl von 1 stand dabei nie in Frage, ist doch ein sauberes Integrationsverfahren Voraussetzung für die Lösung aller übrigen Probleme.

Dass von den übrigen Projekten 4 und 5 ausgewählt wurden, liegt eigentlich auch auf der Hand, kann doch ein Verfahren erst realistisch beurteilt werden anhand der Erfolge in der Praxis. Im übrigen zeigte es sich, dass bei der Lösung dieser Aufgaben auch Probleme, wie sie in 2 dargelegt wurden, behandelt werden mussten.

1.3.2 Konzept

Zwei Kriterien waren ausschlaggebend:

1. Möglichst einfache mathematische Struktur
2. Das Konzept muss die Lösung aller in 1.3.1 aufgeführten Aufgaben ermöglichen.

Zu 1:

Für die Potentialdarstellung wird eine Entwicklung nach Kugelfunktionen gewählt. Auf eine Mitberücksichtigung von terrestrischen Schweremessungen wird verzichtet.

Die Störungen, die durch die Gezeitenwirkungen von Sonne und Mond verursacht werden, werden vernachlässigt. (Ein Einbauen dieser Effekte zu einem späteren Zeitpunkt ist jedoch in relativ einfacher Weise möglich.)

Die Fehlerrechnung wird einfach gestaltet: Jede Beobachtung liefert eine Fehlergleichung vom Typ (1). Aus den Fehlergleichungen wird das Normalgleichungssystem gebildet und gelöst. Gleichzeitig wird die Kovarianzmatrix berechnet. Mit dieser Matrix werden nach den wohlbekannt Formeln der Fehlertheorie die mittleren Fehler der Unbekannten ausgerechnet.

Zu 2:

Die Lösung aller in 1.3.1 aufgeführten Probleme bedingt das Erstellen von zwei Computer-Programmen:

1. Simulationsprogramm: Mit diesem Programm werden für eine vorgegebene Beobachtungskonfiguration und ein fest vorgegebenes Kräftefeld Satellitenbeobachtungen (zu gewissen Zeitpunkten) mit numerischer Integration berechnet.
2. Parameterbestimmungsprogramm: Als Eingabe in dieses Programm dienen entweder die vom 1. Programm simulierten Beobachtungen oder "tatsächliche" Beobachtungen. (Selbstverständlich müssen auch hier eine Beobachtungskonfiguration und ein Kräftefeld eingegeben werden.) Im weiteren muss dem Programm mitgeteilt werden, welche Parameter bestimmt werden sollen. Diese Parameterbestimmung erfolgt dann in einem Iterationsverfahren.

Die Notwendigkeit beider Programme ist ohne weiteres einzusehen bei der Behandlung der theoretischen Aufgaben in 1.3.1. Bei der Behandlung von "praktischen" Problemen scheint das Simulationsprogramm auf den ersten Blick überflüssig zu sein. Es hat sich jedoch gerade hier als unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen: Bei der Lösung jedes Problems muss ja ein Modell zugrunde gelegt werden. Modellunzulänglichkeiten äussern sich darin, dass die Satellitenbeobachtungen schlecht dargestellt werden. Dabei ist es im allgemeinen möglich, zu

sagen, weshalb die Residuen so und nicht anders aussehen. Meistens aber sind mehrere Vermutungen vorhanden. Man kann nun das Simulationsprogramm zu Erzeugung einer der tatsächlichen Beobachtungskonfiguration möglichst ähnlichen benützen. Als Kräftemodell wird ein Modell verwendet, das sich nur in genau einem Punkt (gestützt auf eine Vermutung) von dem bei der Verarbeitung der tatsächlichen Beobachtungen unterscheidet. Nun wird die Parameterbestimmung anstatt mit den reellen Beobachtungen mit den simulierten durchgeführt. Anhand der hier auftretenden Residuen ist es möglich, sehr rasch zu entscheiden, ob die betreffende Vermutung richtig ist oder nicht. So gesehen, ist das Simulationsprogramm genau das Mittel, das dem numerischen Verfahren die nötige Transparenz verleiht. Das enge Zusammenspiel tatsächliche Beobachtungen ↔ simulierte Beobachtungen ist ein wichtiges Charakteristikum des hier vorgestellten Verfahrens.

Damit ist das Konzept in groben Zügen vorgestellt. Es schien mir nicht sinnvoll, zwei "Superprogramme" zu entwickeln, die allen Aufgaben hätten gerecht werden können. Vernünftiger schien es, zwei Basisprogramme für Simulation und Parameterbestimmung zu entwickeln. Diese Basisprogramme sind so beschaffen, dass sie die allen Aufgaben gemeinsamen Teile enthalten. Ausserdem ist die Struktur so beschaffen, dass die absehbaren Erweiterungen für die Lösung irgendeiner der gegebenen Aufgaben einfach und lokalisiert erfolgen können. Dieses Vorgehen hat sich sehr gut bewährt.

Den beiden Programmen ist folgende Struktur zugrunde gelegt:

a) Beobachtungskonfiguration

- N Beobachtungsstationen; $N \leq 20$
- Beobachtungstypen
 1. Richtungsbeobachtungen (Photographische Aufnahmen)
 2. Distanzbeobachtungen (Laser)
 3. Radialgeschwindigkeiten (Doppler)
- Anzahl Beobachtungen: nur durch die Speicherkapazität der externen Speichermedien begrenzt.

b) Kräftemodell

- Erdpotential dargestellt durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen. Der Grad, bis zu welchem diese Entwicklung gehen soll, ist frei wählbar.
($n \leq 14$)
(Eine Erhöhung dieser Grenze ist problemlos.)
- Gravitationswirkungen von Sonne, Mond.

1. Teil Grundlagen

2. PARAMETERBESTIMMUNG MIT NUMERISCHEN METHODEN

Zunächst ist es sinnvoll, den in (1), Kap. 1 auftretenden Parametersatz zu unterteilen:

$\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$: Menge aller Modellparameter, 6 Anfangsbedingungen und Stationskoordinaten. (1)

$\{p_1, p_2, \dots, p_{m_1}\}$: Menge aller Modellparameter, d.h. Gesamtheit aller Parameter, die das Kräftefeld definieren. (2)

$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m_1+6}\}$: Menge aller Modellparameter plus die 6 Anfangsbedingungen des Satelliten (Ort und Geschwindigkeit des Satelliten zu einem bestimmten Zeitpunkt) (3)

$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$: Geozentrischer Radiusvektor des Satelliten im System, in dem die Integration durchgeführt wird, (Def. s. 2.2)

$\vec{R}_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})$: Geoz. Koordinaten der i-ten Station im gleichen System

$\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3})$: Geoz. Koordinaten der i-ten Station im erdfesten System (Def. s. 2.2)

$\vec{\Delta}_i = \vec{r} - \vec{R}_i = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$

Die in (1), Kap. 1 auftretenden partiellen Ableitungen können wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \kappa_\ell} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \Delta_j} \cdot \frac{\partial \Delta_j}{\partial \kappa_\ell} \quad (4)$$

Man kann nun 2 Fälle unterscheiden:

a) $\kappa_\ell = X_{in}$; $n = 1, 2, 3$

Dann folgt

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial X_{in}} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \Delta_j} \cdot \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_{in}} \quad (4a)$$

Die rechts auftretenden partiellen Ableitungen können berechnet werden, wenn \vec{r} und \vec{R} bekannt sind. Die explizite Form dieser Ableitungen wird in Kap. 3 gegeben.

$$b) \quad \kappa_{\rho} = \varepsilon_n ; n = 1, 2, \dots, m_1 + 6$$

Es folgt

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \varepsilon_n} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \Delta_j} \frac{\partial x_j}{\partial \varepsilon_n} \quad (4b)$$

Für den rechts auftretenden Vektor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_n}$ müssen im nächsten Paragraphen Differentialgleichungen, die sogenannten Variationsgleichungen hergeleitet werden.

2.1 Variationsgleichungen

Die durch den Parametersatz (2) definierte Bahn wird Referenzbahn genannt.

$$\vec{r} = \vec{r}(t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m_1+6}) \quad (5)$$

Diese Bahn sei Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(t; \vec{r}, \dot{\vec{r}}, p_1, \dots, p_{m_1}) \quad (6)$$

Durch Differentiation von (6) erhält man:

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \varepsilon_n} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \varepsilon_n} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{f}}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \varepsilon_n} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varepsilon_n}$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \varepsilon_n} = A \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_n} + B \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \varepsilon_n} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varepsilon_n} \quad (7)$$

Mit den Matrizen A und B:

$$A_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} ; \quad B_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k} \quad (7a)$$

Aus der Struktur dieser Gleichungen ist ersichtlich, dass diese simultan mit den Bewegungsgleichungen integriert werden müssen.

Die Matrix B ist gleich der Nullmatrix, falls keine geschwindigkeitsabhängigen Kräfte vorhanden sind. Ist ε_n eine der 6 Anfangsbedingungen, so ist der Vektor $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varepsilon_n}$ gleich dem Nullvektor.

Anmerkung: Bei der hier gegebenen Ableitung wurde angenommen, ε_n sei nicht explizite zeitabhängig.

Für die explizite Berechnung der in (7) auftretenden Terme siehe Abschnitt 2.4.

Anfangsbedingungen:

Zum Start der Integration müssen noch die folgenden Werte bekannt sein:

$$\left. \frac{\vec{r}}{\partial \epsilon_n} \right|_{t=t_0} ; \quad \left. \frac{\dot{\vec{r}}}{\partial \epsilon_n} \right|_{t=t_0} \quad (8)$$

a) Ist $\epsilon_n = p_\ell$ (Modellparameter), dann ist leicht einzusehen, dass beide Vektoren in (8) gleich dem Nullvektor sind.

b) Ist $\epsilon_n =$ einer der 6 Anfangswerte der Primärgleichungen:

$$1) \quad \epsilon_n = x_{0,k}, \text{ dann } \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0,k}} = \vec{0}_k ; \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{x}_{0,k}} = \vec{0}$$

$$2) \quad \epsilon_n = \dot{x}_{0,k}, \text{ dann } \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0,k}} = \vec{0} ; \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{x}_{0,k}} = \vec{0}_k$$

Wobei: $\vec{0}$: Nullvektor

$\vec{0}_k$: Vektor gebildet aus der k-ten Spalte der Einheitsmatrix

Der analytische Teil der Arbeit ist hier beschränkt auf die Berechnung der Matrizen A, B und der Vektoren \vec{f} und $\frac{\partial \vec{f}}{\partial p_\ell}$. Obwohl dies, wie man in den nächsten beiden Kapiteln sehen wird, recht mühsam ist, ist der Unterschied gegenüber den Rechnereien bei analytischen Verfahren wohltuend. Allerdings wird dieser Vorteil mit einem grossen numerischen Rechenaufwand bezahlt, bedeutet doch die Bestimmung jedes Parameters ϵ_n die numerische Integration eines Differentialgleichungssystems der Ordnung 2 und des Ranges 3.

2.2 Koordinatensysteme

Im allgemeinsten Fall (Modell = Wirklichkeit) werden die folgenden Koordinatensysteme gebraucht.

1. Terrestrisches System KS 1

Definition: Kartesisches Rechtssystem

Ursprung: Schwerpunkt der Erde

z-Achse: mittlerer Pol der Erde 1900-1905 (IOC-Pol)

x-Achse: $\perp z$, $75^{\circ}03'55''94$ östlich des U.S. Naval Observatory
(Definition nach International Polar Motion Service (IPMS).)

Verwendung: Geozentrische Stationskoordinaten, Potentialentwicklung der Erde werden bezüglich eines solchen Systems gegeben.

2. Bahnsystem KS 2

Definition: Kartesisches Rechtssystem

Ursprung: Schwerpunkt der Erde

z-Achse: mittlerer Pol zu einer Epoche T_0

x-Achse: mittlerer Frühlingspunkt zu einer Epoche T_0

Dabei ist T_0 im Prinzip frei wählbar.

Verwendung: In diesem System erfolgt die Integration der Bewegungsgleichungen.

Transformationen KS 1 \leftrightarrow KS 2

Es sei: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$: Position des Satelliten im KS 2
 $\vec{x} = (x, y, z)$: Position des Satelliten im KS 1

Dann gilt:

$$\vec{x} = \mathbf{X}^{-1} \Theta \mathbf{N} \mathbf{P} \vec{r} = \chi \vec{r} \quad (9)$$

Mit \mathbf{P} = Präzessionsmatrix; präzediert das mittlere Äquatorialsystem der Epoche T_0 auf das der Epoche t

\mathbf{N} = Nutationsmatrix; Transformation auf momentanen Pol

Θ = Sternzeitmatrix

\mathbf{X} = Polschwankungsmatrix, \mathbf{X}^{-1} : Transformation vom momentanen Pol auf den mittleren Pol 1900-1905

Da alle hier auftretenden Matrizen Drehmatrizen sind, gilt:

$$\chi^{-1} = \chi^T \quad (10)$$

Somit gilt für die inverse Transformation:

$$\vec{r} = \chi^T \vec{x} \quad (11)$$

Zur Berechnung der Beobachtungen sind noch die Stationskoordinaten und Geschwindigkeiten im KS 2 nötig:

$$\vec{R} = (R_1, R_2, R_3) : \text{Position einer Station im KS 2}$$

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) : \text{Position einer Station im KS 1}$$

Dann gilt:

$$\vec{R} = \chi^T \vec{X} \quad (11a)$$

Berechnung der Geschwindigkeit \vec{V} der Station im KS 2:

Es sei:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation

\vec{V} = Stationsgeschwindigkeit im KS 2

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}} = \omega P^T N^T O^T \begin{pmatrix} -X_2' \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dabei kann ω mit Hilfe von {9} in arc/ksec berechnet werden zu

$$\omega = (1.002737909265 + .589 \cdot 10^{-10} T_U) \frac{2\pi}{86.4} \quad (14)$$

T_U = Zeit in Julianischen Jahrhunderten seit 1900 Jan.0.

KS 1 und KS 2 sind die einzigen im Programm benötigten Koordinatensysteme.

Bei vielen Simulationsmodellen ist es möglich, Präzession, Nutation und Polschwankung zu vernachlässigen. Die Matrix χ ist dann einfach gleich der Sternzeitmatrix.

Für die Herleitung der Differentialgleichungen im KS 2 muss noch ein Inertialsystem (IS) definiert werden. Ursprung und Orientierung sind aber in diesem Zusammenhang nicht von Bedeutung. Aus Gründen der Einfachheit soll aber angenommen werden, dass das IS parallel zum KS 2 orientiert ist.

2.3 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Die folgenden auf den Satelliten wirkenden Kräfte sollen berücksichtigt werden: Gravitationswirkung von Erde, Sonne, Mond, Luftwiderstand, Strahlungsdruck. In weiter verfeinerten Modellen könnten etwa noch Gezeitenwirkungen berücksichtigt werden. Der Einbau dieser Effekte ist jedoch vorderhand noch nicht vorgesehen.

Bezeichnungen:

- \vec{x}_S : Position des Satelliten bezüglich IS
- \vec{x}_δ : Position der Erde bezüglich IS
- \vec{x}_\odot : Position der Sonne bezüglich IS
- \vec{x}_\ominus : Position des Mondes bezüglich IS
- G : Gravitationskonstante
- $m_\odot, m_\ominus, m_\delta$: Massen der entsprechenden Himmelskörper
- m_S : Die Satellitenmasse wird gegenüber den Massen aller beteiligten Himmelskörper als vernachlässigbar angenommen
- \vec{b}_L, \vec{b}_S : Kräfte pro Masseneinheit infolge Luftwiderstand, Strahlungsdruck

$$\vec{r} = \vec{x}_S - \vec{x}_\delta = \text{Geoz. Ortsvektor des Satelliten}$$

$$\vec{r}_\odot = \vec{x}_\odot - \vec{x}_\delta = \text{Geoz. Ortsvektor der Sonne}$$

$$\vec{r}_\ominus = \vec{x}_\ominus - \vec{x}_\delta = \text{Geoz. Ortsvektor des Mondes}$$

Für die Gravitationswirkung der Erde auf den Satelliten, die ja durch eine Entwicklung (nach harmonischen Fkten) im KS 1 gegeben ist, wird im KS 1 formal der Ansatz $\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right)$ gemacht.

Mit diesen Bezeichnungen gilt im IS:

$$\ddot{\vec{x}}_S = - \frac{Gm_\odot}{|\vec{x}_S - \vec{x}_\odot|^3} (\vec{x}_S - \vec{x}_\odot) - \frac{Gm_\ominus}{|\vec{x}_S - \vec{x}_\ominus|^3} (\vec{x}_S - \vec{x}_\ominus) + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \vec{b}_L + \vec{b}_S \quad (15)$$

$$\ddot{\vec{x}}_\delta = - \frac{Gm_\odot}{|\vec{x}_\delta - \vec{x}_\odot|^3} (\vec{x}_\delta - \vec{x}_\odot) - \frac{Gm_\ominus}{|\vec{x}_\delta - \vec{x}_\ominus|^3} (\vec{x}_\delta - \vec{x}_\ominus) + \text{Term proportional } Gm_S \quad (16)$$

(15) - (16) liefert nun die gewünschte Differentialgleichung im KS 2:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \vec{b}_L + \vec{b}_S - Gm_\odot \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}_\odot}{|\vec{r} - \vec{r}_\odot|^3} + \frac{\vec{r}_\odot}{|\vec{r}_\odot|^3} \right\} - Gm \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}_\ominus}{|\vec{r} - \vec{r}_\ominus|^3} + \frac{\vec{r}_\ominus}{|\vec{r}_\ominus|^3} \right\} \quad (17)$$

Bei einfacheren Modellen können natürlich einige Terme in (17) fehlen.

Für die explizite Berechnung der in (17) auftretenden Terme siehe Abschnitt 2.4.

2.4 Technischer Anhang

2.4.1 Explizite Berechnung der in (17) auftretenden Terme

1. $\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$

Das Potential ist als Funktion der Koordinaten im KS 1 gegeben. Bei jedem Integrationsschritt muss demnach die Transformation (9) durchgeführt werden:

$$(9) : \vec{x} = \chi \vec{r}$$

Nun gelte:

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= r ; \lambda = \arctan \frac{y}{x} ; \beta = \arcsin \frac{z}{r} \\ \vec{x}^T &= (x, y, z) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda \cos \beta \\ y &= r \sin \lambda \cos \beta \\ z &= r \sin \beta \end{aligned} \quad (19)$$

Dann gilt für das Potential:

$$V = \frac{Gm_e}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \beta) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] \right\} \quad (20)$$

Dabei sind:

- G : Gravitationskonstante
- m_e : Erdmasse
- a : Äquatorradius der Erde
- N : Obere Grenze für die Entwicklung
- C_{nm}, S_{nm} : Potentialkoeffizienten
- $P_n^m(x)$: Zugeordnete Kugelfunktionen

Die Kugelfunktionen könnten noch normiert werden. Bei dieser numerischen Methode ist eine Normierung aber bedeutungslos. Es wird daher konsequent mit nicht normierten Funktionen (und Koeffizienten) gerechnet, da sich so die einfachsten Definitionsgleichungen resp. Rekursionsformeln ergeben.

Definitionsgleichungen für $P_n^m(x)$

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}(n-m) \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-m-2k)!} x^{n-m-2k} \quad (21)$$

wo $\{z\}$ die grösste ganze Zahl $\leq z$ bedeutet.

Eine weitere äquivalente Definition ist:

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (22)$$

Einige Relationen, die im folgenden benötigt werden:

Berechnung von Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} P_n^m(x) = -m \frac{x}{1-x^2} P_n^m(x) + \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^{m+1}(x) \quad (23)$$

Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} P_n^n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} (1-x^2)^{n/2} \\ P_n^{n-1}(x) &= \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^n(x) \\ P_n^{m+2}(x) - 2(m+1) \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1) P_n^m(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Numerische Berechnung der $P_n^m(x)$

Diese Berechnung kann entweder direkt mit der Definitionsgleichung (21) oder mit den Rekursionsformeln (24) erfolgen. Beide Möglichkeiten liefern befriedigende Resultate.

Für einen speziellen Satelliten ist es nun meistens so, dass die Entwicklung (20) bis zu einer gewissen Ordnung N vollständig verlangt wird und zusätzlich einige Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden sollen. Da die Berechnung der $P_n^m(x)$ mit (24) etwas schneller ist, wenn alle $P_n^m(x)$, $m = 0, \dots, n$ verlangt werden, wird für den vollständigen Teil mit den Rekursionsformeln gerechnet.

Für die Spezialterme jedoch ist die Verwendung von (21) sinnvoller. Selbstverständlich werden die in (21) resp. (24) vorkommenden Fakultäten und Zweierpotenzen nur einmal berechnet und in einen Vektor abgespeichert. Dort können sie bei jedem Integrationsschritt geholt werden.

Berechnung der Ableitungen im KS 1

Diese Berechnung erfolgt mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & \lambda_x & \beta_x \\ r_y & \lambda_y & \beta_y \\ r_z & \lambda_z & \beta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\beta \end{pmatrix} \quad (25)$$

wobei $r_x = \frac{\partial r}{\partial x}$, $V_r = \frac{\partial V}{\partial r}$ etc.

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}$$

$$\lambda_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \lambda_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \lambda_z = 0 \quad (26)$$

$$\beta_x = \frac{-xz}{r^2(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \beta_y = \frac{-yz}{r^2(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \beta_z = \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{r^2}$$

Berechnung der V_r, V_λ, V_β

Zu diesem Zweck schreibt man am besten:

$$(20): V = \frac{Gm_e}{r} + \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n U_{nm} \quad (a)$$

(27)

$$U_{nm} = Gm_e \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n^m(\sin\beta) \{C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)\} \quad (b)$$

Nun ist:

$$\frac{\partial U_{nm}}{\partial r} = -(n+1) \frac{Gm_e}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial U_{nm}}{\partial \lambda} = m \frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \{S_{nm} \cos m\lambda - C_{nm} \sin m\lambda\} \quad (29)$$

$$\frac{\partial U_{nm}}{\partial \beta} = \frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{dP_n^m(\sin\beta)}{d\beta} \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

Im weiteren gilt:

$$\frac{dP_n^m}{d\beta} = \cos\beta \frac{dP_n^m}{d(\sin\beta)}$$

Damit und mit (23) folgt dann:

$$\frac{\partial U_{nm}}{\partial \beta} = \frac{G_m e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{-m \tan\beta P_n^m(\sin\beta) + P_n^{m+1}(\sin\beta)\} \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \quad (30)$$

Es versteht sich, dass die jetzt folgenden Summationen so zeitsparend wie möglich durchgeführt werden. Das Prinzip, das man dazu beachten muss, ist einfach: Die für eine Summation konstanten Faktoren dürfen erst nach der Summation anmultipliziert werden.

Damit kann die Matrixoperation (25) durchgeführt werden. Die Beschleunigungen im KS 2 schliesslich erhält man, indem man auf die linke Seite von (25) noch die Transformation (11) anwendet:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\right) = \chi^T \begin{pmatrix} V \\ V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix} \quad (31)$$

Numerischer Trick:

Die Ableitungen des Hauptterms von V , $\left(\frac{G_m e}{r}\right)$, werden direkt im KS 2 durchgeführt. Damit werden die durch die Matrizenoperationen eingeführten Fehler für die Rechnung unbedeutend.

2. \vec{b}_L, \vec{b}_S

Die Ansätze für diese Kräfte können von Modell zu Modell sehr stark variieren, so dass in diesem Einführungs-Kapitel nicht viel dazu zu bemerken ist.

3. Gravitationseinflüsse von Sonne und Mond

Die Ansätze für diese Kräfte sind schon in (17) gegeben. Die Vektoren \vec{r}_o, \vec{r}_G werden im allgemeinen mit den im Explanatory Supplement {9} gegebenen mittleren Elementen von Sonne und Mond berechnet. Für gewisse Modelle sind natürlich auch einfachere Ansätze (z.B. Kreisbahnen) denkbar.

2.4.2 Rechte Seiten der Variationsgleichungen (7)

Die Variationsgleichungen, aufgestellt im KS 2 lauten ((7), (7a)):

$$\left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \epsilon_j}\right) = A \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon_j} + B \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \epsilon_j}\right) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \epsilon_j} \quad (32)$$

$$A = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & f_{1x_3} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} & f_{2x_3} \\ f_{3x_1} & f_{3x_2} & f_{3x_3} \end{pmatrix} ; \quad B = \dots \quad (33)$$

Auch hier können nur die Gravitationseinflüsse behandelt werden, da die Ansätze für die anderen Kräfte zu stark variieren. Die Gravitationskräfte von Erde, Sonne und Mond in (17) sind additiv, so dass ihre Ableitungen hier getrennt behandelt werden können. Für diese Kräfte gilt immer $B = 0$. Es muss also bloss die Berechnung der Matrix A und des Vektors $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \epsilon_j}$ gegeben werden.

$$1. \quad \vec{f}^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) = (V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3})$$

$$A = \begin{pmatrix} V_{x_1x_1} & V_{x_1x_2} & V_{x_1x_3} \\ V_{x_1x_2} & V_{x_2x_2} & V_{x_2x_3} \\ V_{x_1x_3} & V_{x_2x_3} & V_{x_3x_3} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \vec{f}^T}{\partial \epsilon_j} = (V_{x_1\epsilon_j}, V_{x_2\epsilon_j}, V_{x_3\epsilon_j}) \quad (34)$$

Da das Erdpotential bezüglich dem KS 1 gegeben ist, werden die entsprechenden Ableitungen nach den Koordinaten x, y, z des KS 1 berechnet. Anschliessend muss die so erhaltene Matrix ins KS 2 transformiert werden:

Es sei (mit den Bezeichnungen von (18), (19)):

$$A' = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \vec{f}^T}{\partial \epsilon_j} = (V_{x\epsilon_j}, V_{y\epsilon_j}, V_{z\epsilon_j}) \quad (35)$$

Nun ist nach (9):

$$\vec{x} = \chi \vec{r}, \quad \vec{r} = \chi^T \vec{x} \quad (9)$$

$$V_{x_i} = V_x \frac{\partial x}{\partial x_i} + V_y \frac{\partial y}{\partial x_i} + V_z \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (36)$$

wobei die $\frac{\partial x, y, z}{\partial x_i}$ noch mit den Gleichungen (9) berechnet werden.

Für das Transformationsverhalten des Vektors erhält man also:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \epsilon_j} = \chi^T \frac{\partial \vec{f}'}{\partial \epsilon_j} = \chi^T \begin{pmatrix} V_{x, j} \\ V_{y, j} \\ V_{z, j} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Mit analogen Ueberlegungen erhält man für die Transformation der Matrix:

$$A = \chi^T A' \chi \quad (38)$$

Man kann sich von der Richtigkeit von (38) überzeugen, indem man diese Matrizenmultiplikation für ein Element von A ausführt und berücksichtigt, dass

$$\chi_{ik} = \frac{\partial x, y, z}{\partial x_k} \text{ ist und } \frac{\partial^2 x, y, z}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \text{ ist.}$$

Es sei:

$$C = \begin{pmatrix} r_x & \lambda_x & \beta_x \\ r_y & \lambda_y & \beta_y \\ r_z & \lambda_z & \beta_z \end{pmatrix} \quad (39)$$

Damit kann (25) geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\beta \end{pmatrix} \quad (25')$$

Es sei:

$$v \in \{x, y, z\}$$

Eine Spalte der Matrix A' erhält man durch Differentiation von (25) nach v:

$$\begin{pmatrix} V_{xv} \\ V_{yv} \\ V_{zv} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ C \begin{pmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\beta \end{pmatrix} \right\} \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} V_{xv} \\ V_{yv} \\ V_{zv} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ C \right\} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\beta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} V_{rr} & V_{r\lambda} & V_{r\beta} \\ V_{r\lambda} & V_{\lambda\lambda} & V_{\lambda\beta} \\ V_{r\beta} & V_{\lambda\beta} & V_{\beta\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\beta \end{pmatrix} \quad (41)$$

Die Berechnung der beiden Vektoren auf der rechten Seite von (41) wurde schon im letzten Abschnitt gegeben. Die restlichen Grössen berechnen sich zu:

a)
$$\underline{\frac{\partial}{\partial v} \{C\}}$$

$$r_{xx} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \quad ; \quad r_{yy} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \quad ; \quad r_{zz} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

$$r_{xy} = -\frac{xy}{r^3} \quad ; \quad r_{xz} = -\frac{xz}{r^3} \quad ; \quad r_{yz} = -\frac{yz}{r^3}$$

$$\lambda_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \lambda_{yy} = -\lambda_{xx} \quad ; \quad \lambda_{zz} = 0$$

$$\lambda_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \lambda_{xz} = \lambda_{yz} = 0$$

(42)

$$\beta_{xx} = \frac{z}{r^2(x^2+y^2)^{1/2}} \left\{ \frac{2x^2}{r^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2} \right\} \quad ; \quad \beta_{yy} = \frac{z}{r^2(x^2+y^2)^{1/2}} \left\{ \frac{2y^2}{r^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2} \right\}$$

$$\beta_{zz} = -\frac{2z(x^2+y^2)^{1/2}}{r^4}$$

$$\beta_{xy} = \frac{xyz}{r^2(x^2+y^2)^{1/2}} \left\{ \frac{2}{r^2} + \frac{1}{x^2+y^2} \right\} \quad ; \quad \beta_{xz} = \frac{x}{r^2(x^2+y^2)^{1/2}} \left\{ -1 + \frac{2z^2}{r^2} \right\}$$

$$\beta_{yz} = \frac{y}{r^2(x^2+y^2)^{1/2}} \left\{ -1 + \frac{2z^2}{r^2} \right\}$$

b) 2. Ableitungen des Erdpotentials nach Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial r^2} = (n+2)(n+1) \frac{G_m e}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m(\sin\beta) \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial \lambda^2} = -m^2 \frac{G_m e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m(\sin\beta) \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial \beta^2} = \frac{G_m e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left\{ P_n^{m+2}(\sin\beta) - (2m+1) \tan\beta P_n^{m+1}(\sin\beta) + \left(m^2 \tan^2\beta - \frac{m}{\cos^2\beta}\right) P_n^m(\sin\beta) \right\} \cdot \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

(43)

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial r \partial \lambda} = -(n+1)m \frac{G_m e}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m(\sin\beta) \{S_{nm} \cos m\lambda - C_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial r \partial \beta} = -(n+1) \frac{G_m e}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{-m \tan\beta P_n^m(\sin\beta) + P_n^{m+1}(\sin\beta)\} \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{nm}}{\partial \lambda \partial \beta} = m \frac{G_m e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{-m \tan\beta P_n^m(\sin\beta) + P_n^{m+1}(\sin\beta)\} \{S_{nm} \cos m\lambda - C_{nm} \sin m\lambda\}$$

Damit sind alle Beziehungen gegeben, die zur Berechnung der Matrix A benötigt werden.

Für die Berechnung des Vektors $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varepsilon_j}$ müssen noch die folgenden Ableitungen berechnet werden:

| | $\epsilon_j = C_{nm}$ | $\epsilon_j = S_{nm}$ |
|---|---|---|
| $\frac{\partial^2 V}{\partial \epsilon_j \partial r} =$ | $-(n+1) \frac{Gm_e}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \cos m\lambda$ | $-(n+1) \frac{Gm_e}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \sin m\lambda$ |
| $\frac{\partial^2 V}{\partial \epsilon_j \partial \lambda} =$ | $-m \frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \sin m\lambda$ | $m \frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m \cos m\lambda$ |
| $\frac{\partial^2 V}{\partial \epsilon_j \partial \beta} =$ | $\frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{-m \tan \beta P_n^{m+P_n^{m+1}}\} \cos m\lambda$ | $\frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{-m \tan \beta P_n^{m+P_n^{m+1}}\} \sin m\lambda$ |

(44)

(Ist ϵ_j eine der Anfangsbedingungen, so ist ja $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \epsilon_j} = 0$)

Die Transformationen (25), (37) liefern dann die gewünschten Vektoren.

2. \vec{f} = Gravitationseinfluss von Sonne oder Mond

Es sei:

$$\vec{r}_P \in \{\vec{r}_o, \vec{r}_c\}$$

\vec{r}_P gegeben im Koordinatensystem KS 2

Dann ist (s. Gleichung (17)):

$$\vec{r}_P = -Gm_P \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^3} - \frac{\vec{r}_P}{|\vec{r}_P|^3} \right\}$$

Hieraus folgt für die Matrix A:

$$A_P = -\frac{Gm_P}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^3} \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \frac{(x_1-x_{P1})^2}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & -3 \frac{(x_1-x_{P1})(x_2-x_{P2})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & -3 \frac{(x_1-x_{P1})(x_3-x_{P3})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} \\ -3 \frac{(x_1-x_{P1})(x_2-x_{P2})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & 1-3 \frac{(x_2-x_{P2})^2}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & -3 \frac{(x_2-x_{P2})(x_3-x_{P3})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} \\ -3 \frac{(x_1-x_{P1})(x_3-x_{P3})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & -3 \frac{(x_2-x_{P2})(x_3-x_{P3})}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} & 1-3 \frac{(x_3-x_{P3})^2}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Werden nun die Koordinaten von Sonne und Mond mit den im Explanatory Supplement angegebenen mittleren Elementen berechnet, so beziehen sich diese Koordinaten auf das Aequatorialsystem der Epoche. Man muss dann die hier berechnete Matrix A_p zur Matrix $\Theta^T A'$ addieren und die weiteren Matrizenoperationen mit dieser Summe ausführen. Dieses Vorgehen kostet weniger Zeit als die Berechnung der Position der Himmelskörper im KS 2.

Nachzutragen bleibt noch, dass die 2. Ableitungen des 1. Terms des Potentials der Erde direkt im KS 2 berechnet werden.

Mit den hier gegebenen Formeln ist die Auswertung der rechten Seiten für alle Variationsgleichungssysteme für jeden Integrationszeitpunkt möglich. Durch numerische Integration erhält man die gewünschten Ableitungen als Funktionen der Zeit:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon_j}(t) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon_j}(t)$$

3. BEOBACHTUNGSMODELLE UND PARAMETERBESTIMMUNG

In diesem Kapitel wird die Arbeitsweise des Simulations- und des Parameterbestimmungsprogrammes vorgestellt. Es ist das Schicksal solcher Programme, dass sie nie "fertig" sind. Es wird daher hier nur auf die Grundstruktur beider Programme eingegangen. Spezialitäten wie Ansätze für den Strahlungsdruck oder Bestimmung systematischer Zeitdifferenzen zwischen den einzelnen Beobachtungsstationen werden erst im zweiten Teil, bei der praktischen Anwendung des Verfahrens, besprochen.

Vorgängig muss jedoch noch gezeigt werden, wie aus den numerisch integrierten geozentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t)$ die in den Beobachtungsgleichungen ((1), Kap. 1) auftretenden theoretischen Werte für die Beobachtungen ϕ und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial \kappa_l}$ *) errechnet werden. Dieselben Formeln zur Berechnung von ϕ gelten natürlich auch für die im Simulationsprogramm berechneten simulierten Beobachtungen. Der Leser, der an diesen eher technischen Aspekten nicht interessiert ist, kann direkt im Abschnitt 3.3 weiterlesen.

*) Indices i, k von ϕ_{ik} werden hier und im folgenden weggelassen, falls keine Missverständnisse möglich sind.

3.1 Definition und Berechnung der einzelnen Beobachtungen ϕ

Die numerische Integration liefert die geozentrische Bahn im KS 2:

$$\vec{r}(t) \quad , \quad \dot{\vec{r}}(t)$$

Für den Zeitpunkt $t = t_i$ werde nun für eine Station mit den Koordinaten im KS 1

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

eine Beobachtung verlangt. Dabei sind als Beobachtungstypen Richtungsbeobachtungen, Laserbeobachtungen oder Dopplerbeobachtungen vorgesehen. Die Erzeugung solcher Beobachtungen wird nachstehend für jeden Beobachtungstyp angegeben.

a) Richtungsbeobachtungen

Beobachtungsgrößen sind die topozentrische Rektaszension α und Deklination δ im Äquatorialsystem der Epoche T_0 .

Man muss also zunächst die Koordinaten der Beobachtungsstation im KS 2 berechnen:

$$(11a): \vec{R}(t_i) = \chi^T \vec{X}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} |\vec{\Delta}| \cos\alpha & \cos\delta \\ |\vec{\Delta}| \sin\alpha & \cos\delta \\ |\vec{\Delta}| \sin\delta \end{pmatrix} = \vec{r}(t_i) - \vec{R}(t_i) \quad (46)$$

$\rightarrow \alpha, \delta, \Delta$

b) Distanzbeobachtungen

Als Beobachtungsgröße bei Laser-Beobachtungen gilt die topozentrische Distanz Δ .

$$(11a): \vec{R}(t_i) = \chi^T \vec{X}$$
$$\Delta = |\vec{r}(t_i) - \vec{R}(t_i)| \quad (47)$$

c) Dopplerbeobachtungen

Als Beobachtungsgrösse gilt hier die topozentrische Radialgeschwindigkeit v_r des Satelliten.

$$(11a): \vec{R}(t_i) = \chi^T \vec{X}$$

$$(13): \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}} = \omega P^T N^T \Phi^T \begin{pmatrix} -X'_2 \\ X'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei nach (12)

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \chi \cdot \vec{X}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} &= \vec{r}(t_i) - \vec{R}(t_i) ; \quad |\vec{\Delta}| = \Delta \\ \vec{u} &= \dot{\vec{r}}(t_i) - \dot{\vec{R}}(t_i) \end{aligned}$$

Für die gesuchte Radialgeschwindigkeit erhält man dann:

$$\underline{v_r} = \frac{1}{\Delta} \vec{\Delta} \cdot \vec{u} \tag{48}$$

Zu diesen Dopplerbeobachtungen ist zu bemerken, dass bei reellen Beobachtungen nicht die Radialgeschwindigkeit Beobachtungsgrösse ist, sondern vielmehr die topozentrische Distanzdifferenz während eines Zeitintervalles dt . Bei der Auswertung solcher Daten müssten die Programme entsprechend modifiziert werden. Für Simulationsrechnungen ist die eingeführte Vereinfachung bedeutungslos, besteht sie doch lediglich im Ersetzen eines Differenzenquotienten durch einen Differentialquotienten.

3.2 Berechnung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial \kappa_\ell}$

$$1. \text{ Transformation } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon_j} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_j}$$

Bedeutung von ϵ_j siehe (3), Kapitel 2

a) Richtungsbeobachtungen ($\phi \in \{\alpha, \delta\}$)

Mit der Transformation (46) erhält man

$$\Delta, \alpha, \delta$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon_j} &= \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_j} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \epsilon_j} &= \sum_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_j} \end{aligned} \tag{49}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$ können den Beziehungen (26) entnommen werden.

b) Distanzbeobachtungen

Berechnung von Δ mittels (47).

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \epsilon_j} = \sum_i \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_j} \tag{50}$$

Wiederum folgt $\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}$ aus (26)

c) Dopplerbeobachtungen

Es ist (siehe (48))

$$\vec{v}_r = \frac{1}{\Delta} \vec{\Delta} \vec{u} \quad \vec{u} = \vec{r} - \vec{V}; \quad \vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{R}$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial \epsilon_j} = \sum_i \left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_j} + \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \epsilon_j} \right) \tag{51}$$

Dabei ist:

$$\frac{\partial v_r}{\partial x_i} = - \frac{x_i - R_i}{\Delta^2} v_r + \frac{u_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, 3 \quad (52)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{\Delta} (x_i - R_i)$$

2. Berechnung von $\frac{\partial \phi}{\partial X_i}$; X_i : eine Koordinate einer Beobachtungsstation

Um auch noch die Stationskoordinaten (besser: deren Verbesserungen) rechnen zu können, müssen noch die Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial X_i}$ bekannt sein. Dabei sind die X_i die Koordinaten im erdfesten System (KS 1).

Es ist (s. (11a) und (13)):

$$\vec{R} = \chi^T \vec{X} \quad (53)$$

$$\vec{V} = \omega P^T N^T \Theta^T \begin{pmatrix} -X'_1 \\ X'_2 \\ 0^1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\vec{X}' = \chi \vec{X} \quad (55)$$

1. Richtungsbeobachtungen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X_i} = \sum_k \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta_k} \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_i} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial X_i} = \sum_k \frac{\partial \delta}{\partial \Delta_k} \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_i} \quad (57)$$

Die $\frac{\partial \alpha}{\partial \Delta_k}$, $\frac{\partial \delta}{\partial \Delta_k}$ können (26) entnommen werden.

Nun ist:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} &= \vec{r} - \vec{R} = \vec{r} - \chi^T \vec{X} \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{\Delta}}{\partial X_i} &= - \frac{\partial \vec{R}}{\partial X_i} = - \chi^T \frac{\partial \vec{X}}{\partial X_i} = - \chi^T \vec{\delta}_i \quad (i\text{-te Kolonne von } \chi) \quad (58) \end{aligned}$$

wobei $\vec{\delta}_i$ der aus der i -ten Zeile der Einheitsmatrix gebildete Vektor ist.

2. Laserbeobachtungen

$$\frac{\partial \Delta}{\partial X_i} = \sum_k \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_k} \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_i} \quad (59)$$

Dieser Ausdruck kann mit (26), (58) berechnet werden,

3. Dopplerbeobachtungen

$$\frac{\partial v_r}{\partial X_i} = \sum_k \frac{\partial v_r}{\partial \Delta_k} \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_i} + \frac{\partial v_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \quad (60)$$

$\frac{\partial v_r}{\partial \Delta_k}, \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_i}$ wurden schon berechnet. Die Ableitungen $\frac{\partial v_r}{\partial u_k}$ können (52) entnommen werden:

$$\frac{\partial v_r}{\partial u_k} = \frac{\partial v_r}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (61)$$

Nun zur Berechnung von $\frac{\partial u_k}{\partial X_i}$

Es ist:

$$\vec{u} = \vec{r} - \omega P^T N^T \Theta^T \cdot \begin{pmatrix} -X'_2 \\ X'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anstatt nun hier nochmals die Kettenregel zu benutzen (und zuerst nach X'_1, X'_2 abzuleiten), scheint es sinnvoller, die Matrixmultiplikation (55) durchzuführen.

x_P, y_P : Koordinaten des momentanen Pols in bezug auf den mittleren Pol der Epoche 1900-05:

$$X'_1 = X_1 + x_P X_3$$

$$X'_2 = X_2 - y_P X_3$$

Damit ist also:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} = -\omega P^T N^T \Theta^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial X_2} = -\omega P^T N^T \Theta^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(62)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial X_3} = -\omega P^T N^T \Theta^T \begin{pmatrix} y_P \\ x_P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind endlich alle erforderlichen partiellen Ableitungen berechnet, die zur Aufstellung der Fehlergleichungen (1), Kap. 1 benötigt werden.

3.3 Das Simulationsprogramm

Das Simulationsprogramm ist bisher für die folgenden Aufgaben eingesetzt worden:

- Austesten des Parameterbestimmungsprogramms:
Im Simulationsprogramm werden für zentrale Probleme andere Formeln verwendet als beim Parameterbestimmungsprogramm. (z.B. andere Rekursionsformeln für die Legendre'schen Funktionen). Auf Simulationen dieser Art musste notwendigerweise sehr viel Zeit aufgewendet werden, ist doch die innere Konsistenz einer Methode von zentraler Bedeutung bei der Auswertung reeller Beobachtungen.
- Bestimmen der optimalen (längsten) Schrittweiten bei der Bearbeitung von Beobachtungen bestimmter Satelliten: Im Simulationsprogramm wird mit sehr kleinen Schrittweiten gearbeitet. Im Parameterbestimmungsprogramm wird die Schrittweite so lang als möglich gemacht, aber immer so, dass die dort erzielten Resultate noch in ausreichender Art mit den im Simulationsprogramm zugrunde gelegten Parametern übereinstimmen.
- Bei welcher Bogenlänge müssen welche Potentialparameter für einen speziellen Satelliten noch mitberücksichtigt werden?
- Gezielte Simulationen zur Untersuchung von Diskrepanzen bei der Auswertung reeller Beobachtungen. Beispiele dazu sind im 2. Teil dieses Berichtes enthalten.
- Simulationen der Art wie sie in Beispiel 3, Kap. 1, Abschnitt 1.3 angegeben wurden.

Die Arbeitsweise des Simulationsprogrammes

1. Eingaben

- Beobachtungskonfiguration (siehe 1.3)
Jede Station wird charakterisiert durch:
 - Name, Nummer
 - 3 rechtwinklige Koordinaten im KS 1
 - Typ der Beobachtungen (Richtungsbeobachtungen, Laser, Doppler)
 - Mittlerer Fehler der Einzelbeobachtung
(Bei Richtungsbeobachtungen längs und quer zur Bewegungsrichtung)
 - Systematischer Zeitfehler (\sim Fehler längs der Bewegungsrichtung)
 - Δt : durchschnittliches Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Einzelbeobachtungen

- Kräftemodell (s. 1.3 und 2. Teil)

Zu dieser Beobachtungskonfiguration können beliebig viele Satellitenbogen simuliert werden. Dabei wird ein solcher Bogen charakterisiert durch die folgenden Eingabegrößen:

- Anzahl der zu erzeugenden Bogen n_B (siehe 2.c)).
- Satellitenname, Satellitennummer
- Oskulierende Elemente $a, e, i, \Omega, \omega, T_0$ = Perigäumsdurchgangszeit;
 E_0 = Epoche dieser Elemente
- Polkoordinaten x_P, y_P , UT 1-UTC
- $\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta T_0$: Verfälschungen der Keplerelemente, die an die oskulierenden Elemente bei der Uebergabe ans Parameterbestimmungsprogramm angebracht werden
- Eingabe der Beobachtungszeiten T_{ki} und eines Repetitionsfaktor n_{ki} für die Station i

2. Simulation der Beobachtungen

a) Ordnungssequenz

Die Epoche E_0 ist zugleich der Startpunkt für die numerische Integration. Die Beobachtungszeiten T_{ki} werden zeitlich geordnet: Sie werden für $T_{ki} > E_0$ in einer zeitlich aufsteigenden und für $T_{ki} < E_0$ in einer absteigenden Sequenz angeordnet. Dabei wird jede eingegebene Beobachtungszeit T_{ki} durch n_{ki} Beobachtungen im Abstand Δt ersetzt: $T_{kin} = T_{ki} + (n-1)\Delta t, n = 1, \dots, n_{ki}$.

b) Integration, Berechnung fehlerfreier Beobachtungen

Das Integrationsverfahren liefert eine gleichabständige Ephemeride zu den Zeiten $t_\rho = E_0 + \rho \cdot h$. Im allgemeinen werden die Beobachtungszeiten T_{kin} mit keiner der Zeiten t_ρ übereinstimmen. Es wird daher bis zu dem T_{kil} betragsmässig am nächsten liegenden Zeitpunkt t_ρ integriert. Von dort aus wird mit einem speziellen, zeitsparenden Verfahren zum gewünschten Zeitpunkt integriert (s. Kap. 4). Mit den in 3.1 angegebenen Formelsätzen können jetzt die Beobachtungen des gewünschten Typs berechnet werden.

c) Erzeugung von n_B stochastischen Bogen

Zu jedem in b) gerechneten fehlerfreien Bogen werden n_B stochastische Beobachtungsmodelle erzeugt. Die zufälligen Fehler werden mit den 2 Subroutinen GAUSS und RANDU gewonnen. Die Subroutine GAUSS erzeugt zu den vorgegebenen mittleren Fehlern zufällige Fehler. RANDU ist im Zufallszahlengenerator. Beide Subroutinen sind in [21] dokumentiert. Weiterhin werden noch die systematischen Zeitfehler angebracht.

Die so erzeugten Beobachtungen werden, zusammen mit der Kontrollinformation des Bogens auf ein externes Speichermedium (Disk) übertragen, von wo sie vom Parameterbestimmungsprogramm übernommen werden.

Nachzutragen ist noch, dass Schrittweite und Ordnung der numerischen Integration frei gewählt werden können.

3.4 Das Parameterbestimmungsprogramm

Das Grobkonzept zu diesem Programm wurde schon in der Einleitung angegeben. Ebenso wurde dort auf das enge Zusammenspiel zwischen Simulations- und Parameterbestimmungsprogramm hingewiesen. Es versteht sich von selbst, dass bei der Bearbeitung reeller Beobachtungen ein Datenaufbereitungsprogramm die Beobachtungen in derselben Art zusammenstellen muss wie das Simulationsprogramm die simulierten Beobachtungen. (siehe 2. Teil)

3.4.1 Die Arbeitsweise des Programms

1. Eingaben

a) Steuerinformation

- Beobachtungskonfiguration
- Kräftemodell
- Schrittweite der numerischen Integration
- Ordnung der numerischen Integration getrennt für die Integration der Bewegungsgleichungen und für die Variationsgleichungen.
- Variationsangaben
 1. Welche Parameter sollen bestimmt werden? Es kann eine beliebige Kombination gewählt werden. Ausnahme: Es können entweder alle oder keine Anfangswerte bestimmt werden.
 2. Anzahl Iterationen: Wie oft soll der Iterationsprozess (Aufstellen und Lösen der Fehlergleichungen, Verbessern der angegebenen Parameter) wiederholt werden.

Diese Steuerinformation wird über Lochkarten eingegeben. Zu dieser Problemstellung können nun sequentiell beliebig viele Bogen verarbeitet werden. Dabei muss betont werden, dass jeder Bogen in sich abgeschlossen ist, d.h., dass in jedem Bogen die Parameter unabhängig von dem vorangehenden und dem nachfolgenden bestimmt werden.

b) Eingabe der bogenspezifischen Daten

- Beobachtungen
- Kontrollinformation wie z.B. oskulierende Elemente und Epoche für die erste Iteration etc.

Diese Daten werden dem Programm vom Simulationsprogramm oder vom Datenaufbereitungsprogramm via Disk-Speicher übergeben.

2. Arbeitsablauf für eine Iteration

Es folgt die Integration der Bewegungsgleichungen und der Variationsgleichungen analog wie im Simulationsprogramm. Für jeden Beobachtungszeitpunkt werden Fehlergleichungen vom Typ (1), Kap 1 aufgestellt. Die Beobachtungen, die berechneten Werte für die Beobachtungen und die Residuen werden, nach Beobachtungstypen getrennt, ausgedruckt.

Aus den Fehlergleichungen werden die Normalgleichungen gebildet.

Die Normalgleichungen werden gelöst. Zugleich wird die Kovarianzmatrix berechnet. Die Lösungen werden mit den mittleren Fehlern zusammen ausgedruckt ebenso wie die verbesserten Werte der bestimmten Parameter. Damit ist eine Iteration abgeschlossen. Mit dem verbesserten Parametersatz kann eine weitere Iteration folgen.

3.4.2 Zusätzliche Möglichkeiten

1. Gewichtung der Beobachtungen

Eine Gewichtung der Fehlergleichungen ist unumgänglich, wenn Beobachtungen verschiedenen Typs (Laser, Doppler, Richtung) miteinander verarbeitet werden sollen. Sie ist aber auch angezeigt, wenn gleichartige Beobachtungen verschiedener Präzision vorliegen.

Daher kann (bei der Beobachtungskonfiguration) jeder Station pro Beobachtungstyp ein mittlerer Einheitsfehler zugeordnet werden. (Bei Richtungsbeobachtungen getrennt für Rektaszension und Deklination).

Die Fehlergleichungen (1), Kap. 1 werden dann mit Gewichten versehen, die den angegebenen mittleren Einheitsfehlern entsprechen.

Werden keine Einheitsfehler angegeben, wird automatisch mit Gewicht = 1 gerechnet.

2. Sperrn von Beobachtungen

Jeder Station werden 2 Sperrindices zugeordnet:

1) Dynamischer Sperrindex i_1

2) Geometrischer Sperrindex i_2

1) $i_1 = 1$: Die Beobachtungen dieser Station werden zur Berechnung der Bahn und der bahnbestimmenden Kräfte nicht verwendet. Die Station kann jedoch rein geometrisch in die von andern Stationen definierte Bahn eingemessen werden. $i_1 = 0$: Die Beobachtungen werden zur Bahnbestimmung herangezogen.

2) $i_2 = 1$: Die Beobachtungen dürfen zur Bestimmung der Koordinaten der Station nicht verwendet werden, werden aber zur Bahnbestimmung des Satelliten verwendet.

$i_2 = 0$: Die Beobachtungen werden zur Bestimmung der Stationskoordinaten verwendet.

Ist $i_1 = 1$ und $i_2 = 1$ werden die Beobachtungen der Station lediglich mit der aus Beobachtungen anderer Stationen definierten Bahn dargestellt.

Diese Möglichkeiten sind eine grosse Hilfe beim Auffinden fehlerhafter Beobachtungen.

3. Analyse einzelner Aufnahmen bei Richtungsbeobachtungen

Die Residuen der Einzelbeobachtungen werden, getrennt nach Stationen und Aufnahmen, herausgedruckt. Dabei werden die Residuen im Bereich einer Aufnahme durch Geraden (als Funktion der Beobachtungszeit) dargestellt. Die Restresiduen und die Parameter der Geraden werden ebenso ausgewiesen.

Die Darstellung und Glättung der Residuen erfolgt in 2 Systemen:

- Rektaszension, Deklination
- tangential und normal zur topozentrischen Bewegungsrichtung

(Dabei sind die Residuen in Rektaszension mit dem cosinus der entsprechenden Deklination multipliziert.)

Diese Analyse einzelner Aufnahmen kann wahlweise für jede Station einzeln unterdrückt werden.

Sie ist jedoch ein ideales Hilfsmittel zur Untersuchung systematischer Fehler einzelner Aufnahmen.

4. DAS INTEGRATIONSVERFAHREN

4.1 Auswahl des Verfahrens

Der Algorithmus für die numerische Integration ist der zentrale, allen möglichen Anwendungen (s. Einleitung) zugrunde liegende Teil der hier vorgestellten Arbeit.

Diese Anwendungen stellen sehr unterschiedliche Anforderung bezüglich der Genauigkeit der Integration.

Es müssen also maximale Anforderungen an die Präzision des Verfahrens gestellt werden. Daneben muss der Algorithmus so flexibel sein, dass bei bescheideneren Anwendungen kein übermäßiger Aufwand getrieben wird.

Maximale Anforderungen:

Es ist klar, dass die durch die Integration eingeführten Fehler für jeden Zeitpunkt des Integrationsintervalls deutlich unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit liegen müssen.

Als maximal tolerierbarer Fehler wird hier (willkürlich) 1/10 der Beobachtungsgenauigkeit gewählt. Da die heute genaueste Beobachtungsart, die Laserbeobachtung, die Distanzen mit einer Genauigkeit von 10-15 cm misst, muss gefordert werden, dass der Integrationsfehler im gesamten Integrationsintervall den Wert von 1 cm nicht übersteigt.

Länge des Integrationsintervalls: Es ist klar, dass es für die Bestimmung von geodätischen Parametern wünschenswert ist, möglichst lange Bögen zu rechnen. Bei den heutigen Berechnungen hat sich als "magische Zahl" für die Intervalllänge der Wert von 5^d-7^d eingespielt. Bedenkt man, dass bei analytischen Verfahren Bögen von ca. 1 Monat Länge analysiert werden, so scheint die bei den heutigen numerischen Verfahren verwendete Bogenlänge sehr kurz zu sein. Meines Erachtens ist es so, dass die numerischen Methoden erst dann gleich gute oder bessere Resultate als die analytischen liefern können, wenn mit den numerischen Methoden auch längere Bögen untersucht werden.

Daher werden hier an das Integrationsverfahren die folgenden Anforderungen gestellt:

Für ein Integrationsintervall von 60^d soll der maximale Fehler im Ort (und der Geschwindigkeit) für einen geodätischen Satelliten den Wert von 1 cm (1cm/sec)

nicht übersteigen.

Für die meisten Satelliten, die für geodätische Zwecke gebraucht werden, können noch zwei wichtige Bahncharakteristiken angegeben werden:

- 8 - 12 Umläufe pro Tag
- kleine bis mässige Exzentrizitäten ($e < 0.3$)

Rechnet man nun pro Umlauf mit ca. 150 Integrationsschritten (obere Grenze), so müssen für einen Bogen mit den oben angegebenen Charakteristiken bei 12 Umläufen pro Tag $60 \cdot 12 \cdot 150 = 108'000$ Integrationsschritte durchgeführt werden.

Da die Integrationsepoche in die Mitte des Integrationsintervalls gelegt werden kann, heisst das, dass das Integrationsverfahren den Anforderungen nach ca. 50'000 Integrationsschritten noch genügen muss.

Solch hohen Präzisionsansprüchen genügen die zwei (prinzipiell) verschiedenen Integrationsverfahren:

1. Runge-Verfahren
2. Differenzenverfahren *)

Zu 1: Das klassische Runge-Kutta-Verfahren, das ja ein Verfahren 4. Ordnung ist (d.h. einer Potenzreihenentwicklung bis und mit den vierten Ableitungen entspricht), wurde in letzter Zeit verallgemeinert für höhere Ordnungen. (Siehe z.B. [13])

Die Vorteile dieser Verfahren:

- Die Verfahren sind selbststartend, d.h. die Berechnung einer Anlaufsequenz ist nicht nötig.
- Da die Verfahren keine Information aus vorangegangenen Integrationsschritten benötigen, ist eine Veränderung der Schrittweite ohne Komplikationen jederzeit möglich.
- Aus demselben Grund kann auch angenommen werden, dass diese Verfahren auch bei sehr "unruhigem" Verlauf der zu integrierenden Funktionen gute Resultate liefern.

*) Neuere Algorithmen, wie z.B. derjenige von Bulirsch und Stoer wurden hier nicht betrachtet. Diese Verfahren zeichnen sich bei mässigen Genauigkeitsanforderungen durch eine sehr hohe Effizienz (kleine Rechenzeiten) gegenüber den klassischen Verfahren aus. Bei grösseren Genauigkeitsansprüchen verweisen sich jedoch diese Vorteile zusehends.

Allen diesen Vorteilen steht nun ein gewaltiger Nachteil gegenüber:

- Bei einem Runge-Kutta-Verfahren n-ter Ordnung müssen pro Integrationsschritt die zu integrierenden Funktionen mindestens n-mal ausgewertet werden. Dabei sind die Schrittweiten bei diesen Verfahren nicht grösser als bei den Differenzenverfahren. Da bei den einfachsten Differenzenverfahren die Ableitungen nur einmal pro Integrationsschritt berechnet werden müssen, sieht man, dass bei Verwendung von Runge-Verfahren der Ordnung 10 die Rechenzeit ca. zehnmal grösser wird. Dies ist auch für die (heute) schnellsten Computer für die zu behandelnden Probleme kaum tragbar.

Diese wenigen Hinweise zeigen, dass zur Lösung der hier anstehenden Aufgaben nur die schnellen Differenzenverfahren in Frage kommen.

Es wird das folgende Differentialgleichungssystem untersucht:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (1)$$

$$\vec{x}^T = (x, y, z) \quad (1a)$$

$$\vec{f}^T = (f_x, f_y, f_z)$$

Dabei ist \vec{f} von der Form:

$$\vec{f} = GM \frac{\vec{x}}{r^3} + \vec{k}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad , \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (1b)$$

Dabei ist \vec{k} klein gegenüber dem ersten Term.

Es ist klar, dass jedes Differentialgleichungssystem höherer Ordnung in ein System erster Ordnung verwandelt werden kann.

Die Differenzenmethoden werden dann nach Adams und Bashford resp. Adams und Moulton benannt. Hier wird (aus ökonomischen Gründen) ein Verfahren angewandt, das speziell für Differentialgleichungen 2. Ordnung zugeschnitten ist.

In der Himmelsmechanik ist es unter dem Namen Störmer bekannt.

4.2 Das Integrationsverfahren nach Störmer

Die gegebene Darstellung stützt sich auf die Publikation [11] des astronomischen Recheninstituts Heidelberg.

Es werden hier praktisch ausschliesslich die Formelsätze wiedergegeben, die bei der Untersuchung der Fehlerakkumulation von Bedeutung sind. Eine gründlichere Darstellung ist in [29] zu finden.

Bezeichnungen:

- \vec{x}^T = (x, y, z) geozentrischer Ort des Satelliten
- $\dot{\vec{x}}^T$ = (x, y, z) geozentrische Geschwindigkeit des Satelliten
- t = Zeit, unabhängige Variable
- h = (konstante) Schrittweite der Integration
- \vec{f}^T = (f_x, f_y, f_z) die auf den Satelliten wirkende Kraft
- q = Ordnung des Verfahrens: Grad des Polynoms, durch das f_x(t) (und f_y, f_z) im Zeitintervall {t_i-(q+1)h, t_i} dargestellt wird.
- $\nabla f_{x,i}$ = f_{x,i} - f_{x,i-1} (2)
- $\nabla^v f_{x,i}$ = $\nabla^{v-1} f_{x,i}$ - $\nabla^{v-1} f_{x,i-1}$
- ∇x_i = x_i - x_{i-1}
- Δx_i = ∇x_i - ∇x_{i-1} = x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}

Das Differentialgleichungssystem hat dann die Gestalt (1):

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t)$$

Bei der numerischen Integration wird noch die Newtonsche Interpolationsformel gebraucht:

$$f_{x,i+s} = f_x(t_i + s h) = f_{x,i} + s \nabla f_{x,i} + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f_{x,i} + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+r-1)}{r!} \nabla^r f_{x,i} + \dots \quad (3)$$

Zur Veranschaulichung der hier verwendeten Differenzen sei noch ein Ausschnitt aus dem Differenzenschema mit diesen Bezeichnungen gegeben:

$$\begin{array}{cccccc}
 f_{i-q-1,x} & & & & & \\
 f_{i-q,x} & & & & & \\
 \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & \\
 f_{i-3,x} & \nabla f_{i-2,x} & \nabla^2 f_{i-1,x} & \nabla^3 f_{i,x} & \nabla^q f_{i,x} & \\
 f_{i-2,x} & \nabla f_{i-1,x} & \nabla^2 f_{i,x} & \nabla^3 f_{i,x} & & \\
 f_{i-1,x} & \nabla f_{i,x} & & & & \\
 \underline{f_{i,x}} & & & & &
 \end{array}$$

Alle nachfolgenden Formeln werden nur für die ersten Komponenten gegeben. Der Index x bei den $\nabla^v f_{i,x}$ wird weggelassen.

1. Formeln für einen Integrationsschritt

a) Extrapolation

$$\nabla x_{i+1} = \nabla x_i + h^2 \sum_{v=0}^q d_v \nabla^v f_i + R_{\text{extr}} \quad (4a)$$

$$x_{i+1} = x_i + \nabla x_{i+1} + R_{\text{extr}} \quad (4b)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{h} \nabla x_{i+1} + h \sum_{v=0}^q b_v \nabla^v f_i + R'_{\text{extr}} \quad (4c)$$

b) Interpolation

Hier wird ein Extrapolationsschritt vorausgesetzt

$$\nabla x_{i+1} = \nabla x_i + h^2 \sum_{v=0}^q c_v \nabla^v f_{i+1} + R_{\text{int}} \quad (5a)$$

$$x_{i+1} = x_i + \nabla x_{i+1} + R_{\text{int}} \quad (5b)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{h} \nabla x_{i+1} + h \sum_{v=0}^q e_v \nabla^v f_{i+1} \quad (5c)$$

Mit den jetzt erhaltenen Werten x_{i+1} , \dot{x}_{i+1} können wiederum die Ableitungen f_{i+1} errechnet werden. Dieser Zyklus kann mehrfach durchlaufen werden.

Der Vorteil gegenüber einem reinen Extrapolationsverfahren ist der, dass die Koeffizienten c_v , e_v wesentlich kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten d_v , b_v .

Die Koeffizienten b_v in (4c) sind in [11] nicht angegeben, da sie dort nicht gebraucht wurden. Daher folgen diese Koeffizienten für $q = 0, \dots, 12$ in der nachfolgenden Tabelle.

Tabelle 1

| q | b_v | q | b_v |
|---|--------------|----|----------------------------|
| 0 | 1/2 | 7 | 416173/1814400 |
| 1 | 1/3 | 8 | 324901/1451520 |
| 2 | 7/24 | 9 | 13119671/59875200 |
| 3 | 97/360 | 10 | 41198923/191600640 |
| 4 | 367/1440 | 11 | 30719482463/145297152000 |
| 5 | 1231/5040 | 12 | 217828596101/1046139494400 |
| 6 | 28549/120960 | | |

2. Integration zwischen die Stützwerte

Das Integrationsverfahren verlangt eine konstante Schrittweite h . Da die Beobachtungszeiten im allgemeinen nicht mit den Zeiten der Stützwerte übereinstimmen, muss ein Algorithmus gegeben werden, mit dem der geozentrische Ort und die Geschwindigkeit für einen beliebigen Beobachtungszeitpunkt berechnet werden können.

Sei:

$$\tau = \text{Beobachtungszeit}$$

$$t_i = \text{der Beobachtungszeit benachbarter Stützwert:}$$

$$|\tau - t_i| \leq \frac{1}{2} h$$

$$\sigma = \frac{\tau - t_i}{h}$$

Es gilt:

$$x(\tau) = x(t_i + \sigma h) = x_i + \sigma h x_i' + h^2 \int_0^\sigma \int_0^s f(t_i + s h) ds^2 \quad (6a)$$

$$x(\tau) = x_i + h \int_0^\sigma f(t_i + s h) ds \quad (6b)$$

In (6a), (6b) wird (3) eingesetzt. Die Integration wird durchgeführt. Man erhält:

$$x(\tau) = x_i + \sigma h x_i' + h^2 \sum_{v=0}^q A_v \nabla^v f_i \quad (7a)$$

$$x(\tau) = x_i + h \sum_{v=0}^q B_v \nabla^v f_i \quad (7b)$$

A_v, B_v sind Polynome in σ . Diese sind in {29} bis zur Ordnung 6 gegeben.

Berechnung des Anlaufschemas

Auch hier wurde im wesentlichen das System des Heidelberger Recheninstitutes {11} übernommen. Allerdings musste der Algorithmus verallgemeinert werden, da in den Anwendungen auch dissipative Kräfte auftreten können.

Näheres s. {29}.

4. Bemerkungen zur Programmierung

Es gelten die folgenden Restriktionen:

1. $q \leq 20$
2. $n =$ Anzahl Interpolationsschritte
 n frei wählbar. Die Konvergenz wird nicht überwacht.

Das Programm wurde so konzipiert, dass ℓ Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung vom Rang 3 simultan integriert werden können. (Integration der Variationsgleichungen!)

4.3 Gleitkomma - Arithmetik

Die Programme wurden in FORTRAN geschrieben für eine IBM 370/158 Anlage.
Für das Folgende ist es nötig, die Gleitkomma-Arithmetik dieses Systems näher zu betrachten.

Zahlendarstellung

Jede Gleitkomma-Zahl weist Mantisse und Exponent auf (mit den entsprechenden Vorzeichen).

Gerechnet wird im 16-er Zahlensystem.

Es besteht die Möglichkeit, Einfachpräzision resp. Doppelpräzision zu verwenden. Bei Einfachpräzision stehen für die Mantisse 6, bei Doppelpräzision 14 hexadezimale Ziffern zur Verfügung (entsprechend 7.2 resp. 17.7 dezimalen Ziffern).

Theoretisch wäre noch eine Rechnung mit der "Extended Precision" möglich, bei der die Mantisse 28 hexadezimale Ziffern aufweist. Dies würde ein kaum tragbares Ansteigen der Rechenzeiten bedeuten.

Grundoperationen

- R : korrektes Resultat einer Grundoperation
R_{comp} : das durch die Maschine ermittelte Resultat
E(R_{comp}) : Erwartungswert für R_{comp}
s : Stellenwert der hintersten Ziffer der Resultatmantisse

Die Mantisse von R_{comp} wird intern zunächst mit einer grösseren Ziffer dargestellt und anschliessend auf die oben erwähnten Ziffernzahlen abgeschnitten.
D.h.: Bei keiner Grundoperation wird eine Rundung vorgenommen.

Man kann daher schreiben:

$$E(R_{\text{comp}}) = R - \text{sign}(R) \cdot 0.5 \cdot s \quad (8)$$

Es gibt Ausnahmen, bei denen (8) nicht gilt.

Beispiel: - Addition:

Beide Summanden und das Resultat weisen denselben Exponenten auf.

- Division:

Divisor ist eine 16-er Potenz

Solche Ausnahmefälle sind für das folgende jedoch nicht von Bedeutung.

4.4 Fehlerakkumulation

Bei jedem numerischen Integrationsverfahren werden bei jedem Integrations-schritt zwei prinzipiell verschiedene Fehler in die Rechnung eingeführt:

1. Abbruchfehler: Alle Differenzenverfahren approximieren die zu integrierenden Funktionen (lokal) durch Polynome eines gewissen Grades q . Da nun q endlich ist, wird dadurch ein Fehler eingeführt (falls die Funktionen nicht zufälligerweise Polynome sind!).
2. Fehler infolge Rechnung mit endlicher Ziffernzahl. Es muss zwischen zwei verschiedenen Fehlerarten unterschieden werden:
 - a) Rundungsfehler
 - b) Abschneidefehler

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass die Rechenanlage Fehler vom Typ b) begeht. Die Fehlerakkumulation wird für beide Fehlertypen behandelt.

4.4.1 Abbruchfehler

Für die hier verwendeten Integrationsverfahren kann der Abbruchfehler (pro Integrationsschritt) wie folgt definiert werden:

Unter dem Abbruchfehler bei einem Verfahren der Ordnung q versteht man den Fehler, der in die Rechnung eingeführt wird durch Vernachlässigung der $(q+i)$ -ten Differenzen ($i=1,2,\dots$).

Als Abschätzungen für diese Fehler (pro Integrationsschritt) dienen die folgenden Formeln:

$$R_{\text{extr}} \approx h^{q+3} d_{q+1}$$

$$R_{\text{int}} \approx h^{q+3} c_{q+1}$$

(Entsprechende Formeln gelten für die ersten Ableitungen).

Der Abbruchfehler kann nun im Prinzip auf zwei verschiedene Arten "beliebig" klein gemacht werden:

- Wahl einer kleinen Schrittweite h
- Wahl einer hohen Ordnung q

Bei der Wahl einer sehr kleinen Schrittweite ist bei der Integration über lange Intervalle eine grosse Zahl von Rechenschritten notwendig. Dies hat zur Folge,

dass die Akkumulation der Rundungsfehler beträchtliche Ausmasse erreicht. Ausserdem ergeben sich so sehr lange Rechenzeiten.

Man sollte also die Abbruchfehler mit dem 2. Kriterium "bekämpfen". Es sind jedoch auch hier Grenzen gesetzt durch das Rechnen mit einer endlichen Ziffernzahl.

Man überzeugt sich nämlich leicht davon, dass die Rundungsfehler in den f_i sich bei der Bildung der Differenzen $\nabla^v f_i$ sehr bald katastrophal auf diese auswirken.

So ist es bei Rechnung mit Doppelpräzision a priori sinnlos, Verfahren höherer als zwölfter Ordnung zu verwenden.

Extrapolation - Interpolation

Die beiden Verfahren unterscheiden sich durch die Grösse der Abbruchfehler.

Es gilt:

$$\frac{R_{\text{extr},11}}{R_{\text{int},11}} = \frac{d_{12}}{c_{12}} \approx 40$$

Daher wird häufig den Interpolationsverfahren der Vorzug vor den reinen Extrapolationsverfahren gegeben.

Man kann sich jedoch leicht überlegen, dass mit dieser Integrationsordnung - bei Reduktion der Schrittweite um ca. 25 % - beim Extrapolationsverfahren der Abbruchfehler $R_{\text{extr},11}$ gleich gross sein wird wie beim Interpolationsverfahren mit der ursprünglichen Schrittweite.

Bedenkt man noch, dass beim Interpolationsverfahren pro Rechenschritt die zu integrierenden Funktionen mindestens zweimal berechnet werden müssen, so wird klar, dass die reinen Extrapolationsverfahren den Vorzug haben. Die Interpolationsverfahren sollten nur dann verwendet werden, wenn dies wegen der Akkumulation der Rundungsfehler (Abschneidefehler) unbedingt notwendig erscheint.

4.4.2 Rundungs- resp. Abschneidefehler

Aus den Bemerkungen im letzten Abschnitt folgt, dass die Abbruchfehler kleiner gemacht werden können als die durch Rundung resp. Abschneiden eingeführten Fehler.

Die Rundungsfehler aber können nicht vermieden werden. Ist man daher an der maximal erreichbaren Präzision eines Integrationsverfahrens interessiert, kommt man um eine genaue Untersuchung dieser Effekte nicht herum.

Man kann das Problem auf verschiedene Weise angehen:

P. Henrici untersucht in [30] die Fehlerfortpflanzung direkt in den integrierten Grössen (hier: in den Koordinaten und Geschwindigkeiten).

Hier wurde ein Verfahren angewandt, das von Brouwer in [12] für Handrechnung für die Encke- und Cowell-Integrationsverfahren skizziert worden war.

Prinzipielles Vorgehen:

- 1) Es werden die Fehler in den Integralen I der Bewegung berechnet. (D.h. für Grössen, für die gilt: $\frac{dI}{dt} = 0$).
- 2) Aus den Erwartungswerten $E(I)$ und ihren Varianzen $E((I-E(I))^2) = \text{Var}(I)$ werden die Fehler in den weitem interessierenden Grössen abgeschätzt.

Zu 1):

Der Fehler, der in (irgendeinem) ersten Integral I beim i-ten Integrations-schritt neu eingeführt wird, kann geschrieben werden als:

$$\partial I_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} \partial x_i + \frac{\partial I}{\partial y_i} \partial y_i + \frac{\partial I}{\partial z_i} \partial z_i + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \partial \dot{x}_i + \frac{\partial I}{\partial \dot{y}_i} \partial \dot{y}_i + \frac{\partial I}{\partial \dot{z}_i} \partial \dot{z}_i \quad (9)$$

Bezeichnet man mit $\partial I(N)$ den totalen, nach allen N Integrationsschritten eingeführten Fehler, kann man schreiben:

$$\partial I(N) = \sum_{i=1}^N \partial I_i \quad (10)$$

Es geht nun darum, $E(\partial I(N))$ und $E((\partial I(N) - E(\partial I(N)))^2)$ für die beiden möglichen Fehlertypen Rundungsfehler resp. Abschneidefehler abzuschätzen.

a) Rundungsfehler in x_i, \dots, z_i :

$\partial x_i, \dots$ sind Zufallsvariablen, die weder untereinander noch mit den x_i resp. $\frac{\partial I}{\partial x_i}$ etc. korreliert sind.

$$\text{Es gilt: } E(\partial x_i) = 0 \quad \text{etc.} \quad (11a)$$

$$\text{Damit gilt auch: } E(\partial I(N)) = 0 \quad (11b)$$

Für die Varianz gilt:

$$\text{Var}(\partial x_i) = \frac{1}{12} \text{ in Einheiten der hintersten Stelle von } x_i$$

Annahme: $\partial x_i, \partial y_i, \dots, \partial z_i$ seien alle auf die gleiche Anzahl Dezimalstellen gerechnet.

Dann gilt:

$$\text{Var}(\partial I(N)) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{y}_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{z}_i} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

Ohne eine Abschätzung von {...} kann geschrieben werden:

$$\text{Var}(\partial I(N)) \sim N;$$

halbiert man nämlich die Schrittweite h und integriert über das gleiche Zeitintervall wie vorher, bedeutet dies lediglich eine Verdoppelung der Summanden in (12). Im allgemeinen sind die Klammerausdrücke Funktionen der Zeit, da ja gilt: $x_i = x_i(I_1, I_2, \dots; t)$. Bei oszillatorischen Vorgängen können jedoch die Klammerausdrücke durch ihre Mittelwerte über einen Umlauf ersetzt werden. Man erhält dann:

$$\text{Var}(\partial I(N)) = C \cdot N$$

b) Abschneidefehler in x_i, \dots, \dot{z}_i

$\partial x_i, \dots$ sind Zufallsvariablen, die zwar untereinander im allgemeinen nicht korreliert sind, deren Erwartungswerte aber nach (8) berechnet werden müssen zu

$$\partial x_i = -\text{sign}(x_i) \cdot 0.5 \quad (13)$$

in Einheiten der hintersten Stelle.

Die Abschneidefehler sind also durch die Vorzeichen korreliert mit den x_i , demnach auch mit den $\frac{\partial I}{\partial x_i}, \dots$.

Die Erwartungswerte von (9) sind daher auch nicht gleich Null. Mit ähnlicher Argumentation wie oben kann man hier schliessen:

$$\begin{aligned} E(\partial I(N)) &= C' \cdot N ; & C' &= \text{Konstant} \\ \text{Var}(\partial I(N)) &= C'' \cdot N ; & C'' &= \text{Konstant} \end{aligned}$$

Zu 2):

Da nun die Erwartungswerte der Integrationskonstanten und deren Varianzen als Funktion der Zeit bekannt sind, können auch die entsprechenden Ausdrücke von Funktionen dieser Integrale berechnet werden. Dies sei erläutert für den Spezialfall des Zweikörperproblems.

Nach den Bemerkungen im letzten Abschnitt wachsen die zu erwartenden Fehler in den klassischen Kegelschnittelementen für

- a) Rundungsfehler $\sim N^{1/2}$
 b) Abschneidefehler $\sim N$

Aus den Fehlern in der Halbachse a kann auf einfache Weise der Fehler in der mittleren Bewegung n berechnet werden. Daraus erhält man den Fehler in der mittleren Länge M zu:

$$\delta M(t) = \int_0^t \delta n(s) ds$$

Von dieser Grösse müssen Erwartungswert und Varianz berechnet werden. Man erhält die Resultate

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) Rundungsfehler | b) Abschneidefehler |
| $E(\delta M(t)) = 0$ | $E(\delta M(t)) \sim N^2$ |
| $\text{Var}(\delta M(t)) \sim h \cdot N^3$ | $\text{Var}(\delta M(t)) \sim h N^3$ |

Grob gesagt wachsen die Fehler in M (und damit auch in den Koordinaten) bei Rundungsfehlern $\sim N^{3/2}$, bei Abschneidefehlern $\sim N^2$.

Diese Resultate gelten unabhängig vom verwendeten Integrationsverfahren^{*)} und unabhängig davon, ob das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (wie hier) direkt integriert wurde, oder ob dieses zuerst in ein System 1. Ordnung verwandelt wurde. In jedem Falle werden nämlich Fehler von Grössenordnung der hintersten Stelle in x_i, \dots, \dot{z}_i bei jedem Integrationsschritt eingeführt. Dies bedingt aber, dass die Grössen ∇x_i in den Formeln (4) und (5) mindestens die gleiche Anzahl signifikante Ziffern aufweisen wie die x_i, \dots, \dot{z}_i . Dies ist bei manchen häufig verwendeten Algorithmen nicht erfüllt. Beispielsweise kann man durch Einsetzen von (4b) in (4a) schreiben:

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = h^2 \sum_{v=0}^1 d_v \nabla^v f_i$$

Diese Gleichung, nach x_{i+1} aufgelöst, ist eine Extrapolationsformel die häufig verwendet wird. Anstatt, wie in dem hier verwendeten Algorithmus x_i und ∇x_i bei jedem Rechenschritt abzuspeichern, wird dort x_i und x_{i-1} verwendet. Bei der Berechnung von x_{i+1} muss jetzt der Hauptterm $\frac{1}{h} \cdot \nabla x_i$ berechnet werden als $\frac{1}{h} (x_i - x_{i-1})$. Man überlegt sich leicht, dass im allgemeinen diese Grösse nicht mehr gleich viele signifikante Ziffern haben kann, wie bei der Verwendung der Formelsätze (4) und (5).

*) Runge-Verfahren, Differenzenmethoden vom Typ Adams, Störmer oder Cowell. Bei andern Differenzenverfahren (z.B. Nyström, Milne-Simpson) sind noch weitere Fehlerquellen von Bedeutung.

Programmverbesserung bei der vorhandenen Gleitkomma-Arithmetik

Es stellt sich die Frage, ob nicht auch mit der vorhandenen Gleitkommaarithmetik die günstigeren Fehlerfortpflanzungsgesetze der gerundeten Rechnungen erreicht werden können:

Es ist dabei unzweckmässig, jede im Integrationsalgorithmus vorkommende Zahl zu runden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass man durch Rundung an einigen wenigen wichtigen Punkten dieselben Resultate erzielen kann. Bei (4a) wird $h^2 \int d_y \nabla^v f_i$ auf die Stellenzahl von Vx_i gerundet. Bei (4b) wird Vx_{i+1}^* addiert. Dabei ist Vx_{i+1}^* die auf die Stellenzahl von x_{i+1} gerundete Zahl Vx_{i+1} . Analog ist das Vorgehen bei (4c). Dieser Teil des Algorithmus ist jedoch nur bei der Präsenz von dissipativen Kräften von Bedeutung.

Als Illustration für den Erfolg solcher Massnahmen dient die nachfolgende Tabelle: Es wurde dasselbe einfache Problem mit derselben Schrittweite und denselben Anfangsbedingungen einmal ungerundet und einmal mit den hier beschriebenen 2 Rundungen numerisch integriert mit (4a), (4b).

Differentialgleichungssystem : $\ddot{\vec{x}} = -GM \cdot \frac{\vec{x}}{3} ; GM = 7^3 = 343$
 Anfangsbedingungen : $\vec{x}_0 = (7; 0, r0)$
 $\dot{\vec{x}}_0 = (0, 7, 0)$

Lösung : Kreisbahn in der x,y-Ebene

$$x = 7 \cdot \cos(t-t_0)$$

$$y = 7 \cdot \sin(t-t_0)$$

h : 46.875 sec

N : Anzahl Integrationsschritte

ΔM_1 : Fehler in der Länge bei ungerundeter Rechnung (in Radiant)

ΔM_2 : Fehler in der Länge bei gerundeter Rechnung (in Radiant)

Rechnung in Doppelpräzision

Ordnung des Verfahrens q = 12

Tabelle 2

| N | ΔM_1 | ΔM_2 |
|-------|------------------------|----------------------|
| 6000 | $110.6 \cdot 10^{-12}$ | $.41 \cdot 10^{-12}$ |
| 12000 | 441.2 | .46 |
| 18000 | 994.2 | .60 |
| 24000 | 1768.0 | 2.57 |
| 30000 | 2762.2 | 3.35 |

| N | ΔM_1 | ΔM_2 |
|-------|-------------------------|-----------------------|
| 36000 | $3976.6 \cdot 10^{-12}$ | $3.73 \cdot 10^{-12}$ |
| 42000 | 5412.6 | 4.51 |
| 48000 | 7069.7 | 6.61 |
| 54000 | 8946.4 | 8.65 |
| 60000 | 11042.8 | 11.43 |

Nähere Informationen zu diesem Thema siehe in {29}

Abschliessende Bemerkungen

- Es muss noch die Frage gelöst werden, ob das hier (für das Zweikörperproblem) formulierte Fehlerverhalten auch für ein allgemeineres Kräftefeld (1b) Gültigkeit hat. Diese Frage darf sicher nicht allgemein bejaht werden. Man kann jedoch die folgenden Ueberlegungen anstellen:
Anstatt direkt mit den rechtwinkligen Koordinaten zu rechnen, können (mit der Methode der Variation der Konstanten) Differentialgleichungen hergeleitet werden für die zeitliche Variation der Kegelschnittelemente. Dies führt auf Gleichungen erster Ordnung. Für die mittlere Anomalie resultiert eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Näherungsweise werden bei dieser sogenannten Störungsrechnung die Elemente als konstant angenommen bei der Berechnung der zeitlichen Ableitungen. Das heisst aber, dass das Problem der numerischen Integration einer Differentialgleichung reduziert wird auf die numerische Integration eines Integrals. Für dieses Problem aber sind die Fehlerfortpflanzungsgesetze wohl bekannt: Die zu erwartenden Fehler sind proportional $N^{1/2}$ für einfache Integrale, proportional $N^{3/2}$ für Doppelintegrale. Man kann somit sagen: Das Fehlerverhalten im Falle des allgemeinen Kräftefeldes (1b) darf durch das Fehlerverhalten beim Zweikörperproblem ersetzt werden, solange die oben beschriebene Näherung noch vertretbar ist.
- Maximale Länge des Integrationsintervalls:
Eine eingehende Untersuchung in {29} ergab, dass mit dem hier beschriebenen Integrationsalgorithmus bei Rechnung mit der IBM-Doppelpräzision nach Einführung der beschriebenen Rundungen gefahrlos Bogen von der Länge von ca. 100 Tagen integriert werden können. (Bei Bahnen mit den in 4.1 geschilderten Charakteristiken).

2. Teil Anwendung auf das Short-ARC-Programm

In diesem 2. Teil wird das Verfahren auf reelle Beobachtungen angewandt. Es werden Richtungsbeobachtungen zum Satelliten Pageos im Zeitraum September-Oktober 1972 verwendet. Diese Beobachtungen stammen aus der IV -ten sog. "European Short-Arc-Campaign" (siehe {31}).

Beobachtungsstationen: Delft *)

Graz *)

Zimmerwald

- Die Beobachtungen wurden zunächst für jede Station getrennt untersucht.

(Nach Problem 4a, Kap. 1); s. Kap. 6.

- Anschliessend wurde versucht, mit Hilfe der Beobachtungen von Delft und Zimmerwald die relativen Koordinaten von Delft zu bestimmen; d.h. bei der Parameterbestimmung wurden die Koordinaten von Zimmerwald festgehalten. Die Beobachtungen von Graz wurden hier nicht verwendet, da dies den Rahmen dieser Untersuchung doch wesentlich vergrössert hätte.

Dies konnte insbesondere im Hinblick darauf vernachlässigt werden, da die in diesem 2. Teil gegebene Untersuchung nur eine Vorstufe ist für die Behandlung aller Beobachtungen aller Stationen, die an den "europäischen Short-Arc-Kampagnen" teilgenommen haben.

Diese Untersuchung ist im Moment im Gang; darüber wird in einer weiteren Arbeit berichtet werden.

Genauere Umschreibung der Zielsetzungen:

Das verwendete Kräftefeld:

- Erdpotential: Entwicklung nach Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 8. Die Parameter werden der SAO-Standard Earth III (s. {2}) entnommen.
- Gravitationswirkungen von Sonne, Mond: Die Koordinaten dieser Himmelskörper werden mit den in {9} gegebenen mittleren Elemente berechnet.
- Luftwiderstand: vernachlässigt
- Strahlungsdruck: s. Kapitel 5

Die Koordinaten von Zimmerwald wurden ebenfalls {2} entnommen.

*) Die Beobachtungen dieser Stationen wurden uns in freundlichster Weise direkt von den betreffenden Instituten zur Verfügung gestellt.

Ziel: Einmessen der beobachtenden Stationen in das System geozentrischer Stationskoordinaten von SAO-Standard-Earth III.

Behandlung des Problems in 2 Etappen:

1. Beurteilung der Beobachtungsqualität der einzelnen Stationen.
2. Bestimmung der relativen Stationskoordinaten von Delft bei Verwendung von Integrationsintervallen verschiedener Länge.

Besondere Beachtung muss dabei dem Problem der Zeitzuordnung zu den vermessenen Satellitenpunkten auf den photographischen Aufnahmen (im folgenden kurz "Timing-Problem" genannt (siehe 5.1)) und dem Strahlungsdruck (siehe 5.2) geschenkt werden.

5. THEORETISCHE VORARBEITEN

5.1 Das Timing-Problem

Bei der optischen Beobachtung von passiven Satelliten müssen die Stationen die Zeitzuordnung zu den vermessenen Satellitenpunkten liefern. Bei den im Short-Arc-Projekt zusammengeschlossenen Stationen ist dieses Problem nicht einheitlich gelöst. Dabei kann jede Station nur die innere Konsistenz ihres Timings im Bereich einer Aufnahme prüfen. Es ist aber ohne weiteres denkbar, dass systematische Differenzen in den Zeitregistrationen zwischen den einzelnen Stationen und den einzelnen Aufnahmen vorkommen können.

Daher wurde hier die Möglichkeit geschaffen, diese systematischen Zeitdifferenzen zu bestimmen. Dabei hat man (genau wie bei den Stationskoordinaten) die Möglichkeit, für alle oder nur für eine Auswahl von Stationen Zeitkorrekturen zu bestimmen. Wird insbesondere nur die Zeit einer Station festgehalten, bedeutet dies die Reduktion auf das Zeitsystem eben dieser Beobachtungsstation (relative Zeitkorrekturen). Diese Art der Berücksichtigung des Timing-Problems (Berechnung relativer Zeitkorrekturen) ist völlig ausreichend für die Bestimmung von relativen Stationskoordinaten.

Es sei noch erwähnt, dass jeder Station a priori ein solcher "Zeitshift" zugeordnet werden kann.

Es seien ΔT_i , $i = 1, \dots, n$ die systematischen Zeitdifferenzen der einzelnen Stationen. Bei den Fehlergleichungen für die Station i treten dann zusätzlich die folgenden Terme auf:

$$\cos \delta \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \Delta T_i \quad \text{resp.} \quad \frac{d\delta}{dt} \cdot \Delta T_i$$

Dabei ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{d\alpha}{d\Delta_k} \cdot \frac{d\Delta_k}{dt}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{d\delta}{d\Delta_k} \cdot \frac{d\Delta_k}{dt}$$

Die Berechnung der Ableitungen $\frac{d\alpha}{d\Delta_k}$, $\frac{d\delta}{d\Delta_k}$ wurde bei der Herleitung für die theoretischen Werte der optischen Beobachtungen gegeben.

Die Berechnung der $\frac{d\Delta_k}{dt}$ wurde bei der Berechnung der theoretischen Werte für die Dopplerbeobachtungen gebraucht.

5.2 Der Strahlungsdruck

Die wesentlichsten Charakteristiken des Satelliten Pageos (6605601) sind:

Bahn: Halbachse a \approx 10.6 Mm
 Neigung i \approx 86°
 Umlaufszeit \approx 3 h

Konstruktion: Ballon-Satellit
 Kugel mit ca. 30 m Durchmesser
 Masse m \approx 53 kg

$$\frac{A}{m} = \frac{r_{\text{sat}}^2 \pi}{m} = 136 \text{ cm}^2/\text{g}; r_{\text{sat}} = \text{Radius des Ballons}$$

Das Verhältnis $\frac{A}{m}$ bestimmt im wesentlichen die Grössenordnung der durch den Strahlungsdruck verursachten Bahnstörungen. Es ist hier so gross, dass der Strahlungsdruck (neben der Abplattung) die wesentliche bahnbestimmende Störkraft ist. (Im Vergleich dazu ist bei den Satelliten Geos 1 und Geos 2

$$\frac{A}{m} \approx 0.05.)$$

Daher muss hier eine eingehende Diskussion dieser Einflüsse erfolgen:

Man unterscheidet im allgemeinen zwischen den direkten und den indirekten Strahlungsdruckeinflüssen. Der direkte Strahlungsdruck wird verursacht durch die direkte Sonnenstrahlung, der indirekte durch die von der Erde reflektierte (Albedo-) resp. reemitierte (Infrarot-) Strahlung.

Wenden wir uns zunächst dem direkten Strahlungsdruck zu:

5.2.1 Der direkte Strahlungsdruck

Für einen kugelförmigen Satelliten berechnet sich die durch den (direkten) Strahlungsdruck verursachte Beschleunigung unabhängig davon, ob die Strahlung absorbiert oder reflektiert wird zu:

$$\vec{b}_{\text{Str}} = k \frac{S}{c} \frac{A}{m} \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|} = k \vec{b}'_{\text{Str}} \quad (1)$$

Dabei ist:

- S = Solarkonstante = $1.36 \cdot 10^6$ erg/cm²/sec
- A = Querschnittfläche des Satelliten
- m = Masse des Satelliten

c = Lichtgeschwindigkeit

k = 1, falls der Satellit ausserhalb des Erdschattens ist
 0, falls der Satellit innerhalb des Erdschattens ist

Aus (1) ist ersichtlich, dass der Strahlungsdruck bei den Licht-Schattenwechseln eine Unstetigkeit aufweist. In Wirklichkeit dürfte allerdings dieser Uebergang stetig sein wegen Refraktions- und Halbschatteneffekten. Da aber diese Effekte weitgehend ungeklärt sind, ist ein Ansatz (1) unumgänglich. Diese Unstetigkeit sieht zwar harmlos aus, ist aber leider sehr schwierig zu "behandeln":

Der Licht-Schattenwechsel

Bedingungen für Schatteneintritt und -austritt:

2 vereinfachende Annahmen:

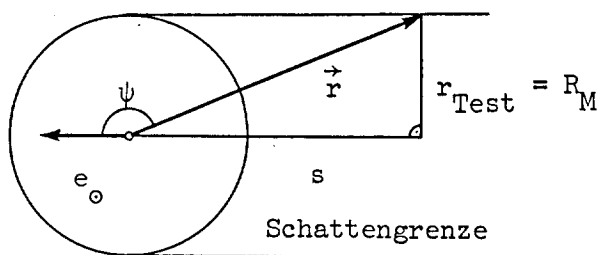
- Die Erde sei kugelförmig mit einem mittleren Radius R_M .
- Die Schattengrenze im Raum ist ein Rotationszylinder mit Radius R_M und Achse Erdmittelpunkt-Sonne. (Vernachlässigung von Halbschatteneffekten)

Dass diese Näherungen erlaubt sind, wird später gezeigt.

Es sei: $\vec{e}_o = \frac{\vec{R}_o}{|\vec{R}_o|}$; $\psi = \angle(\vec{e}_o, \vec{r})$
 $s = \vec{r} \cdot \vec{e}_o = |\vec{r}| \cos \psi$

Bedingungen für Schatteneintritt resp. -austritt (s. Figur 1):

1. $s < 0$ (2)
2. $r_{\text{Test}} = \sqrt{|\vec{r}|^2 - s^2} = R_M$



Zeichenebene = Ebene (\vec{e}_o, \vec{r})

Figur 1

Es muss bei jedem Integrationsschritt geprüft werden, ob ein Wechsel Licht-Schatten oder Schatten-Licht stattgefunden hat. Wenn ja, wird der Zeitpunkt dieses Wechsels durch lineare Interpolation mit Hilfe der bei jedem Integrationsschritt berechneten Grösse r_{Test} approximiert. Im Rahmen dieses Schattenmodells wird dadurch der Uebergang Licht-Schatten auf ca. 50 m genau berechnet, was ausreichend genau ist.

Zu diesem Zeitpunkt werden Ort und Geschwindigkeit berechnet. Diese beiden Vektoren sind jetzt Anfangsbedingungen für die Integration im neuen Kraftfeld (Faktor k in (1) wird neu gesetzt).

Es müssen die Differenzenschemata für die Integration im "neuen" Kraftfeld berechnet werden. Dieses Verfahren kann hier wesentlich beschleunigt werden, da in diesem Falle die alten Differenzentafeln schon eine gute Näherung der neuen darstellen:

Es seien $\nabla^k \vec{f}$, $k = 0, \dots, q$ die "alten" Differenzen, die zum Zeitpunkt des Wechsels in der Maschine vorhanden sind. Mit diesen kann nun mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel eine gleichabständige Tabelle der \vec{f}_i berechnet werden zu den gewünschten Zeiten. An diese Werte werden noch die Korrekturen angebracht:

$$\vec{f}'_i = \vec{f}_i + \lambda \cdot b'_{\text{Str}}$$

Dabei ist: $\lambda = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ bei Wechsel Schatten-Licht} \\ -1 \text{ bei Wechsel Licht-Schatten} \end{array} \right\}$ (3)

Diese schon sehr guten Anlaufschemas können jetzt noch mit ein bis zwei Iterationsschritten verbessert werden.

Hier wurden konsequent zwei Iterationsschritte benützt, da dadurch die Licht-Schatten-Wechsel bei den üblichen Schrittweiten im Rahmen der Rechenpräzision fehlerfrei erfolgen. Dies bedeutet eine Verlangsamung des Verfahrens um ca. 20 %.

Es muss betont werden, dass es bei der Verwendung von Differenzenverfahren für die Integration keinesfalls erlaubt ist, einfach über diese Unstetigkeiten hinweg zu integrieren. Einige Versuche haben gezeigt, dass dadurch bereits nach dem Zeitintervall von ca. einem Tag Fehler der Grössenordnung 1 bis 2 km gegenüber der korrekt integrierten Bahn rein durch fehlerhafte Behandlung dieser Unstetigkeiten eingeführt werden. Bei Satelliten mit kleinerem Quotienten $\frac{A}{m}$ sind die Fehler natürlich entsprechend kleiner, verfälschen jedoch bei längeren Bogen die Bahnen doch in untragbarer Art und Weise.

Zum Schluss dieser Licht-Schatten-Betrachtungen sei noch darauf hingewiesen, dass das hier angegebene Verfahren auch ohne die nachfolgende Verbesserung der Anlaufsequenzen (3) in vielen Fällen der Praxis völlig ausreichend ist. Ausgedehnte Versuche mit dieser Näherung haben ergeben, dass im Fall von Pageos schon diese einfachen Verbesserungen die Fehler reduziert haben auf ca. 1 mm im Intervall von einem Tag.

Daraus kann geschlossen werden, dass diese genäherte Behandlung der Unstetigkeiten für Satelliten mit wesentlich kleineren Quotienten $\frac{A}{m}$ (z.B. Geos) völlig korrekt ist. Der Vorteil dieser genäherten Behandlung liegt auf der Hand: Anstelle einer Verlangsamung von 20 % hat man noch eine Verlangsamung von ca. 2%.

Noch ein Hinweis technischer Natur:

- Bei der Integration der Variationsgleichungen treten die gleichen Schwierigkeiten auf wie bei der Integration der Primärgleichungen. Die Probleme können aber in genau der gleichen Art gelöst werden, bloss dass anstelle der \vec{b}'_{Str} in (3) andere Vektoren auftreten.

Nicht-Sphärizität des Satelliten

Bisher wurde stillschweigend angenommen, die Oberfläche von Pageos sei kugelsymmetrisch. In den letzten Jahren häuften sich jedoch die Anzeichen dafür, dass dies nicht der Fall ist:

- Bei der Darstellung der Bahn dieses Satelliten über längere Zeitintervalle (z.B. für Prognosen-Rechnung) ergaben sich Residuen bis zur Grössenordnung 20-40 km. (s. {16}, {19})
 - Photometrische Beobachtungen haben eine periodische Variation der Helligkeit des Satelliten gezeigt (s. {18}). Diese Helligkeitskurven konnten erklärt werden durch die Eigenrotation des Satelliten: Rotationsperiode 3 bis 5 Minuten. Die Rotationsachse ihrerseits dreht sich einmal in 8 - 15 Tagen um die Achse Satellit-Sonne (= Präzessionsachse). Der Winkel zwischen Präzessions- und Rotationsachse beträgt ca. $65 - 70^\circ$. Diese Angaben beziehen sich auf das Zeitintervall August-Oktober 1969. Der quantitative Verlauf dieser Lichtkurven wurde durch ein einfaches Modell der Satellitenoberfläche dargestellt: der Satellit wurde als verlängertes Rotationsellipsoid angenommen. Die Rotationsachse ist eine der kleinen Achsen. Die Halbachsen wurden geschätzt zu 17 m resp. 13 m.
- Mit solchen Modellen für die Satellitenoberfläche wurde von D.E. Smith und K.H. Fea in {17} eine genäherte Theorie für die analytische Behandlung des Strahlungsdrucks gegeben. Die Residuen in der Bahn konnten in diesem Zeitraum (August-Oktober 1972) drastisch um ca. eine Zehnerpotenz reduziert werden (s. {19}).

Es kann daher als gesichert angenommen werden, dass die Nicht-Sphärizität des Satelliten einen wesentlichen Einfluss auf die Bahn ausübt.

Unklücklicherweise stehen nun meines Wissens solche photometrische Beobachtungen in ähnlicher Häufigkeit nicht für weitere Zeitintervalle zur Verfügung. Die wesentlichen Grössen für die Anwendung der Theorie (Präzessionsperiode, Achsenverhältnis) sind aber zu stark variabel, als dass sie über längere Zeitintervalle extrapoliert werden könnten. Im übrigen ist nicht klar, ob das Modell für die Form des Satelliten ausreichend genau ist.

Aus diesen Gründen wurde hier für Bogen bis zu 2 - 3 Tagen Länge ein empirischer Weg zur Behandlung dieser Effekte eingeschlagen; für den Strahlungsdruck wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\vec{b}_{\text{Str}}^2 = k \left\{ \vec{b}'_{\text{Str}} + \vec{s}_0 + t \vec{s}_1 + \frac{1}{2} t^2 \vec{s}_2 + \dots \right\} \quad (4)$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{Satellit ausserhalb des Erdschattens} \\ 0, & \text{Satellit innerhalb des Erdschattens} \end{cases}$$

Die Vektoren \vec{s} , \vec{s}_1 , \vec{s}_2 etc. werden im allgemeinen für den betreffenden Bogen bestimmt. Dieser Ansatz ist bestimmt nicht optimal. Er wurde angenommen als Arbeitsgrundlage. Es besteht aber die Hoffnung, damit Näherungswerte für die Präzessionsperiode der Rotationsachse zu finden. Ist diese einmal bekannt, kann mit einem harmonischen Ansatz bestimmt ein wirklichkeitsgetreueres Modell gefunden werden.

Vorläufig aber geht es darum festzustellen, ob dieser Ansatz geeignet ist zur Darstellung von Bogen bis ca. 2 Tagen Länge. Insbesondere muss untersucht werden, ob damit das wahrscheinlich wirklichkeitsnähere Modell des elliptischen Satelliten in diesem Zeitraum hinreichend genau befriedigt werden kann. Es muss geprüft werden, welche Fehler durch diesen (im Rahmen des elliptischen Modells für den Satelliten) falschen Ansatz in die Bestimmung der Stationskoordinaten und der systematischen Zeitfehler eingeführt werden.

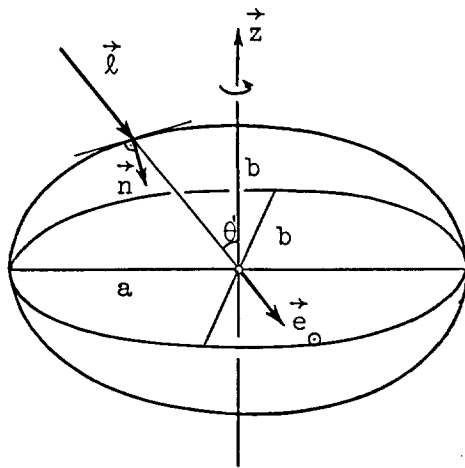
Für Untersuchungen dieser Art leistet nun das Simulationsprogramm sehr gute Dienste. Allerdings muss man in dieses Programm das Kraftmodell für die Wirkungen des Strahlungsdruckes auf den elliptisch angenommenen Satelliten einführen.

Es hat keinen Sinn, hier alle Formeln wiederzugeben. Es sollen lediglich die Hauptzüge des Modells vorgestellt werden. Für genauere Hinweise s. {17}.

Es wird hier noch die vereinfachende Annahme gemacht, der Satellit sei hundertprozentig spiegelnd.

Grundzüge des Modells nach [17]:

- Es wird der zeitliche Mittelwert des Strahlungsdruckes über eine Rotationsperiode gebildet, d.h. kurzperiodische Störungen infolge dieser Rotation werden vernachlässigt.
- Der Satellit ist ein Rotationsellipsoid (grosse Halbachse a , zwei kleine Halbachsen b), das um b rotiert.



Figur 2

Zeichenebene = Ebene (\vec{l}, \vec{z})

\vec{z} = Rotationsachse

\vec{e}_0 = Richtung Sonne-Satellit

$\Theta' = \angle(\vec{z}, -\vec{e}_0)$

\vec{l} = Lichtstrahl durch den Mittelpunkt des Satelliten

\vec{n} = Flächennormale im Durchstosspunkt von \vec{l} durch Satellitenoberfläche

a = grosse Halbachse

b = kleine Halbachse

- Richtung des resultierenden Vektors: Aus Symmetriegründen muss dieser Vektor in der Ebene $E(\vec{z}, \vec{e}_0)$ liegen. In 1. Näherung kann die Richtung parallel zu \vec{n} angenommen werden.
- Betrag des resultierenden Vektors: Es wird der Mittelwert der Schnittflächen $\perp \vec{l}$ über eine Rotationsperiode gebildet. Für den Betrag der Beschleunigung muss dann noch mit $\frac{S}{c} \frac{1}{m}$ multipliziert werden.
- Bei der Präzession der Rotationsachse um \vec{l} beschreibt diese einen Rotationskegel mit Achse \vec{l} und halbem Öffnungswinkel Θ' . Die resultierende Beschleunigung beschreibt dann einen Rotationskegel mit gleicher Achse und halbem Öffnungswinkel ϵ .

Als Eingaben in das Simulationsprogramm für dieses Modell dienen die folgenden Grössen:

a, b : grosse, kleine Halbachse

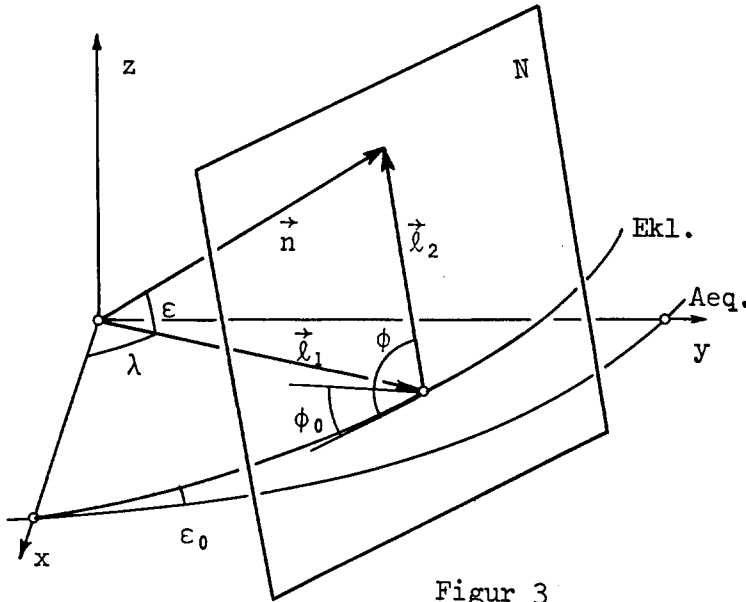
Mit diesen (und mit den als Programmkonstanten vorhandenen Werten für Masse, Solarkonstante, Lichtgeschwindigkeit) wird der Betrag b des resultierenden Vektors berechnet.

Θ' : Mit a, b, Θ' wird der halbe Öffnungswinkel ϵ des Kegels für die resultierende Kraft berechnet.

U : Präzessionsperiode $\rightarrow \omega$ Winkelgeschwindigkeit ($\omega = 2\pi/U$).

ϕ_0 : Phasenwinkel

Mit ω und ϕ_0 kann die Richtung des resultierenden Vektors für jeden Zeitpunkt T berechnet werden (s. Figur 3).



Figur 3

Es sei:

\vec{n} : Einheitsvektor der resultierenden Kraft zur Zeit T

\vec{l}_1 : Vektor || Richtung (Sonne-Satellit)

N : Normalebene zu \vec{l}_1 im Endpunkt von \vec{l}_1

\vec{l}_2 : Vektor $\in N$

Für die 3 Vektoren $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{n}$ gelte: $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{n}$

Im weiteren sei:

λ : Länge des Satelliten in der Ekliptik
(\approx Länge der Erde in der Ekliptik)

Es ist:

$$\begin{aligned} |\vec{l}_1| &= \cos \epsilon \\ |\vec{l}_2| &= \sin \epsilon \end{aligned}$$

Im Aequatorsystem gilt:

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{r} - \vec{R}_0}{|\vec{r} - \vec{R}_0|} \cos \epsilon$$

$$\vec{l}_2 = \sin \epsilon \cdot R_1(-\epsilon_0) R_3(-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} ; \phi = \phi_0 + \omega t$$

Bei der Transformation von $\vec{\lambda}_2$ ins Aequatorsystem wurde die Position der Satelliten in der Ekliptik angenommen. Diese Vereinfachung ist unbedeutend für das Modell.

Mit diesem Modell für den Strahlungsdruck wurden mit dem Simulationsprogramm für verschiedene Parameterkombinationen Beobachtungen simuliert. Dabei entsprechen die simulierten Beobachtungskonfigurationen immer tatsächlich vorhandenen.

Als Beobachtungsstationen dienen Zimmerwald und Delft (Daten von Graz waren damals noch nicht vorhanden).

Es wurde vor allem der Bogen simuliert, der dem "besten" wirklichen entspricht. Dieser hat eine Länge von ca. 28 Std. (\sim 4. - 6. Oktober 1972). Dabei steuert Zimmerwald Daten aus 4, Delft Daten aus 3 Durchgängen bei. Die mit diesem Bogen gewonnenen Resultate wurden nur noch durch Stichproben mit anderen Beobachtungskonfigurationen erhärtet.

Variiert wurden die folgenden Modellparameter:

$$\begin{aligned} \text{Präzessionsperiode } U &: 10^d, 14^d \\ \text{Phasenwinkel } \phi_0 &: (0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ) \\ \theta' = 65, a = 14 \text{ m}, b = 16 \text{ m} \end{aligned}$$

(Einige Stichproben mit anderen Präzessionsperioden brachten keine wesentlich neuen Einsichten).

Auf eine systematische Variation von θ' , a und b wurde verzichtet, da dies bloss eine Verstärkung resp. Abschwächung des betrachteten Störeinflusses (Multiplikation mit einem Skalenfaktor).

Die so erzeugten Beobachtungen dienen als Eingaben ins Parameterbestimmungsprogramm.

Mit diesem Programm werden jetzt die Stationskoordinaten und ein systematischer Zeitshift von Delft berechnet mit zwei verschiedenen Ansätzen vom Typ (4).

$$1. \quad \vec{b}_{\text{Str}} = k \{ \vec{b}'_{\text{Str}} + \vec{s}_0 \} \quad (4a)$$

$$2. \quad \vec{b}_{\text{Str}} = k \{ \vec{b}'_{\text{Str}} + \vec{s}_0 + \vec{s}_1 t \} \quad (4b)$$

Dabei werden die Vektoren \vec{s}_0 , resp. \vec{s}_0 und \vec{s}_1 vom Parameterbestimmungsprogramm simultan mit den Anfangsbedingungen, den Koordinaten und dem Zeitshift von Delft bestimmt.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$: vom Programm berechnete Werte - "wahre" Werte, d.h. im Simulationsprogramm verwendete Werte für Koordinaten resp. Zeitshift von Delft.

Ansatz 4a

Tabelle 1

| $\phi_0 \backslash U$ | 14^d | | | | 10^d | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| | Δx [m] | Δy [m] | Δz [m] | Δt [m sec] | Δx [m] | Δy [m] | Δz [m] | Δt [m sec] |
| 0° | -8.7 | -6.6 | -27.6 | -4.6 | -11.7 | -8.1 | -32.9 | -5.4 |
| 90° | +4.0 | +6.1 | +30.1 | +5.3 | 6.9 | +9.5 | +46.5 | +8.1 |
| 180° | +8.7 | +6.6 | +27.7 | +4.6 | 11.7 | +8.1 | +32.9 | +5.4 |
| 270° | -3.9 | -6.1 | -30.1 | -5.3 | -6.9 | -9.5 | -46.5 | -8.1 |

Ansatz 4b

Tabelle 2

| $\phi_0 \backslash U$ | 14^d | | | | 10^d | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| | Δx [m] | Δy [m] | Δz [m] | Δt [m sec] | Δx [m] | Δy [m] | Δz [m] | Δt [m sec] |
| 0° | -0.6 | +0.1 | +0.8 | +0.1 | -1.3 | +0.2 | +1.6 | +0.3 |
| 90° | -0.3 | 0.0 | +0.5 | +0.1 | -0.5 | +0.1 | +0.8 | +0.1 |
| 180° | +0.6 | -0.1 | -0.8 | -0.1 | +1.3 | -0.2 | -1.6 | -0.3 |
| 270° | +0.3 | 0.0 | -0.5 | -0.1 | +0.5 | -0.1 | -0.8 | -0.1 |

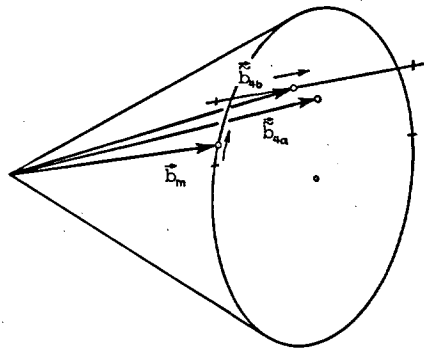
Versuche mit dem "nächstbesseren" Ansatz vom Typ (4) haben die Fehler nochmals um ca. einen Faktor 20 schrumpfen lassen. Allerdings kommt dieser Ansatz für die Verarbeitung von realen Ein-Tagesbogen kaum mehr in Frage, da schon die Abweichungen mit dem Ansatz (4b) deutlich unterhalb den zu erwartenden Streuungen liegen.

Ein Ansatz vom Typ (1) liefert vergleichsweise Fehler der Grössenordnung 100 m - 300 m in den Koordinaten bei dieser Bogenlänge. Bei Bogen jedoch, die nur Daten eines Durchgangs des Satelliten enthalten, kann dieser Ansatz durchaus genügen. Das fehlerhafte Kraftfeld wird dann durch die Anfangsbedingungen absorbiert.

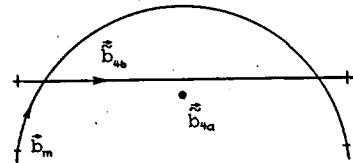
Die Vektoren \vec{s}_0 und \vec{s}_1 wurden vom Parameterbestimmungsprogramm immer so bestimmt, dass die durch das betreffende Modell definierte Bewegung der Strahlungsdruckbeschleunigung approximiert wurde (s. Figur 4):

Figur 4

a) Räumliche Bewegung



b) Bewegung des Endpunktes des Vektors



\vec{b}_m : Die durch das Modell definierte Bewegung des Strahlungsdruckvektors
 $\vec{b}_{4a}, \vec{b}_{4b}$: Die vom Bestimmungsprogramm berechneten Werte bei den Ansätzen (4a) resp. (4b)

Diese Tatsache gibt natürlich Vertrauen in den eingeschlagenen Weg.

Einige Bemerkungen zu diesem Vorgehen:

1. Aus der vorausgegangenen Diskussion wird klar, dass eine Nicht-Sphärizität des Satelliten mit solchen Ansätzen bei mittellangen Bogen (1-2 Tage) gut dargestellt werden kann. Aus den bei verschiedenen Bogen gewonnenen Werten für $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \dots$ können Abschätzungen über die Oberfläche des Satelliten gemacht werden.
2. Die Ansätze können so gewählt werden, dass sie die Bestimmung von Stationskoordinaten und Zeitshifts nur unwesentlich beeinflussen. Aus den Tabellen 1 und 2 ist im weiteren ersichtlich, dass die durch die Ansätze bedingten Fehler gemittelt über alle ϕ_0 gleich Null sind, d.h. es kann erwartet werden, dass diese Fehler bei der Verwendung von vielen Bogen herausgemittelt werden.
3. Ein solcher Ansatz (4) birgt natürlich die Gefahr, dass mit ihm andere Effekte erfasst werden. Besondere Vorsicht wäre am Platz, wenn gleichzeitig Potentialparameter bestimmt würden. Dies ist jedoch vorderhand nicht geplant. (Es wäre für einen Satelliten wie Pageos auch kaum möglich.) Sind

jedoch bis jetzt nicht erkannte bahnbestimmende Kräfte für diesen Satelliten vorhanden, so sollte man anhand der zeitlichen Variation der Vektoren $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \text{etc.}$ diesen Kräften auf die Spur kommen können:

Abschliessend noch die Differentialgleichungen für die in den Fehlergleichungen benötigten partiellen Ableitungen:

Es sei:

$$s_{i,j} = j\text{-te Komponente von } \vec{s}_i$$

Aus der allgemeinen Form der Variationsgleichungen folgt:

$$\left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial s_{i,j}}\right) = A \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial s_{i,j}} + B \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial s_{i,j}}\right) + \frac{\partial \dot{\vec{f}}}{\partial s_{i,j}}$$

Dabei ist nun nach (4):

$$\frac{\partial \dot{\vec{f}}}{\partial s_{i,j}} = \frac{\partial \dot{\vec{b}}_{\text{Str}}}{\partial s_{i,j}} = \frac{1}{i!} \cdot k t^i \delta_j$$

Dabei ist δ_j die j-te Kolonne der Einheitsmatrix.

5.2.2 Der indirekte Strahlungsdruck

Es ist schwierig, die Wirkungen der beiden Strahlungstypen, Albedo-Strahlung und Infrarotstrahlung, genau zu beschreiben, da hierzu die Reflexionseigenschaft und die Emissionseigenschaften der Erde bekannt sein sollten.

a) Die Albedo-Strahlung

Im Prinzip sollte man unterscheiden zwischen diffuser und spiegelnder Reflexion. Die Spiegelung wird hier nicht diskutiert, da sie in der Natur kaum vorkommen dürfte.

Bei der diffusen Reflexion wird der Reflexionsvorgang meist nach dem Lambertschen Gesetz angenommen. Bei bekannten Reflexionskoeffizienten (Erd-Albedo) ist es dann im Prinzip einfach, durch Integration über den vom Satelliten aus sichtbaren Teil der Erdoberfläche die Albedo-Strahlung zu berücksichtigen. Eine exakte Lösung ist dabei nur durch numerische Integration möglich. Problematisch ist die Schätzung der Albedo. Heute wird meist mit sehr einfachen Ansätzen gerechnet (Albedo = konstant, oder Annahme einer einfachen Pol-Aequator-Variation).

Um einen Eindruck von den Wirkungen dieser Strahlung zu erhalten, wurde ein sehr einfaches Näherungsmodell für die Albedo-Strahlung ins Simulationsprogramm eingebaut. Dieses Modell ist im wesentlichen identisch mit dem von Prior in {20} verwendeten.

Die wichtigsten Modellcharakteristiken: Es wird mit einer konstanten Albedo von 0.32 gerechnet.

Berechnung der Albedo-Beschleunigung (s. {20}):

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\text{Alb}} &= 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{A}{m} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \cos\theta \frac{\vec{r}}{r} ; & 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \\ \vec{b}_{\text{Alb}} &= 0 ; & 90^\circ < \theta \end{aligned} \quad (5)$$

\vec{b}_{Alb} in [cm/sec²]

Dabei ist:

- \vec{r} : Radiusvektor des Satelliten
- R_E : Aequatorradius der Erde
- θ : \sphericalangle (Sonne, Erde, Satellit)

Dieser Ansatz hat die unangenehme Eigenschaft, bei $\theta = 90^\circ$ nicht differenzierbar zu sein. Daher wurde er wie folgt modifiziert:

$$\vec{b}'_{\text{Alb}} = \lambda_1 \frac{A}{m} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 e^{-\lambda_2 \theta^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{in [cm/sec}^2] \quad (5a)$$

$$\lambda_1 = 1.5 \cdot 10^{-5} ; \quad \lambda_2 = 0.75$$

λ_2 wurde dabei so gewählt, dass (5a) die Formel von Prior {20} im Intervall $|\theta| \leq 70^\circ$ möglichst gut approximiert. (Diese Approximation ist in allen Fällen besser als 10 %).

Ansätze wie (5), (5a) sind zwar sicher nicht korrekt, können aber zweifellos verwendet werden, um einen Eindruck von der Grössenordnung der Auswirkungen der Albedo-Strahlung auf Satelliten-Bahnen zu erhalten.

Mit diesem Modell werden nun - genau wie bei der Untersuchung der Elliptizität der Satellitenoberfläche - Beobachtungen simuliert (Ein-Tagesbogen).

Dabei hat sich gezeigt, dass diese Beobachtungen bei Ein-Tagesbogen bei Verwendung des Ansatzes (4a) praktisch ideal dargestellt werden. Die Verfälschungen von Stationskoordinaten und Zeitkoorekturen sind unwesentlich.

Dieses Resultat ist nicht sehr erstaunlich, weiss man doch aus analytischen Ueberlegungen, dass der direkte Strahlungsdruck und die Albedo-Strahlung ähnliche Bahnstörungen verursachen.

Da aber bei der Analyse von Ein-Tagesbogen sowieso die Ansätze (4a), (4b) verwendet werden müssen (wegen des direkten Strahlungsdruckes), wurde auf den Einbau der Albedo-Strahlung ins Parameterbestimmungsprogramm vorläufig verzichtet.

b) Infrarot-Strahlung

Es ist klar, dass die von der Erde absorbierte Energie wieder abgestrahlt werden muss. Problematisch ist aber, wie sie abgestrahlt wird. Wird diese Infrarot-Strahlung beispielsweise isotrop emittiert, so überlegt man sich leicht, dass dies gleichbedeutend ist mit einer kleinen Reduktion (Grössenordnung 10^{-6}) der Gravitationskonstante. Wird hingegen, wie in dieser Analyse, mit einer fest vorgegebenen Gravitationskonstante gearbeitet, muss die Halbachse der Bahn um ca. 1 - 2 m verkleinert werden. Man kann also sagen, dass in diesem Falle keine wesentlichen Bahnstörungen verursacht werden.

Es ist nun bekannt, dass diese Abstrahlung nicht isotrop ist. Gesichert ist vor allem eine Aequator-Pol-Variation. Andererseits ist diese Variation nicht sehr stark, so dass das isotrope Modell als vernünftige Näherung angesehen werden kann.

Daher wurde die Infrarot-Strahlung hier vernachlässigt.

5.3 Weitere Simulationen - Kritische Bemerkungen

a) Schattengrenze

Man überlegt sich leicht, dass die Schattengrenze in Wirklichkeit sehr stark variabel sein kann: Hohe Wolkendecken können je nach Geometrie des Schatteneintritts resp. -austritts diese Grenze um 10 - 50 km verändern.

Daher wurde eine Bahn simuliert mit einem um 20 km zu grossen Radius des Schattenzylinders. Bei der Darstellung der Bahn mit dem Bestimmungsprogramm wurde mit dem "richtigen" Radius und dem Ansatz (4a) gearbeitet. Die Bahn konnte praktisch perfekt dargestellt werden. Von allen Simulationen war dies bei weitem die "erfolgreichste".

b) Höhere Terme des Gravitationspotentials

Für die Verarbeitung von wirklichen Beobachtungen ist es wichtig zu wissen, wieviele Terme des Gravitationspotentials der Erde zu berücksichtigen sind. Aus ökonomischen Gründen wird man bemüht sein, diese Zahl möglichst niedrig zu halten. Diese ist natürlich abhängig von der Bogenlänge.

Dabei hat sich gezeigt, dass für Bogenlängen von ca. 1 - 2 Tagen die Potentialentwicklung bis Grad und Ordnung 8 völlig ausreichend ist bei Verwendung des Ansatzes (4a). Bei Verwendung längerer Bogen müsste diese Untersuchung entsprechend verfeinert werden. Beim Satelliten Pageos müsste insbesondere das Problem der Resonanzen mit Termen der Ordnung 8 genauer geprüft werden.

Kritische Bemerkungen

1. Bei den bisher besprochenen Simulationen wurden fehlerfreie Beobachtungen simuliert. Die vom Parameterbestimmungsprogramm am Schluss übriggelassenen Residuen sind im Bereich einer Aufnahme systematischer Natur.

Diese Systematiken können immer sehr gut durch eine Gerade dargestellt werden. Dabei ist es im allgemeinen so, dass der lineare Term sehr klein ist.

Diese Aussage ist richtig für alle hier durchgeführten Simulationen (Albedo, elliptischer Satellit, höhere Gravitationsterme).

Dies ist von Bedeutung für die Beurteilung des verwendeten Modells bei der Verarbeitung von reellen Beobachtungen: Sind die dort auftretenden Systematiken so, dass in den "meisten" Fällen diese Geraden die Nullstellen

ca. in der Mitte der Aufnahmen haben, ist das verwendete Modell sicher ausreichend.

2. Es soll hier nochmals auf die Gefahren der Ansätze (4) hingewiesen werden anhand der Simulationen zum Thema "höhere Terme des Gravitationspotentials":
Bei einem speziellen Beispiel wurden die Beobachtungen mit einem Ansatz bis Grad und Ordnung 8 simuliert. Das Bestimmungsprogramm enthielt Terme bis Grad und Ordnung 4. Mit dem Ansatz (4a) aber konnten die Einflüsse dieser Terme recht gut dargestellt werden. Das heisst also, dass beim Versuch, Gravitationsterme zu bestimmen, die Ansätze (4) nicht geeignet sind. Andererseits kann hier vorweggenommen werden, dass die Grössenordnung der Residuen, die bei der Auswertung von reellen Beobachtungen (ohne Ansätze (4)) auftreten, keinesfalls durch fehlerhafte Potentialterme erklärt werden können.

5.4 Datenaufbereitung

Diese Aufgabe wird von einem Spezialprogramm übernommen.

Eingaben:

1. Beobachtungen der Stationen (geometrische Richtung im System 1950.0).
Diese Daten werden in dem für die Short-Arc-Beobachtungen vorgesehenen Format von Lochkarten eingelesen.
2. Genäherte Anfangsbedingungen für jeden Bogen zu einem Zeitpunkt T_0 (in der Form von Keplerschen Elementen).
3. UT 1 - UTC, Polschwankungsmatrix.

Die Beobachtungen eines Bogens werden nun zeitlich geordnet (aufsteigend für Zeiten $> T_0$, absteigend für Zeiten $< T_0$). Es können beliebig viele Bogen hintereinander folgen.

Ausgaben:

1. Kontrollliste mit den zeitlich geordneten Beobachtungen.
2. Gleiche Information auf Plattenspeicher (Disk).
3. Anfangsbedingungen, UT 1 - UTC, Polschwankungsmatrix, Anzahl Beobachtungen für jeden Bogen auf gesondertem Disk.

Die von diesem Programm erzeugten Ausgabedaten sind formal identisch mit denen des Simulationsprogrammes. So ist ein reibungsloses Umschalten (Simulation \leftrightarrow Verarbeitung von reellen Beobachtungen) gewährleistet.

Anmerkung: Sind für einen Bogen keine genäherten Anfangsbedingungen bekannt, werden solche vom Programm berechnet: Bei der Eingabe werden die Elemente und die Anfangsepoche gleich Null gesetzt (Leerkarten). Im Programm wird dann durch die erste und letzte Beobachtung des Bogens eine Kreisbahn gelegt (Erde kugelförmig angenommen!). Dies ist als erste Näherung für die Anfangselemente durchaus genügend. Als Epoche wird die nächstliegende Durchgangszeit durch den aufsteigenden Knoten gewählt.

5.5 Vergleichswerte für die Stationskoordinaten

Die Zielsetzung ist, wie eingangs erwähnt, das Einmessen der Beobachtungsstationen in das System geozentrischer Stationskoordinaten von SAO-Standard-Earth III.

Von den 3 hier verwendeten Stationen ist lediglich Zimmerwald zuverlässig in diesem System bekannt (s. {2}):

$$\text{ZMWLD: } X=4331304.7 \text{ m ; } Y=567521.8 \text{ m ; } Z=4633101.2 \text{ m} \quad (6)$$

Die Station Delft Ypenburg (Delft Y) wurde vom Smithsonian Astrophysical Observatory (s. {22}) in dieses System eingemessen:

$$\text{DELFT Y: } X=3919651.8 \text{ m ; } Y=298840.9 \text{ m ; } Z=5005893.8 \text{ m} \quad (7)$$

Diese Bestimmung stützte sich auf 47 Geos-2 Beobachtungen, verteilt auf 3 Bogen. Dies sind, verglichen mit den "gesicherten" Stationen im SAO-III-System, nur sehr wenige Beobachtungen. Auch zeigt eine Untersuchung in {22} nicht die erwartete Konsistenz mit anderen Stationen. Daher wurden die Koordinaten von Delft Y noch auf 2 anderen Wegen geschätzt:

1. Mit gesicherten Stationen des SAO-III-Systems wurde eine Transformation des europäischen Datums 1950 ins SAO-III-System berechnet. Transformationsparameter sind dabei ein Skalenfaktor, 3 Translationsparameter und 3 Rotationsparameter. Mit diesen Transformationsparametern wurden folgende Koordinaten von Delft Y im SAO-III-System berechnet:

$$\text{DELFT Y: } X'=3919690 \text{ m ; } Y'=298839 \text{ m ; } Z'=5005887 \text{ m} \quad (7a)$$

(Die Transformationsparameter wurden mit 7 Stationen bestimmt; ein Hinzu-nehmen oder Weglassen von Stationen ergibt keine wesentlichen Änderungen in den transformierten Koordinaten.)

2. Von Marsh {23} wurden geozentrische Koordinaten von europäischen Beobachtungsstationen gegeben. (Beobachtungen von Geos 1, Geos 2. Gravitationsfeld im wesentlichen nach SAO; die Stationskoordinaten wurden mit einem numerischen Verfahren bestimmt. Die verwendete Bogenlänge beträgt ca. 2 Tage.)

Hier mussten 2 Transformationen berechnet werden:

- Eur. Datum 1950 → Marsh-System
- Marsh-System → SAO-III-System

Resultat:

$$\text{DELFT Y: } X''=3919688 \text{ m ; } Y''=298837 \text{ m ; } Z''=5005894 \text{ m} \quad (7b)$$

Die Station Graz ist nicht im SAO-III-System vorhanden. Ihre Koordinaten müssen also nach 1. oder 2. geschätzt werden:

$$1. \text{ GRAZ: } X'=4194438 \text{ m ; } Y'=1162694 \text{ m ; } Z'=4647207 \text{ m} \quad (8a)$$

$$2. \text{ GRAZ: } X''=4194437 \text{ m ; } Y''=1162693 \text{ m ; } Z''=4647220 \text{ m} \quad (8b)$$

Die hier gegebenen Schätzungen dienten als Näherungswerte für die nun folgende Voruntersuchung und als Vergleichswerte für die schliesslich berechneten Stationskoordinaten.

6. DATENANALYSE

6.1 Untersuchungsmethode

Alle Beobachtungen einer Station innerhalb des gleichen Umlaufs des Satelliten werden zu einem Bogen zusammengefasst. Diese Daten werden zu einer reinen Bahnbestimmung in einem fest vorgegebenen Kräftefeld verwendet. Das heisst, dass alle Beobachtungen mit 6 Parametern, den Anfangsbedingungen, dargestellt werden. Das verwendete Kräftefeld ist das eingangs des 2. Teils erwähnte. Der Strahlungsdruck kann bei so kurzer Bogenlänge mittels Ansatz (1) dargestellt werden. Bei der Entwicklung des Erdpotentials wäre eine Darstellung bis Grad und Ordnung 4 völlig ausreichend gewesen. Da aber vorläufig diese Datenanalyse und die nachfolgenden Parameterbestimmungen mit dem gleichen Programm durchgeführt werden, wurde einfachheitshalber das für beide Fälle ausreichende Feld verwendet.

Fehlerhafte Stationskoordinaten können bei diesen kurzen Bogen, da ja nur eine Station beteiligt ist, grösstenteils durch die Anfangsbedingungen dargestellt werden.

Unter der Voraussetzung, dass keine wesentlichen bahnbestimmenden Kräfte vernachlässigt werden, können die über die einzelnen Aufnahmen auftretenden systematischen Fehler als Beobachtungsfehler oder als Reduktionsfehler interpretiert werden.

Einen ersten Eindruck von der Qualität der Beobachtungen erhält man durch den mittleren Fehler der Satellitenposition über den ganzen Bogen. Dieser wird im folgenden m_1 genannt.

Dieser Fehler kann verglichen werden mit dem mittleren Fehler, den man bei Darstellung der von der Bahnbestimmung gelieferten Residuen mittels Geraden im Bereich der einzelnen Aufnahmen erhält. Diese mittlere Fehler werden m_2 genannt. (Dabei ist $m_2 = (m_{2\alpha}^2 + m_{2\delta}^2)^{1/2}$; $m_{2\alpha}$: mittlerer Fehler in Rektaszension, multipliziert mit $\cos\delta$, $m_{2\delta}$: mittlerer Fehler in Deklination,)

\bar{m}_2 ist der Mittelwert der m_2 über alle Aufnahmen des Bogens.

Der Quotient m_1/\bar{m}_2 gibt unter den oben erwähnten Voraussetzungen Aufschluss über die Grössenordnung der durch die Beobachtungen oder die Reduktion eingeführten systematischen Fehler.

Im Falle von Zimmerwald und Delft werden diese Fehler m_2 noch verglichen mit den von den Reduktionsverfahren bestimmten mittleren Fehlern m_3 . Diese Fehler m_3 erhält man bei der Darstellung der Satellitenspur durch Polynome 2. Grades bei Delft und durch Polynome 3. Grades bei Zimmerwald.

Diese Quotienten m_2/m_3 haben ihre Berechtigung, da sich bei allen durchgeführten Simulationen die aus Modellunzulänglichkeiten ergebenden Systematiken in den Residuen sehr gut durch Geraden im Bereich einer Aufnahme (< ca. 3 min) erfassen lassen. Bei der Darstellung der Satellitenspur beim Reduktionsverfahren müssen Polynome höherer Ordnung herangezogen werden.

Sind die Quotienten m_2/m_3 wesentlich grösser als 1, so heisst das, dass bei der Film-Reduktion oder bei der Beobachtung Distorsionen höherer Ordnung eingeführt worden sind, oder dass bei der Polynomdarstellung zufällige Fehler durch die Terme höherer Ordnung erfasst wurden.

Die mittleren Fehler m_3 für Delft wurden der Publikation {25} entnommen.

6.2 Resultate

6.2.1 Zimmerwald und Delft

Die Resultate dieser Voruntersuchung sind für Zimmerwald und Delft in den Tabellen 3, 4 und 4a zusammengefasst. (Tabelle 4a: bei drei Bogen von Delft wurde je eine eindeutig falsche Aufnahme eliminiert. Es handelte sich dabei wahrscheinlich um Timing-Fehler der Grössenordnung 20-30 msec.)

Die wichtigsten Resultate seien hier nochmals zusammengefasst:

| | \overline{m}_1 | $\overline{m}_1/\overline{m}_2$ | $\overline{m}_2/\overline{m}_3$ |
|------------|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Zimmerwald | 1"38 | 1.11 | 1.08 |
| Delft | 1"33 | 1.12 | 1.12 |

Ueberzeugend ist die Uebereinstimmung dieser Ergebnisse. Zwar ist es richtig, dass beide Stationen eine ähnliche Instrumentierung haben (langbrennweitige Instrumente) und sehr nah verwandte Reduktionsverfahren benützen. Aber es gibt auch wesentliche Unterschiede:

- Bei Zimmerwalder Aufnahmen ist der vermessene Teil der Satellitenspur ca. ein Drittel länger als bei Delft.
- Das mittlere Zeitintervall zwischen zwei Satellitenpunkten ist bei den Delfter Aufnahmen ca. 6 sec, bei den Zimmerwalder Aufnahmen ca. 3 sec.
- Die Längen der ganzen Bogen sind bei beiden Stationen mit 15 - 25 Minuten ca. gleich. Auch ist die mittlere Anzahl der vermessenen Satellitenpunkte pro Bogen mit 59 für Zimmerwald und 52 für Delft von der gleichen Grössenordnung. Ihre Verteilung ist jedoch unterschiedlich: Bei Zimmerwald wird diese Anzahl auf 2 bis 3 Aufnahmen, bei Delft auf 5 bis 6 verteilt.

Die Messgenauigkeit ist vor allem von der Brennweite abhängig. Diese ist beim Instrument von Delft 120 cm, bei demjenigen von Zimmerwald 104 cm. Die grosse Aehnlichkeit der Werte m_1 ist also zu erwarten.

Die gute Uebereinstimmung der Verhältnisse m_1/\overline{m}_2 bedeutet, dass das Kräftefeld jedenfalls bei diesen Bogenlängen völlig ausreichend ist. Sonst wären nämlich für die Zimmerwalder Bogen wesentlich günstigere Resultate zu erwarten, da es ja immer möglich ist, durch 3 Richtungsbeobachtungen (entsprechend den 3 Aufnahmen) eine Bahn zu legen.

Die Verhältnisse m_2/m_3 zeigen, dass die Polynomdarstellung der Satelliten-
spur ein gutes Mittel zu Abschätzung der Beobachtungsqualität ist. Dass die
Streuungen dieser Quotienten bei Delft grösser sind, hängt damit zusammen,
dass eine Aufnahme nur 5 - 12 Punkte enthält. Bei Zimmerwald ist dieses Ver-
hältnis nur in einem Falle viel grösser als 1, bei der 2. Aufnahme (T 3718)
des 1. Bogens. Ein Grund dafür konnte trotz einer Durchsicht der Aufnahme nicht
gefunden werden.

Es soll im folgenden noch gezeigt werden, dass grosse m_1/m_2 Quotienten durch
Beobachtungsfehler erklärt werden können. Dies kann nur für Zimmerwalder
Bogen durchgeführt werden, da zu diesem Zweck unbedingt die Aufnahmen und die
Reduktionsprotokolle untersucht werden müssen.

Tabelle 3

Kurze Bogen Zimmerwald

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_3 | $m_1 / \overline{m_2}$ | m_2 / m_3 | Bogen Nr. |
|----------|--|-------|-------|-------|------------------------|-------------|-----------|
| T 3717 | 1972 09 21 00 ^h 33 ^m | | 1.33 | 1.26 | | 1.06 | |
| 18 | 44 | 1.56 | 1.34 | .87 | 1.05 | 1.54 | 1 |
| 19 | 54 | | 1.77 | 1.70 | | 1.04 | |
| 22 | 22 00 37 | | 1.11 | 1.13 | | .98 | |
| 23 | 47 | 1.26 | 1.19 | .88 | 1.07 | 1.35 | 2 |
| 24 | 57 | | 1.24 | 1.18 | | 1.05 | |
| 25 | 21 42 | | 1.33 | 1.37 | | .97 | |
| 26 | 56 | 1.27 | 1.19 | 1.02 | 1.01 | 1.17 | 3 |
| 27 | 23 00 42 | | 1.04 | 1.01 | | 1.03 | |
| 28 | 53 | 1.41 | .99 | 1.17 | 1.11 | .85 | 4 |
| 29 | 01 03 | | 1.77 | 1.71 | | 1.04 | |
| 30 | 25 21 56 | | 1.79 | 1.52 | | 1.18 | |
| 31 | 22 09 | 1.53 | 1.22 | 1.23 | 1.02 | .99 | 5 |
| 32 | 26 00 56 | | .99 | .88 | | 1.13 | |
| 33 | 01 06 | 1.73 | 1.38 | 1.49 | 1.25 | .93 | 6 |
| 34 | 16 | | 1.77 | 1.66 | | 1.07 | |
| 36 | 30 01 24 | .79 | .79 | .76 | 1.00 | 1.04 | 7 |
| 44 | 10 02 22 37 | | .88 | .81 | | 1.09 | |
| 45 | 46 | 1.41 | 1.37 | 1.38 | 1.25 | .99 | 8 |
| 52 | 04 22 36 | | 1.45 | 1.28 | | 1.13 | |
| 53 | 46 | 1.27 | 1.12 | 1.08 | 1.00 | 1.04 | 9 |
| 54 | 55 | | 1.23 | 1.09 | | 1.13 | |
| 57 | 05 01 47 | | 1.08 | 1.04 | | 1.04 | |
| 58 | 56 | 1.40 | 1.12 | .98 | 1.27 | 1.14 | 10 |
| 59 | 22 41 | | 1.16 | 1.13 | | 1.03 | |
| 61 | 23 00 | 1.09 | .97 | .89 | 1.02 | 1.09 | 11 |
| 67 | 1972 10 06 01 41 | | 1.39 | 1.10 | | 1.26 | |
| 68 | 51 | 1.54 | 1.27 | 1.18 | 1.21 | 1.08 | 12 |
| 69 | 02 00 | | 1.17 | 1.04 | | 1.13 | |
| 93 | 13 23 16 | | 1.17 | 1.05 | | 1.11 | |
| 94 | 25 | 1.56 | 1.65 | 1.65 | 1.11 | 1.00 | 13 |
| 96 | 16 20 26 | | 1.34 | 1.11 | | 1.21 | |
| 97 | 35 | 1.43 | 1.37 | 1.44 | 1.06 | .95 | 14 |

Mittelwerte: 1.38 1.11 1.08

Tabelle 4a

Kurze Bogen Delft (Repetition)

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_3 | $m_1 / \overline{m_2}$ | m_2 / m_3 |
|----------|--|-------|-------|-------|------------------------|-------------|
| 02 | 1972 10 05 22 ^h 44 ^m | | 1.21 | .78 | | 1.55 |
| 04 | 50 | | 1.35 | 1.06 | | 1.27 |
| 05 | 53 | 1.40 | 1.15 | .85 | 1.10 | 1.35 |
| 06 | 57 | | 1.40 | 1.39 | | 1.01 |
| 02 | 06 01 43 | | 1.79 | 1.70 | | 1.05 |
| 03 | 47 | | 1.58 | 1.40 | | 1.06 |
| 04 | 50 | 1.63 | 1.13 | .99 | 1.14 | 1.14 |
| 05 | 53 | | 1.20 | 1.14 | | 1.05 |
| 01 | 13 23 18 | | 1.59 | 1.35 | | 1.18 |
| 02 | 21 | | 1.52 | 1.06 | | 1.43 |
| 04 | 27 | 1.80 | 1.13 | 1.06 | 1.15 | 1.07 |
| 05 | 31 | | 1.66 | 1.53 | | 1.08 |
| 06 | 34 | | 1.90 | 1.61 | | 1.18 |

Mittelwerte: 1.33 1.12 1.12
(kombiniert mit Tabelle 4)

Tabelle 4

Kurze Bogen Delft

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_3 | $m_1/\overline{m_2}$ | m_2/m_3 | Bogen Nr. | |
|--------------|--|-------|-------|-------|----------------------|-----------|-----------|----|
| 01 | 1972 09 20 00 ^h 28 ^m | | 1.12 | 1.06 | | 1.06 | | |
| 03 | | | .88 | .86 | 1.01 | 1.02 | 1 | |
| 04 | | | 1.19 | 1.52 | 1.43 | | 1.06 | |
| 01 | 21 00 32 | | 1.35 | 1.36 | | .99 | | |
| 02 | | | 1.24 | 1.22 | 1.16 | 1.02 | 2 | |
| 04 | | | .97 | .86 | | 1.13 | | |
| 05 | | | 1.01 | .99 | | 1.02 | | |
| 01 | 26 00 55 | | .98 | .72 | | 1.36 | | |
| 02 | | | 1.03 | .94 | | 1.10 | | |
| 03 | 01 04 | | 1.06 | .89 | 1.04 | 1.13 | 3 | |
| 04 | | | 1.22 | 1.13 | | 1.08 | | |
| 05 | | | 1.25 | 1.06 | | 1.18 | | |
| 01 | 28 01 05 | | 1.46 | .81 | | 1.80 | | |
| 02 | | | 1.33 | 1.25 | | 1.06 | | |
| 03 | | | 1.01 | .94 | | 1.07 | | |
| 04 | | | 1.51 | 1.04 | .94 | 1.19 | 1.11 | 4 |
| 05 | | | 1.21 | 1.22 | | .99 | | |
| 06 | | | 1.62 | 1.57 | | 1.03 | | |
| 07 | | | 1.24 | 1.17 | | 1.06 | | |
| 01 | 10 04 22 35 | | .60 | .57 | | 1.05 | | |
| 02 | | | .87 | .89 | | .98 | | |
| 03 | | | 1.08 | 1.03 | | 1.05 | | |
| 04 | | | 1.04 | 1.18 | 1.06 | 1.00 | 1.11 | 5 |
| 05 | | | 1.06 | 1.08 | | .98 | | |
| 06 | | | 1.43 | 1.08 | | 1.32 | | |
| 02 | 05 22 44 | | 1.21 | .78 | | 1.55 | | |
| 03 | | | 1.05 | .98 | | 1.07 | | |
| 04 | | | 1.70 | 1.35 | 1.06 | 1.38 | 1.27 | 6 |
| 05 | | | 1.15 | .85 | | 1.35 | | |
| 06 | | | 1.40 | 1.39 | | 1.01 | | |
| 01 | 06 01 41 | | 1.81 | 1.12 | | 1.62 | | |
| 02 | | | 1.79 | 1.70 | | 1.05 | | |
| 03 | | | 1.74 | 1.58 | 1.49 | 1.16 | 1.06 | 7 |
| 04 | | | 1.13 | .99 | | 1.14 | | |
| 05 | | | 1.20 | 1.14 | | 1.05 | | |
| 01 | 07 22 50 | | .78 | .57 | | 1.37 | | |
| 02 | | | .64 | .67 | | .96 | | |
| 03 | | | .79 | .72 | | 1.10 | | |
| 04 | | | 1.09 | 1.35 | .99 | 1.24 | 1.36 | 8 |
| 05 | | | .98 | .76 | | 1.29 | | |
| 06 | | | .73 | .54 | | 1.35 | | |
| 01 | 13 23 18 | | 1.59 | 1.35 | | 1.18 | | |
| 02 | | | 1.52 | 1.06 | | 1.43 | | |
| 03 | | | 1.91 | 1.61 | 1.49 | 1.22 | 1.08 | 9 |
| 04 | | | 1.13 | 1.06 | | 1.07 | | |
| 05 | | | 1.66 | 1.53 | | 1.08 | | |
| 06 | | | 1.90 | 1.61 | | 1.18 | | |
| 01 | 17 20 31 | | 1.13 | 1.06 | | 1.07 | | |
| 02 | | | .87 | .92 | | .95 | | |
| 03 | | | 1.24 | 1.02 | .92 | 1.22 | 1.11 | 10 |
| 04 | | | .93 | 1.03 | | .90 | | |
| 05 | | | .94 | .78 | | 1.21 | | |
| 06 | | | 1.22 | 1.72 | | .71 | | |
| 01 | 18 23 35 | | 1.50 | 1.57 | | .96 | | |
| 02 | | | .97 | .92 | | 1.05 | | |
| 03 | | | .97 | 1.14 | | .85 | | |
| 04 | | | 1.26 | .95 | .81 | 1.10 | 1.17 | 11 |
| 05 | | | 1.36 | 1.13 | | 1.20 | | |
| 06 | | | 1.05 | .99 | | 1.06 | | |
| 07 | | | 1.22 | 1.25 | | .98 | | |
| Mittelwerte: | | | 1.38 | | 1.16 | 1.13 | | |

Beobachtungsfehler bei Zimmerwalder Aufnahmen

Zunächst muss einiges zur Beobachtungsmethode von passiven Satelliten in Zimmerwald gesagt werden:

Das Instrument ist äquatorial montiert und wird den Sternen nachgeführt.

Die Zeitzuordnung erfolgt mittels einer planparallelen Platte vor dem Film. Diese Platte wird um eine Achse parallel zur Bewegungsrichtung des Satelliten zwischen zwei Lagen hin und her gekippt. Das Kippen wird elektromagnetisch bewerkstelligt. Es entstehen dabei 2 kreisförmige Bilder eines jeden Sterns; die Satellitenspur wird periodisch versetzt.

Die Bilder der Sterne sind zeitliche Mittelwerte über die Oeffnungszeit der Kassette. Die vermessenen Versetzungen der Satellitenspur entsprechen dagegen "momentanen Bildern".

Es gilt nun, bei dieser Beobachtungsart einige Fehlerquellen zu beachten.

1. Nachführungsfehler (\sim Fehler in Rektaszension)
2. Rotieren der Kassette. Dies kann auftreten, wenn die Kassette nicht ganz fest mit dem Instrument verschraubt ist. Dabei hat man sich diese Rotation nicht kontinuierlich, sondern als eine einmalige (oder mehrmalige) ruckweise Verdrehung (Sprung) vorzustellen, ausgelöst durch die Schläge der planparallelen Platte auf die Kassette. Die Bilder der Sterne sind in solchen Fällen verlängert normal zur Linie {Zentrum der Aufnahme - Stern}. Am Rand ist diese Verlängerung maximal, im Zentrum ist sie gleich Null. Ist ein Sprung vor oder nach dem Durchgang des Satelliten passiert, so ist die ganze Spur um ca. die Hälfte dieses Sprungs verdreht. Dies, weil die Sterne in einer mittleren Position vermessen werden, die vermessenen Satellitenpunkte jedoch einer Extremlage entsprechen. Ist ein Sprung während des Durchgangs des Satelliten durch die Aufnahme vorgekommen, müssen die Spurstücke vor und nach dem Sprung getrennt untersucht werden: Beide sind verdreht, die Verdrehungen sind jedoch verschieden. Eine Lokalisierung eines solchen Sprungs ist jedoch in der Praxis wegen der Streuungen in den seltensten Fällen möglich. Was man feststellt, ist auch hier eine resultierende Verdrehung der Spur über die ganze Aufnahme. Dieses Problem ist in Zimmerwald bekannt. Bei eindeutigen Fällen wurden solche Aufnahmen bereits vor der Messung eliminiert.

3. Lokale Ablösung des Films von der Anpressplatte: Dies kann passieren, wenn aus irgendeinem Grund der Film zu knapp geschnitten wurde, so dass nicht ringsum die zur richtigen Halterung in der kreisförmigen Kassette unerlässliche volle Randbreite vorhanden ist.

Dies sind die wichtigsten anlagebedingten Fehlerquellen. Nun wieder zurück zu den Resultaten von Tabelle 3:

Man sieht dort, dass vier kurze Bogen von Zimmerwald grosse Quotienten m_1/\overline{m}_2 aufweisen:

Bogen Nr. 6, 8, 10, 12

Eine genauere Untersuchung brachte die folgenden Ergebnisse:

Bogen Nr. 6: Alle drei Aufnahmen sind von schlechter Qualität. Ungefähr 2/3 der Messpunkte der Satellitenspur waren nicht messbar (Wolken). Bei allen Aufnahmen waren nur die Punkte an den Rändern messbar.

Bogen Nr. 8: Aufnahme T 3744 ist fehlerhaft. Figur 5a zeigt einen deutlichen Sprung in den Residuen in Rektaszension. Die Bilder der Sterne auf der Aufnahme sind leicht verlängert in Rektaszension.

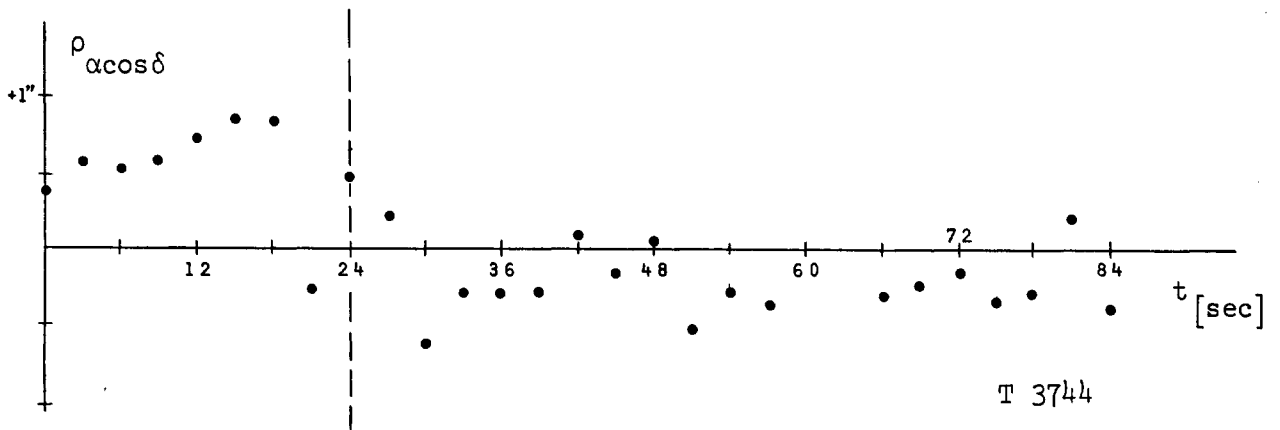
Bogen Nr. 10: Aufnahme T 3757 ist fehlerhaft. Eine deutliche Systematik der Residuen normal zur Bewegungsrichtung des Satelliten ist vorhanden (Figur 5b). Auf der Aufnahme sieht man anhand der Bilder der Sterne, dass der Film sich lokal aufgebläht hat. Ausgeprägt sind diese Verschiebungen bei den verwendeten Messsternen in der zweiten Hälfte der Aufnahme.

Bogen Nr. 12: Wiederum zeigt eine Aufnahme eine deutliche Verdrehung der Satellitenspur (Figur 5c). In diesem Falle ist die Ursache eindeutig eine Rotation der Kassette. Da die Aufnahme sonst von ausgezeichneter Qualität ist, konnte anhand der Bilder von schwachen Sternen eindeutig festgestellt werden, dass es sich dabei um einen einmaligen Sprung handelte (Verdoppelung der Einzelbilder der Sterne). Die Verschiebungen am Rande wurden bestimmt zu ca. 3". Die Verdrehung der Spur am Rande sollte demnach etwa 1"5 betragen, was mit Figur 5c recht gut übereinstimmt.

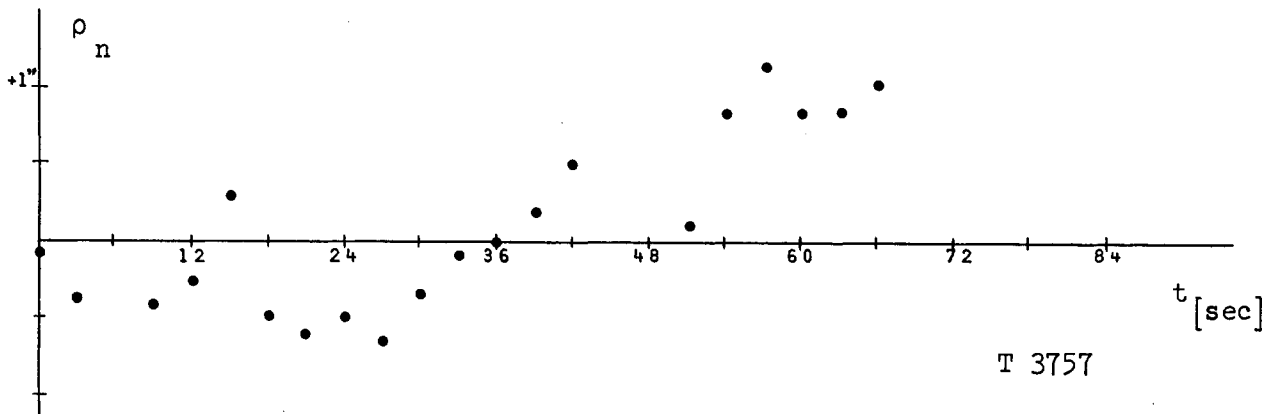
Selbstverständlich wurden auch die Aufnahmen der übrigen Bogen nach ähnlichen Effekten durchgesehen. Dabei wurde lediglich bei einigen Aufnahmen eine lokale Unschärfe festgestellt. Dies war jedoch nie so gefährlich wie im Falle des Bogens Nr. 10, da die vermessenen Sterne nicht in der Nähe der "Unschärfepartien" waren.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass andere Fehlerquellen, zum Beispiel

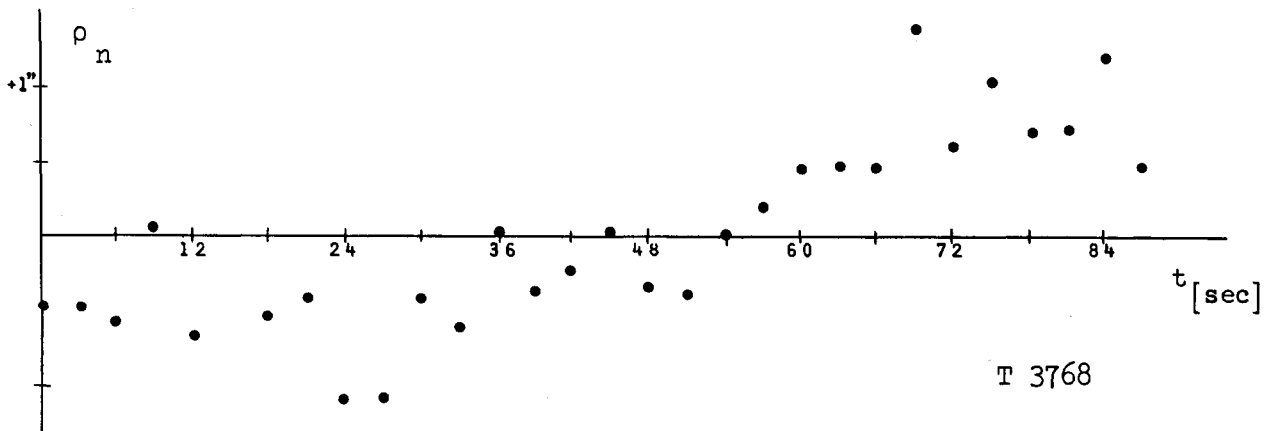
Figur 5



a) Residuen in $\alpha \cos \delta$



b) Residuen normal zur Bewegungsrichtung



c) Residuen normal zur Bewegungsrichtung

Timingfehler, auch solche Verdrehungen vortäuschen können. Daher ist es wichtig, dass Bogen schon bei dieser Voruntersuchung verlängert werden. Allerdings ist es dann nötig, den Ansatz für den Strahlungsdruck zu verbessern. Bei Bogen, die zwei Durchgänge des Satelliten umfassen, wird der Ansatz (4a) verwendet.

Die Resultate dieser Bogen, die Beobachtungen zweier aufeinanderfolgender Durchgänge des Satelliten umfassen, sind in den Tabellen 5 und 6 zusammengefasst.

Tabelliert werden wiederum die mittleren Fehler m_1 und m_2 , sowie die Quotienten m_1/\bar{m}_2 . Man sieht im Vergleich mit den Tabellen 3 und 4, dass weder die mittleren Fehler m_1 noch die Quotienten m_1/m_2 signifikant ansteigen. Dies untermauert, dass auch für diese längeren Bogen das verwendete Kräftemodell ausreichend ist.

Tabelliert werden weiterhin die Residuen im Zentrum der Aufnahmen in Rektaszension, Deklination, tangential und normal zur topo-zentrischen Bewegungsrichtung des Satelliten. Diese Residuen für die Mittelpunkte der Aufnahme werden berechnet mit Hilfe der Geraden, mit denen diese Residuen geglättet wurden.

Weiterhin sind am Fusse der Tabellen die Mittelwerte der Beträge dieser Abweichungen berechnet.

Bei den Bogen mit Zimmerwalder Beobachtungen sind dabei diese Mittelwerte tangential zur Spur signifikant kleiner als diejenigen normal zur Spur. Dies bedeutet, dass hier keine groben Timing-Fehler von Aufnahme zu Aufnahme zu erwarten sind. Dass die Werte normal zur Spur rund viermal grösser sind als tangential dazu, dürfte an der Methode liegen, wird doch durch die Kippung jeder Stern in der Richtung normal zur Spur verdoppelt. Sind nun die beiden Bilder nicht von genau der gleichen Grösse, ist ein systematischer Fehler in dieser Richtung leicht möglich.

Beim (einzigen) Bogen zu zwei Durchgängen von Delft tritt genau das umgekehrte wie bei Zimmerwald auf: Hier sind die Residuen tangential zur Spur signifikant grösser als normal dazu. Dies stimmt überein mit der Warnung, welche die Daten dieser Station begleiteten, dass nämlich in dieser Kampagne ein Defekt bei der Zeitregistratur nachträglich festgestellt wurde. Bei der Elimination von zwei eindeutig falschen Aufnahmen (wie in Tabelle 4a) werden diese Werte bedeutend besser. Man sieht in Tabelle 6 auch sehr schön, wie eine fehlerhafte Aufnahme die benachbarten verschlechtert.

Als Illustration zu dieser Voruntersuchung wird in den Tabellen 8 und 8a ein Teil des Computeroutputs für den Delfter 2-Durchgangsbogen gegeben. In 8a sind die Aufnahmen 03 vom 5.10.72 und 01 vom 6.10.72 weggelassen worden.

Tabelle 5

Bogen zu 2 Umläufen (Zimmerwald)

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_1 / \bar{m}_2 | $\delta(\alpha_m \cdot \cos \delta_m)$ | $\delta(\delta_m)$ | $\delta(t_m)$ | $\delta(r_m)$ |
|--------------------------|------------------|-------|-------|-------------------|--|--------------------|---------------|---------------|
| T 3725 | 09 22/23 1972 | | 1.33 | | -.009 | .035 | .045 | .048 |
| 26 | | | 1.19 | | -.041 | -.086 | -.016 | -.001 |
| 27 | | 1.43 | 1.08 | 1.12 | .469 | -.040 | -.002 | .469 |
| 28 | | | .99 | | .965 | .509 | .001 | -1.023 |
| 29 | | | 1.77 | | .810 | -.244 | .006 | .840 |
| 30 | 09 25/26 1972 | | 1.79 | | -.099 | .055 | .007 | .125 |
| 31 | | | 1.22 | | -.043 | -.025 | .003 | -.054 |
| 32 | | 1.63 | .99 | 1.14 | .002 | .095 | -.100 | .014 |
| 33 | | | 1.38 | | .454 | .362 | -.080 | -.483 |
| 34 | | | 1.77 | | .443 | -.357 | .087 | .579 |
| 52 | 10 04/05 1972 | | 1.45 | | -.043 | .008 | .008 | .242 |
| 53 | | | 1.12 | | .013 | .001 | -.022 | -.011 |
| 54 | | 1.34 | 1.23 | 1.12 | -.029 | -.042 | .021 | -.070 |
| 57 | | | 1.09 | | -.090 | -.058 | .060 | .059 |
| 58 | | | 1.11 | | .058 | .034 | -.032 | .021 |
| 59 | 10 05/06 1972 | | 1.16 | | -.118 | .009 | -.021 | .102 |
| 61 | | | .97 | | -.102 | .037 | -.022 | -.082 |
| 67 | | 1.44 | 1.39 | 1.21 | -.106 | -.104 | .083 | .124 |
| 68 | | | 1.27 | | .137 | -.522 | .159 | -.359 |
| 69 | | | 1.17 | | .424 | -.447 | -.252 | .551 |
| Mittelwerte der Beträge: | | | | | .223 | .154 | .051 | .263 |

Tabelle 6

Bogen zu 2 Umläufen (Delft)

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_1 / \bar{m}_2 | $\delta(\alpha_m \cdot \cos \delta_m)$ | $\delta(\delta_m)$ | $\delta(t_m)$ | $\delta(r_m)$ | |
|-------------------------|---------------|-------|-------|-------------------|--|--------------------|---------------|---------------|-------|
| 2 | 1972 10 05/06 | | 1.21 | | .200 | .757 | .779 | .042 | |
| * 3 | | | 1.05 | | .844 | -1.981 | -2.145 | .225 | |
| 4 | | | 1.35 | | 1.061 | 1.041 | 1.453 | -.328 | |
| 5 | | | 1.15 | | -.004 | .146 | .007 | .088 | |
| 6 | | | 1.39 | | -.114 | .292 | -.295 | .068 | |
| * 1 | | 1.80 | 1.81 | 1.31 | -.621 | 1.285 | -1.075 | .945 | |
| 2 | | | 1.79 | | -.214 | .999 | 1.020 | -.134 | |
| 3 | | | 1.58 | | .661 | -.437 | .658 | -.390 | |
| 4 | | | 1.19 | | .128 | -.328 | -.350 | .057 | |
| 5 | | | 1.20 | | -.363 | .106 | .377 | .104 | |
| Mittelwerte der Beträge | | | | | .421 | .737 | .816 | .238 | |
| 2 | | | | 1.21 | | .024 | .005 | .009 | -.009 |
| 4 | | | | 1.34 | | .342 | -.034 | .167 | -.315 |
| 5 | | | | 1.15 | | -.290 | .166 | -.466 | .163 |
| 6 | | | 1.51 | 1.39 | 1.12 | .341 | -.105 | .282 | .202 |
| 2 | | | 1.79 | | -.462 | .183 | .330 | .369 | |
| 3 | | | 1.58 | | .434 | -.555 | -.688 | -.152 | |
| 4 | | | 1.13 | | .119 | .147 | -.181 | -.033 | |
| 5 | | | 1.20 | | .114 | .328 | .105 | .339 | |
| Mittelwerte der Beträge | | | | | .264 | .190 | .279 | .198 | |

Tabelle 7

Ein Bogen zu 2 Umläufen (Zimmerwald und Delft)

| Station | Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | m_1 / \bar{m}_2 | $\delta(\alpha_m \cdot \cos \delta_m)$ | $\delta(\delta_m)$ | $\delta(t_m)$ | $\delta(r_m)$ |
|-------------------------|----------|---------------|-------|-------|-------------------|--|--------------------|---------------|---------------|
| ZMWLD | T 3759 | 1972 10 05/06 | | 1.16 | | -.212 | -.218 | -.259 | .196 |
| | 61 | | | .97 | | .237 | .026 | .030 | .243 |
| | 67 | | | 1.39 | | -.125 | -.037 | -.010 | -.103 |
| | 68 | | | 1.28 | | -.068 | .546 | .434 | -.404 |
| | 69 | | | 1.17 | | .302 | -.419 | -.144 | .482 |
| Mittelwerte der Beträge | | | | | | .189 | .249 | .175 | .286 |
| DELFT | 2 | 1972 10 05/06 | 1.50 | 1.21 | 1.16 | .245 | .676 | .682 | -.084 |
| | 4 | | | 1.34 | | .533 | -.143 | .186 | -.506 |
| | 5 | | | 1.15 | | -.584 | -.076 | -.580 | -.114 |
| | 6 | | | 1.39 | | -.025 | -.140 | .107 | -.123 |
| | 2 | | | 1.79 | | -.691 | .221 | .449 | .604 |
| | 3 | | | 1.58 | | .320 | -.665 | -.732 | .009 |
| | 4 | | | 1.13 | | .304 | -.480 | -.566 | .028 |
| 5 | | 1.20 | | .855 | -.129 | -.740 | -.421 | | |
| Mittelwerte der Beträge | | | | | | .445 | .316 | .505 | .236 |

Tabella 8

GLAETUNG DER RESIDUEN DURCH GERADEN
STATION:DELFT MIT NR 40
ANZAHL AUFNAHMEN= 10

Bogen mit Aufnahmen von Delft

AUFNAHME-NR: 1 POSITIONSWINKEL(1.PT.): 348.8
ZEITPUNKT DES 1.PUNKTES: 41595.947229595

| ZEIT(SEC) | RESIDUEN | | | RESIDUEN | | | |
|------------------|----------|----------|-------|----------|-----------|--------|-----------|
| | D(RA) | D(O(RA)) | D(DE) | D(TAN) | D(D(TAN)) | U(NOR) | D(D(NOR)) |
| 0.0 | 2.78 | -0.82 | -0.19 | 0.35 | 0.37 | -2.76 | 0.91 |
| 5.4874 | 2.10 | -0.49 | 0.77 | 1.17 | -0.43 | -1.90 | 0.41 |
| 10.9707 | 1.92 | -0.66 | 0.66 | 1.03 | -0.28 | -1.75 | 0.61 |
| 16.4751 | 0.15 | 0.76 | 0.42 | 0.44 | 0.31 | -0.06 | -0.71 |
| 21.9510 | -0.20 | 0.76 | 1.61 | 1.54 | -0.77 | 0.52 | -0.93 |
| 32.9466 | -2.44 | 2.29 | 0.18 | -0.32 | 1.11 | 2.42 | -2.11 |
| 38.4191 | -0.46 | -0.03 | 0.85 | 0.74 | 0.06 | 0.63 | 0.05 |
| 43.9232 | -0.40 | -0.44 | 1.00 | 0.89 | -0.09 | 0.61 | 0.43 |
| 49.4389 | -0.96 | -0.24 | 0.58 | 0.37 | 0.45 | 1.06 | 0.35 |
| 54.9481 | -0.42 | -1.13 | 1.69 | 1.56 | -0.73 | 0.77 | 1.00 |
| MITTLERE FEHLER: | 1.08 | | 0.54 | 0.62 | | | 1.03 |

POLYNOMKOEFFIZIENTEN: A0= 1.960 +- 0.616 A0= 0.344 +- 0.306
A1= -0.064 +- 0.019 A1= 0.015 +- 0.009

AUFNAHME-NR: 2 POSITIONSWINKEL(1.PT.): 343.3
ZEITPUNKT DES 1.PUNKTES: 41595.949457841

| ZEIT(SEC) | RESIDUEN | | | RESIDUEN | | | |
|------------------|----------|----------|-------|----------|-----------|--------|-----------|
| | D(RA) | D(D(RA)) | D(DE) | D(TAN) | D(D(TAN)) | D(NOR) | D(D(NOR)) |
| 0.0 | -1.19 | 0.10 | -2.78 | -3.00 | 0.26 | 0.34 | -0.03 |
| 5.5046 | -0.92 | -0.10 | -3.75 | -3.86 | 1.27 | -0.21 | 0.50 |
| 11.0238 | -0.68 | -0.29 | -0.57 | -0.74 | -1.70 | 0.49 | -0.22 |
| 16.5305 | -0.50 | -0.41 | -1.72 | -1.79 | -0.51 | -0.04 | 0.28 |
| 22.0309 | -1.69 | 0.84 | -1.93 | -2.35 | 0.19 | 1.03 | -0.82 |
| 27.5210 | -0.85 | 0.25 | -2.30 | -2.45 | 0.45 | 0.10 | 0.09 |
| 33.0450 | -1.24 | 0.51 | -1.80 | -2.10 | 0.24 | 0.62 | -0.45 |
| 38.5621 | 0.16 | -0.84 | -1.01 | -0.91 | -0.81 | -0.47 | 0.61 |
| 44.0597 | -0.76 | 0.14 | -2.04 | -2.18 | 0.61 | 0.07 | 0.05 |
| MITTLERE FEHLER: | 0.53 | | 0.91 | 0.94 | | | 0.48 |

POLYNOMKOEFFIZIENTEN: A0= -1.086 +- 0.325 A0= -2.531 +- 0.561
A1= 0.011 +- 0.012 A1= 0.025 +- 0.021

Tabella 8a

GLAETUNG DER RESIDUEN DURCH GERADEN
STATION:DELFT MIT NR 40
ANZAHL AUFNAHMEN= 8

Bogen mit Aufnahmen von Delft
2 Aufnahmen eliminiert

AUFNAHME-NR: 1 POSITIONSWINKEL(1.PT.): 348.8
ZEITPUNKT DES 1.PUNKTES: 41595.947229714

| ZEIT(SEC) | RESIDUEN | | | | RESIDUEN | | | |
|---|----------|----------|-------|----------|----------|-----------|--------|-----------|
| | D(RA) | D(D(RA)) | D(DE) | D(D(DE)) | D(TAN) | D(D(TAN)) | D(NOR) | D(D(NOR)) |
| 0.0 | 2.63 | 1.82 | -0.77 | -0.53 | -0.25 | -0.36 | -2.73 | -0.91 |
| 5.4874 | 1.94 | 0.49 | 0.15 | 0.35 | 0.53 | 0.44 | -1.87 | -0.41 |
| 10.9707 | 1.75 | 0.66 | 0.00 | 0.15 | 0.35 | 0.28 | -1.72 | -0.61 |
| 16.4751 | -0.02 | -0.76 | -0.27 | -0.18 | -0.27 | -0.32 | -0.03 | 0.71 |
| 21.9510 | -0.38 | -0.76 | 0.89 | 0.93 | 0.79 | 0.77 | 0.55 | 0.93 |
| 32.9466 | -2.63 | -2.29 | -0.61 | -0.66 | -1.14 | -1.11 | 2.45 | 2.11 |
| 38.4191 | -0.67 | 0.03 | 0.03 | -0.07 | -0.11 | -0.06 | 0.66 | -0.05 |
| 43.9232 | -0.62 | 0.44 | 0.14 | -0.01 | 0.01 | 0.09 | 0.63 | -0.43 |
| 49.4389 | -1.17 | 0.24 | -0.30 | -0.50 | -0.55 | -0.45 | 1.09 | -0.35 |
| 54.9481 | -0.65 | 1.13 | 0.77 | 0.52 | 0.61 | 0.74 | 0.80 | -1.00 |
| MITTLERE FEHLER: 1.08 | | | | | | | | |
| POLYNOMKOEFFIZIENTEN: A0= 1.811 +- 0.616 A0= 0.206 AC= -1.824 +- 0.589 A1= -0.065 +- 0.019 A1= 0.009 A1= 0.004 +- 0.011 A1= 0.066 +- 0.018 | | | | | | | | |

AUFNAHME-NR: 2 POSITIONSWINKEL(1.PT.): 330.2
ZEITPUNKT DES 1.PUNKTES: 41595.951668734

| ZEIT(SEC) | RESIDUEN | | | | RESIDUEN | | | |
|---|----------|----------|-------|----------|----------|-----------|--------|-----------|
| | D(RA) | D(D(RA)) | D(DE) | D(D(DE)) | D(TAN) | D(D(TAN)) | D(NOR) | D(D(NOR)) |
| 0.0 | -0.47 | -0.45 | -0.96 | -0.89 | -1.06 | -0.98 | -0.07 | -0.05 |
| 2.4495 | -0.44 | -0.50 | -0.14 | -0.08 | -0.34 | -0.31 | 0.31 | 0.36 |
| 10.9246 | 0.37 | 0.24 | -0.54 | -0.48 | -0.27 | -0.29 | -0.59 | -0.48 |
| 16.4187 | 1.01 | 0.81 | -0.12 | -0.07 | 0.43 | 0.37 | -0.92 | -0.75 |
| 27.4170 | 0.64 | 0.30 | 1.14 | 1.18 | 1.30 | 1.14 | 0.09 | 0.39 |
| 32.9418 | 0.16 | -0.26 | 1.96 | 2.00 | 1.72 | 1.50 | 0.96 | 1.33 |
| 38.4190 | 1.35 | 0.85 | 0.95 | 0.99 | 1.55 | 1.29 | -0.56 | -0.13 |
| 43.8884 | -0.61 | -1.17 | -0.65 | -0.62 | -0.88 | -1.20 | 0.12 | 0.61 |
| 49.3379 | 1.30 | 0.66 | -1.53 | -1.51 | -0.46 | -0.82 | -1.95 | -1.39 |
| 54.8391 | 0.22 | -0.49 | -0.52 | -0.50 | -0.28 | -0.69 | -0.49 | 0.14 |
| MITTLERE FEHLER: 0.72 | | | | | | | | |
| POLYNOMKOEFFIZIENTEN: A0= -0.016 +- 0.417 A0= 0.660 AC= -0.015 +- 0.469 A1= 0.013 +- 0.013 A1= 0.001 +- 0.001 A1= 0.009 +- 0.019 A1= -0.012 +- 0.014 | | | | | | | | |

Starre Regeln über die Elimination von fehlerhaften Aufnahmen wurden wegen der beschränkten Datenmenge nicht aufgestellt. Weggelassen wurden nur offensichtliche Fälle wie die Aufnahme in Tabelle 8.

Schliesslich wird hier noch eine zu 5 und 6 analoge Tabelle 7 gegeben, die bei einer Bestimmung der Stationskoordinaten von Delft aufgenommen wurde (s. Kap. 7). Diese umfasst die kurzen Bogen 11, 12 von Zimmerwald und 6, 7 von Delft. Man sieht, dass die Verteilung der Residuen in den Mittelpunkten der Aufnahmen ziemlich stark ändert. Die wesentliche Charakteristik jedoch bleibt: Bei Delft sind die Residuen längs der Spur deutlich grösser. Bei Zimmerwald gilt genau das Gegenteil.

6.2.2 Graz

Die Resultate dieser Station werden hier gesondert behandelt, da diese sich in der Instrumentierung und im Reduktionsverfahren wesentlich von den beiden anderen Observatorien unterscheiden.

Die Brennweite der Kamera beträgt 30 cm. Sie ist azimuthal montiert und nicht nachgeführt. Vermessen wird ein Punkt der Satellitenspur pro Sekunde. Gesichtsfeld $20^{\circ} \times 20^{\circ}$. Die Plattenreduktion erfolgt auf photogrammetrischem Weg.

Der wichtigste Unterschied ist natürlich der in der Brennweite. Diese ist etwa dreimal kürzer als die von Zimmerwald und viermal kürzer als die von Delft.

Dafür werden pro Zeiteinheit ungefähr dreimal mehr Punkte der Satellitenspur vermessen als bei den Aufnahmen von Zimmerwald und rund sechsmal mehr als bei denjenigen von Delft. Ausserdem sind die Aufnahmen wesentlich länger. Dies wiederum heisst, dass pro Durchgang des Satelliten im allgemeinen nicht mehr als zwei Aufnahmen gemacht werden können.

Nach den ersten Versuchen zeigte es sich bald, dass bei vielen Aufnahmen die Residuen gegen den Rand hin einen systematischen Verlauf nehmen. Der Grund dafür ist im Reduktionsverfahren zu suchen. Bei Aufnahmen, die diesen Effekt zeigten, wurden diese Randpunkte weggelassen (ungefähr die ersten und letzten 10 bis 20 Punkte).

Mit den so gestutzten Aufnahmen wurden dann die in Tabelle 9 zusammengestellten Resultate erzielt.

Zu dieser Tabelle muss noch gesagt werden, dass bei der Berechnung der mittleren Werte \overline{m}_1 , \overline{m}_2 , $\overline{m_1/m_2}$ die Werte m_1 , m_2 etc. gewichtet wurden mit der Anzahl der

vermessenen Satellitenpositionen pro Bogen resp. pro Aufnahme, da diese Anzahl hier sehr stark variabel ist.

Nach dem Verhältnis der Brennweiten würde man einen etwa drei- bis viermal grösseren mittleren Fehler m_1 erwarten als bei den Bogen von Zimmerwald oder Delft.

Der mittlere Fehler \bar{m}_1 ist jedoch nur 2"87.

$$\text{Dann ist } \bar{m}_1_{\text{GRAZ}} / \bar{m}_1_{\text{ZMWLD}} = 2.08$$

$$\text{und } \bar{m}_1_{\text{GRAZ}} / \bar{m}_1_{\text{DELFT}} = 2.16$$

Dies spricht für die Qualität der Plattenreduktion von Graz.

Sehr günstig fällt auch der Quotient \bar{m}_1 / \bar{m}_2 aus. Dies hängt natürlich auch damit zusammen, dass maximal 2 Aufnahmen pro Bogen vorhanden sind. Trotzdem kann aufgrund dieser Resultate geschlossen werden, dass die Verdrehungen der Satellitenspur hier im allgemeinen gering sind.

Es ist schade, dass keine Aufnahmen in zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen verfügbar sind. So kann eine Abschätzung der Fehler in den Aufnahmepunkten (wie in den Tabellen 5 und 6) nicht gegeben werden.

Es ist klar, dass bei der Kombination von Grazer Daten mit solchen von Zimmerwald und/oder Delft eine Gewichtung bei der Parameterbestimmung eingeführt werden muss.

Tabelle 9

Kurze Bogen Graz

| Aufnahme | Zeit | m_1 | m_2 | $m_1 / \overline{m_2}$ | Bogen-Nr. | Anz. Punkte | Bogenlänge |
|----------|-------------------------------|-------|-------|------------------------|-----------|-------------|------------|
| 1697 | 1972 09 11 00 02 ^m | 4.89 | 4.89 | | 1 | 50 | 311 sec |
| 1700 | 12 00 02 | 3.34 | 3.33 | | 2 | 207 | 242 |
| 1702 | 15 00 04 | 2.36 | 2.25 | 1.01 | 3 | 176 | 247 |
| 1703 | 12 | | 2.42 | | | 154 | 242 |
| 1708 | 22 00 38 | 5.18 | 5.09 | | 4 | 31 | 52 |
| 1713 | 26 00 51 | 2.96 | 2.93 | | 5 | 105 | 124 |
| 1719 | 27 01 03 | 3.15 | 2.66 | 1.04 | 6 | 129 | 150 |
| 1720 | 11 | | 3.41 | | | 121 | 146 |
| 1722 | 28 01 04 | 3.08 | 3.05 | 1.02 | 7 | 162 | 232 |
| 1723 | 12 | | 2.96 | | | 109 | 126 |
| 1725 | 10 04 22 36 | 3.34 | 3.03 | 1.12 | 8 | 76 | 95 |
| 1726 | 48 | | 2.92 | | | 83 | 112 |
| 1732 | 11 23 09 | 2.32 | 2.08 | 1.01 | 9 | 60 | 72 |
| 1733 | 17 | | 2.37 | | | 153 | 177 |
| 1740 | 15 23 26 | 3.05 | 2.13 | 1.04 | 10 | 68 | 83 |
| 1741 | 34 | | 3.30 | | | 154 | 211 |
| 1743 | 16 20 25 | 2.21 | 1.99 | 1.03 | 11 | 121 | 149 |
| 1744 | 33 | | 3.02 | | | 22 | 39 |
| 1746 | 17 20 30 | 2.39 | 2.20 | 1.11 | 12 | 153 | 191 |
| 1747 | 38 | | 2.08 | | | 120 | 138 |

Mittelwerte

2:87

1.04

7. BERECHNUNG VON STATIONSKOORDINATEN

7.1 Vorgehen

Es wurde eingangs des 2. Teils festgestellt, dass mit den hier verfügbaren Daten nur eine Bestimmung von relativen Stationskoordinaten sinnvoll ist. Bei den zwei hier verwendeten Stationen Zimmerwald und Delft war es klar, dass die Koordinaten von Zimmerwald festgehalten wurden, da diese Station vergleichsweise viel sicherer im System von SAO Standard Earth III eingemessen ist als Delft (vgl. 5.5).

In der Tabelle 10 sind die Bogen zusammengestellt, die zur Bestimmung der Stationskoordinaten von Delft verwendet werden konnten:

In 6 Durchgängen gibt es Beobachtungen beider Stationen. Aus je 2 aufeinanderfolgenden Durchgängen können 3 Bogen gebildet werden, wobei allerdings nur im letzten Bogen Beobachtungen von Delft in beiden Durchgängen vorhanden sind.

Schliesslich können die Bogen 8 und 9 zu einem Ein-Tagesbogen mit Beobachtungen beider Stationen in 3 Durchgängen zusammengehängt werden. Zu einem 4. Durchgang in diesem Zeitraum sind noch Beobachtungen von Zimmerwald vorhanden.

Simultane Beobachtungen im klassischen Sinne sind hier nur in 2 Bogen vorhanden:

- Bogen Nr. 1: 2 simultane Aufnahmenpaare
- Bogen Nr. 2: 1 simultanes Aufnahmenpaar

Nach den ersten Versuchen wurde sehr bald klar, dass die Annahme, zwischen beiden Stationen sei kein systematischer Zeitshift vorhanden, nicht haltbar ist.

Die unter dieser Annahme bestimmten Koordinaten zeigen gegenüber der Bestimmung (7) und gegenüber den Schätzungen (7a), (7b) grosse Abweichungen, vor allem in der X- und der Z-Komponente. Aus der Beobachtungskonstellation und den Bahn-
daten von Pageos sieht man andererseits, dass sich die Bewegung dieses Satelliten, beschrieben im erdfesten System, zur Hauptsache in der X,Z-Ebene abspielt.

Leider ist es aus Gründen der Beobachtungsgenauigkeit nicht möglich, bei den 6 kurzen Bogen die Koordinaten und den systematischen Zeitshift Δt simultan zuverlässig zu bestimmen. Dies gelingt erst bei den längeren Bogen, bei denen Beobachtungen beider Stationen in mehreren Durchgängen vorhanden sind.

Aus Tabelle 10 sieht man, dass hier nur die Bogen 10 und 11 in Frage kommen. Unter der Annahme, dass dieser Zeitshift Δt konstant war während des Zeitraumes der ganzen Kampagne, können nun auch die kurzen Bogen zu einer sinnvollen Bestimmung der Koordinaten von Delft verwendet werden, indem das aus dem Bogen 10 oder 11 bestimmte Δt bei diesen kurzen Bogen fest vorgegeben wird. Es muss nochmals darauf hingewiesen werden, dass der hier bestimmte Zeitshift ein relativer Zeitshift zwischen den beiden Stationen ist. Bei dieser beschränkten Anzahl Beobachtungen gibt es keine Möglichkeit, dieses Δt Zimmerwald oder Delft zuzuordnen. Im Bestimmungsprogramm besteht natürlich formal die Möglichkeit, diesen Zeitshift entweder Zimmerwald oder Delft zuzuordnen. Solche Versuche haben erwartungsgemäss einfach das Vorzeichen von Δt vertauscht. Der Einfluss auf die Stationskoordinaten ist unbedeutend. Bei den im folgenden wiedergegebenen Resultaten wurde der Zeitshift konsequent der Station Delft zugeordnet.

Wenn nun nur kurze Bogen zur Verfügung stehen, gibt es noch eine andere Möglichkeit, dieses Timing-Problem zu behandeln:

Werden bei einem Bogen die Koordinaten X, Y, Z einer Station für verschiedene, jeweils festgehaltene Werte Δt bestimmt, sieht man, dass die Funktionen $X(\Delta t)$, $Y(\Delta t)$, $Z(\Delta t)$ für kleine Δt ($\Delta t \leq 50$ msec) in sehr guter Näherung linear sind. Man kann also für alle Bogen die Parameter dieser Geraden bestimmen und anschliessend den Punkt bestimmen, für den die Summe der Abstände im Quadrat von diesen Geraden minimal ist. Die Koordinaten dieses Punktes wären dann die wahrscheinlichsten Koordinaten für die betreffende Station. Hier wird insbesondere die Voraussetzung, dass der Zeitshift zwischen zwei Stationen über längere Zeit konstant bleibt, nicht gemacht.

Dieses Vorgehen würde sicher gute Resultate liefern, wenn verschiedene Satelliten zur Verfügung ständen. Bei den hier vorhandenen kurzen Bogen ist leider ein Haken dabei: Die Geraden $X(\Delta t)$ und $Z(\Delta t)$ sind fast zueinander parallel (ähnliche Beobachtungskonfigurationen), so dass die Lösungen für X und Z nur sehr unsicher bestimmt sind.

Zusammenfassung:

Die Stationskoordinaten von Delft wurden auf 3 verschiedene Arten bestimmt:

1. Bei dem einzigen Ein-Tagesbogen (Bogen 10, 11) wurden die Stationskoordinaten und der systematische Zeitshift Δt simultan bestimmt.

2. Unter der Annahme, dass dieses Δt während der Kampagne konstant blieb, wurden die kurzen Bogen zur Bestimmung der Stationskoordinaten verwendet (1 Durchgang und 2 Durchgänge).
3. Unter Verzicht auf die Timing-Information wurde versucht, mit Hilfe der Geraden $X(\Delta t)$ etc. für die einzelnen kurzen Bogen eine Schätzung für die Stationskoordinaten von Delft vorzunehmen.

Vor der Diskussion der Resultate soll noch auf einige prinzipielle Aspekte eingegangen werden:

- Bei der Bestimmung von Stationskoordinaten mit Hilfe von Richtungsbeobachtungen ist die Längeneinheit festgelegt durch die Wahl von GM. Bei der Bestimmung geozentrischer Stationskoordinaten in {2} wurden zwar auch Laser-Beobachtungen verwendet, die Längeneinheit aber wurde weiterhin mittels GM definiert. Falls einmal ein verbessertes GM eingeführt werden sollte, muss auf die nach der alten Version bestimmten Koordinaten einfach eine Skalentransformation angewandt werden.
- In dieser Arbeit wurden die Koordinaten von Zimmerwald festgehalten. Es liegt auf der Hand, dass dadurch Verfälschungen in den Koordinaten der übrigen Stationen eingeführt werden können. Dies trifft dann zu, wenn die in {2} gegebenen Koordinaten von Zimmerwald grob falsch sind. Dies wiederum ist kaum anzunehmen, haben sich doch die Koordinaten von Zimmerwald in Standard Earth III nur um wenige Meter gegenüber denen in Standard Earth II verändert. Diese Annahme (Festhalten von Zimmerwald) ist insofern ohne Bedeutung, als auch beim längsten Bogen bei einem Versuch, die Koordinaten beider Stationen gleichzeitig zu bestimmen, die mittleren Fehler um eine bis zwei Zehnerpotenzen über dem in {2} gegebenen mittleren Fehler der Koordinaten von Zimmerwald liegen.

Tabelle 10

Bogen für die Bestimmung der Stationskoordinaten von Delft

- N₁ : Bogen Nr. (Zimmerwald) s. Tabelle 3
- N₂ : Bogen Nr. (Delft) s. Tabelle 4
- N₃ : Bogen Nr. für Koordinatenbestimmung
- A₁ : Anzahl Zimmerwalder Aufnahmen für diesen Bogen
- A₂ : Anzahl Delfter Aufnahmen für diesen Bogen
- A : Anzahl Aufnahmen insgesamt
- K : Kurze Bogen (ein Durchgang)
- Z : Zwei-Durchgangsbogen (Bogen bestehend aus 2 aufeinanderfolgenden Durchgängen)
- T : Tagesbogen

| N ₃ | K | | | Z | | | N ₃ | T | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|---|----|
| | N ₁ | A ₁ | N ₂ | A ₂ | A | N ₁ | | A ₁ | N ₂ | A ₂ | A | | |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 7 | 5 | 2 | 2 | - | 9 | 3 | 5 | 6 |
| 2 | 6 | 3 | 3 | 5 | 8 | 6 | 3 | 3 | 5 | [10 | 2 | - | -] |
| 3 | 9 | 3 | 5 | 6 | 9 | 9 | 3 | 3 | 6 | 11 | 2 | 6 | 4 |
| 4 | 11 | 2 | 6 | 4 | 6 | 10 | 2 | 2 | - | 12 | 3 | 7 | 4 |
| 5 | 12 | 3 | 7 | 4 | 7 | 11 | 2 | 2 | 4 | | | | |
| 6 | 13 | 2 | 9 | 5 | 7 | 12 | 3 | 3 | 4 | | | | |

24, [22]

Tabelle 11

Stationskoordinaten Delft Y - Kurze Bogen

Stationskoordinaten : X, Y, Z ; X'=X-3919000 m, Y'=Y-298000 m, Z'=Z-5005000 m

| N ₃ | Datum | Δt = 0 | | | Δt = -10 msec | | | Δt = -13.3 msec | | |
|----------------|-------|--------|----|----|---------------|----|----|-----------------|----|----|
| | | X' | Y' | Z' | X' | Y' | Z' | X' | Y' | Z' |

1. Bogen zu einem Durchgang

| | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|
| 1 | 09 21 | 611.8 | 850.6 | 969.4 | 662.5 | 845.4 | 933.2 | 679.2 | 843.7 | 921.2 |
| 2 | 09 26 | 608.0 | 882.8 | 903.3 | 658.9 | 866.7 | 871.2 | 675.7 | 845.3 | 860.6 |
| 3 | 10 04 | 646.0 | 848.6 | 892.7 | 695.5 | 858.2 | 865.5 | 711.8 | 861.4 | 856.5 |
| 4 | 10 05 | 554.4 | 781.3 | 903.5 | 608.9 | 789.8 | 881.7 | * 626.9 | 792.6 | 874.5 |
| 5 | 10 06 | 635.6 | 904.9 | 937.4 | 673.8 | 875.7 | 902.2 | 686.4 | 866.1 | 890.6 |
| 6 | 10 13 | 552.6 | 821.3 | 964.8 | 606.4 | 814.6 | 934.1 | * 624.2 | 812.4 | 924.0 |

| | | | | | | | | | | |
|--|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 601.1 | 848.3 | 928.5 | 651.0 | 841.7 | 898.0 | 667.4 | 836.9 | 887.9 |
| | | ±39.8 | ±43.9 | ±33.5 | ±35.9 | ±33.2 | ±30.3 | ±34.7 | ±28.7 | ±29.5 |

* 688.3 854.1 882.2
±16.3 ±11.3 ±30.1

2. Bogen zu zwei Durchgängen

| | | | | | | | | | | |
|---|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 7 | 09 25/26 | 576.8 | 867.3 | 909.7 | 631.5 | 853.1 | 877.0 | 649.6 | 848.4 | 866.2 |
| 8 | 10 04/05 | 607.5 | 827.3 | 912.6 | 662.2 | 839.7 | 882.7 | 680.3 | 843.8 | 872.8 |
| 9 | 10 05/06 | 626.0 | 833.7 | 966.1 | 662.6 | 829.3 | 913.6 | 674.7 | 827.8 | 896.3 |

| | | | | | | | | | | |
|--|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 603.4 | 842.8 | 929.5 | 652.1 | 840.5 | 891.1 | 668.2 | 840.0 | 878.4 |
| | | ±24.9 | ±21.5 | ±31.8 | ±17.8 | ±11.9 | ±19.7 | ±16.3 | ±10.8 | ±15.8 |

7.2 Resultate

1. Ein-Tagesbogen

Systematischer Zeitshift und Stationskoordinaten von Delft simultan bestimmt:

Bogen 10:

$$\begin{aligned} X &= 3\,919\,674 \text{ m} \pm 10 \text{ m} \\ Y &= 298\,841 \text{ m} \pm 3 \text{ m} \\ Z &= 5\,005\,895 \text{ m} \pm 12 \text{ m} \\ \Delta t &= -12.3 \text{ msec} \pm 2.1 \text{ msec} \end{aligned} \quad (9a) \quad m_1 = 1''65, m_1/\overline{m_2} = 1.36$$

Bogen 11:

$$\begin{aligned} X &= 3\,919\,681 \text{ m} \pm 9 \text{ m} \\ Y &= 298\,841 \text{ m} \pm 3 \text{ m} \\ Z &= 5\,005\,882 \text{ m} \pm 11 \text{ m} \\ \Delta t &= -13.3 \text{ msec} \pm 2.0 \text{ msec} \end{aligned} \quad (9b) \quad m_1 = 1''47, m_1/\overline{m_2} = 1.20$$

Für den Strahlungsdruck wurde in beiden Fällen der Ansatz (4b) gemacht. Sowohl die mittleren Fehler der Satellitenposition m_1 als auch die Quotienten $m_1/\overline{m_2}$ zeigen eine Verschlechterung gegenüber den kurzen Bogen. Eine Entscheidung aber, ob diese Verschlechterung dem sicher nicht perfekten Kräftefeld oder systematischen Aufnahme Fehlern zuzuschreiben ist, ist bei diesen schlecht belegten Bogen kaum möglich. Die Mitberücksichtigung von Beobachtungen weiterer Stationen kann hier mehr Informationen liefern.

Trotz dieses Vorbehaltes dürfte es sich hier um die zuverlässigste Bestimmung der Stationskoordinaten von Delft Ypenburg handeln. Zur Darstellung der Beobachtungen über das ganze Integrationsintervall wurden 16 Parameter bestimmt (6 Anfangsbedingungen, 6 Strahlungsdruckparameter, 3 Stationskoordinaten und ein Zeitshift Δt . Werden die gleichen Beobachtungen mit 3 kurzen Bogen erfasst, so braucht man 3·6 Anfangsbedingungen und 3·3 Stationskoordinaten, also total 27 Parameter.

Die hier angegebenen mittleren Fehler der Koordinaten sind unter der Voraussetzung berechnet worden, dass die Fehler der einzelnen Satellitenpunkte nicht miteinander korreliert sind. Dies ist, wie man aus den Quotienten $m_1/\overline{m_2}$ sieht, vor allem für den Bogen 10 nicht erfüllt. Aus diesem Grunde sind diese mittleren Fehler zu optimistisch.

Dass die Y-Koordinate hier am genauesten bestimmt wurde, ist nach den Bemerkungen im letzten Abschnitt über Beobachtungskonfiguration und Bahn nicht erstaunlich.

Vergleicht man die Lösungen (9a) und (9b) mit der SAO-Lösung (7), sieht man, dass die beste Übereinstimmung für die Y-Koordinate besteht. Auch bei der Z-Koordinate kann in Anbetracht des grösseren mittleren Fehlers von einer guten Übereinstimmung gesprochen werden. Die X-Koordinate hingegen weicht signifikant um 20 m bis 30 m gegenüber (7) ab.

Günstiger fällt der Vergleich von (9a), (9b) mit den mittels des europäischen Datums geschätzten Koordinaten (7a) und (7b) aus. Hier kann bei allen 3 Koordinaten von einer guten Übereinstimmung gesprochen werden.

Jedenfalls kann abschliessend gesagt werden, dass mit dieser Methode mit einigen gut belegten Ein-Tagesbogen gute relative Koordinaten bestimmt werden können.

2. Verwendung kurzer Bogen bei fest vorgegebenem Δt

Als repräsentativer Zeitshift für den Zeitraum der ganzen Kampagne wurde $\Delta t = -13.3$ msec aus der Bestimmung mit Bogen Nr. 11 gewählt.

Die Resultate, die bei den 6 Ein-Durchgangsbogen und den 3 Zwei-Durchgangsbogen unter dieser Annahme erzielt wurden, sind in Tabelle 11 zusammengefasst. Zur Illustration sind weiterhin die Koordinaten für $\Delta t = 0$ msec und $\Delta t = -10$ msec tabelliert. Wiederum ist klar, dass die Annahme $\Delta t = 0$ zu verfälschten Koordinaten führt.

Bogen Nr. 4 und Bogen Nr. 6 liefern die "schlechtesten" Resultate, Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, dass in diesen beiden Bogen nur je 2 Aufnahmen von Zimmerwald vorhanden sind.

Die Mittelwerte, die ohne diese beiden Bogen berechnet wurden, sind mit * markiert.

Es muss noch erwähnt werden, dass bei den ersten 6 Bogen nur der Ansatz (1) für den Strahlungsdruck verwendet wurde, bei den Bogen 7, 8 und 9 hingegen wurde mit Ansatz (4a) gearbeitet.

Zwei Sachverhalte sind von Bedeutung:

- Die bei verschiedenen Bogenlängen berechneten Mittelwerte für die Stationskoordinaten von Delft zeigen keine signifikanten Differenzen. Dies ist insbesondere deshalb wichtig, als bei verschiedenen Bogenlängen verschiedene Ansätze für die Erfassung des Strahlungsdruckes gemacht werden mussten.

- Es ist nicht zu übersehen, dass eine Verlängerung der Bogen auf zwei Durchgänge oder gar auf einen Tag wesentlich zuverlässigere Koordinaten liefert.

3. Schnitt von n Geraden

Mit Hilfe der in Tabelle 11 zusammengestellten Koordinaten für $\Delta t = 0$ und $\Delta t = -10$ msec können die Parameter der Geraden $X(\Delta t)$, $Y(\Delta t)$ und $Z(\Delta t)$ für die verschiedenen Bogen berechnet werden.

Ein Basic Program auf einem Hewlett-Packard Tischrechner dient dazu, den Punkt zu finden, für den die Summe der Abstände im Quadrat von den einzelnen Geraden minimal ist.

Man muss sich dabei im klaren sein, dass bei dieser Methode die X- und die Z-Komponente wesentlich weniger gut bestimmt werden können, wird doch auf die Zeitinformation der einen Station völlig verzichtet.

Resultate:

a) Alle 6 Ein-Durchgangsbogen:

$$X = 3\,919\,738 \text{ m} \pm 34 \text{ m}$$

$$Y = 298\,830 \text{ m} \pm 4 \text{ m}$$

$$Z = 5\,005\,845 \text{ m} \pm 15 \text{ m}$$

b) Bogen 4 und 6 eliminiert:

$$X = 3\,919\,708 \text{ m} \pm 34 \text{ m}$$

$$Y = 298\,850 \text{ m} \pm 5 \text{ m}$$

$$Z = 5\,005\,867 \text{ m} \pm 18 \text{ m}$$

c) Bogen 7, 8, 9 (Zwei Durchgänge):

$$X = 3\,919\,694 \text{ m} \pm 30 \text{ m}$$

$$Y = 298\,837 \text{ m} \pm 3 \text{ m}$$

$$Z = 5\,005\,856 \text{ m} \pm 20 \text{ m}$$

Erwartungsgemäss ist hier lediglich die Y-Komponente einigermaßen zuverlässig bestimmt. Ueber die berechneten X- und Z-Komponenten irgendeine Aussage zu machen, wäre bei so wenigen Bogen sicher verfehlt.

Andererseits sieht man schon anhand der hier gegebenen Resultate deutlich, dass diese Methode sehr gute Koordinaten liefern würde bei Verwendung von Satelliten

mit wesentlich verschiedenen Bahnelementen.

Bei Bogen mit mehr als zwei Beobachtungsstationen muss diese Methode verallgemeinert werden, indem noch die Variation der Koordinaten einer Station mit Nr. k als Funktion des Zeitshifts einer Station Nr. i berücksichtigt werden muss.

7.3 Strahlungsdruck

Mit den hier verfügbaren Beobachtungen der 3 Stationen Zimmerwald, Delft und Graz können keine vollständigen Resultate betreffend Strahlungsdruck gewonnen werden.

Einige Versuche mit Bogen verschiedener Länge (ca. 1 bis 5 Tage) lassen nur die folgenden Schlüsse zu:

1. Die Nicht-Sphärizität des Satelliten ist von Bedeutung.
2. Diese Nicht-Sphärizität ist im Zeitraum dieser Kampagne sicher nicht stärker ausgeprägt als im Jahre 1969. (Photometrische Messungen, s. {18}).
3. Die Versuche mit den längeren Bogen zeigen, dass neben der Nicht-Sphärizität wahrscheinlich noch andere bahnbestimmende Kräfte von Bedeutung sind (z.B. elektromagnetische Einflüsse, Sonnenwind, ungenügend genau bestimmte (Resonanz-) Terme des Erdpotentials etc.).

In Anbetracht der sehr kleinen Beobachtungsdichte schien es jedoch angezeigt, keine Verfeinerung des Kräftefeldes anzustreben.

7.4 Abschliessender Kommentar

Da die hier entwickelten und erprobten Methoden in der nächsten Zeit zur Auswertung aller sogenannten Short-Arc-Beobachtungen der europäischen Stationen verwendet werden, sollen jetzt nochmals die wichtigsten Punkte zusammengefasst werden. Im weiteren folgen dann noch einige Verbesserungsvorschläge, die sich aus den gesammelten Erfahrungen ergeben.

1. Zur Darstellung der Bahn werden die vermessenen Punkte der Satellitenspur verwendet, d.h. eine Glättung der Beobachtungen über die Aufnahmen wird nicht durchgeführt.
2. Da die Zeitzuordnung zu den vermessenen Punkten der Satellitenspur bei den verschiedenen Stationen nicht einheitlich gelöst ist, wird (falls möglich) zusätzlich zu den Koordinaten einer Station noch ein systematischer Zeitshift bezüglich einer Referenzstation bestimmt.

Modifikationen:

1. Eine deutliche Unterscheidung zwischen Datenanalyse und nachfolgender Auswertung. Das jetzt für beide Zwecke eingesetzte Bestimmungsprogramm wird ersetzt durch zwei Programme, wobei das für die Datenanalyse verwendete Programm vereinfacht werden kann was das Kräftefeld anbelangt, dafür aber noch eine gewisse automatische "Säuberung" der Beobachtungen vornimmt (Elimination fehlerhafter Beobachtungen).
2. Anstatt - wie in dieser Arbeit - Koordinaten (und eventuell Zeitshift) für jeden Bogen einzeln zu bestimmen und diese Einzelergebnisse dann irgendwie zu mitteln, muss die Möglichkeit geschaffen werden, die Fehlergleichungen verschiedener Bogen im gleichen Ausgleichsverfahren zu behandeln. Die gemeinsamen Unbekannten aller Bogen (Koordinaten, Zeitshifts) sollten dann entsprechend schärfer herauskommen. Bei einem solchen Vorgehen besteht insbesondere die Hoffnung, Koordinaten und Zeitshift auch bei kürzeren Bogen sauber voneinander zu trennen.

Ob es möglich sein wird, mit allen Daten des Short-Arc-Projektes absolute geozentrische Koordinaten zu bestimmen, ist sehr ungewiss. Viel hängt davon ab, wie viele dieser Short-Arcs in längeren Bogen dargestellt werden können. Ein Versuch kann jedenfalls gemacht werden.

Allerdings zeigen besonders die in 7.2.3 mit den Geraden durchgeführten Experimente mit aller Deutlichkeit die Gefahren, mit Beobachtungen lediglich eines passiven Satelliten geozentrische Koordinaten zu bestimmen. Zuverlässigere Koordinaten erhält man bestimmt, wenn zusätzlich zu diesen Pageos-Beobachtungen noch Geos I- und Geos II-Beobachtungen einiger europäischer Stationen verwendet würden.

Verdankungen

Diese Arbeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. M. Schürer, dem ich für manche anregende Diskussion sowie für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes danke.

Mein Dank gilt im weiteren Herrn Dr. I. Bauersima, der mir manchen Impuls und manche Aufmunterung zuteil werden liess.

LITERATUR

- {1} C.A. Lundquist, G. Veis "Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Standard Earth", Vol. 1,2,3, Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report 200, 1966.
- {2} E.M. Gaposchkin "1973 Smithsonian Standard Earth (III)", Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report 353, 1973.
- {3} R.H. Rapp "Procedures and Results Related to the Direct Determination of Gravity Anomalies from Satellite and Terrestrial Gravity Data", Ohio State University, Reports of the Department of Geodetic Science, Report No. 211, 1974.
- {4} K.R. Koch, H.H. Schmid "Error Study for Determination of Center of Mass of the Earth from Pageos Observations", U.S. Department of Commerce, ESSA Technical Memorandum C & GSTM 7, 1970.
- {5} F. Morrison "Propagation of Errors in Orbits Computed from Density-Layer Models", U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, presented at the AGU/AIAA Symposium on Applications of Artificial Satellites to Geodesy, April 1971, Washington, D.C.
- {6} K.R. Koch, B.U. Witte "The Earth's Gravity Field Represented by a Simple Layer Potential from Doppler Tracking of Satellites", U.S. Department of Commerce, NOAA Technical Memorandum NOS 9, 1971.
- {7} L.J. Gulick "Numerical Integration of Orbital Equations of Motion", U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, presented at the AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference 1971, Ft. Lauderdale, Florida, August 1971.
- {8} K.R. Koch, F. Morrison "A Simple Layer Model of the Geopotential from a Combination of Satellite and Gravity Data", Journal of Geophysical Research, Vol. 75, No. 8, 1970.
- {9} Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, issued by H.M. Nautical Almanac Office, London 1961.
- {10} K. Stumpff "Himmelsmechanik", Band II, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965.
- {11} J. Schubart, P. Stumpff "On a N-Body Programm of High Accuracy for the Computation of Ephemerides of Minor Planets and Comets", Veröffentlichungen des Astronomischen Recheninstitutes Heidelberg, Nr. 18, 1966.
- {12} D. Brouwer "On the Accumulation of Errors in Numerical Integration", Astronomical Journal 46, No. 1072, p. 149 ff., 1937.

- {13} E. Fehlberg "Classical Eighth and Lower Order Runge-Kutta-Nystrom Formulas with Step-size Control for Special Second Order Differential Equations", NASA Technical Report TR-R-381, 1972.
- {14} IBM SYSTEM "/370 Principles of Operation", IBM-Manual GA22-7000-4.
- {15} G. Beutler "Runden auf der Rechenanlage IBM 370/158", Informationsblatt Nr. 12 für Computerbenützer der Universität Bern, 1975.
- {16} B. Chovitz, J. Lucas "The Orbit of Pageos through March 1970", U.S. Department of Commerce, ESSA-C & GS, presented at Geos-2 Review Conference, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, June 1970.
- {17} D.E. Smith, K.H. Fea "Radiation Pressure Effects on the Acceleration of High Altitude Balloon Satellites", University of London, Mission and Trajectory Analysis Division, presented at Geos-2 Review Conference NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, June 1970.
- {18} R.C. Vanderburgh, K.E. Kissell "Measurements of Deformation and Spin Dynamics of the Pageos Balloon Satellite by Photoelectric Photometry", Planetary and Space Science, Vol. 19, p. 223 ff., 1971.
- {19} K.E. Kissell, D.E. Smith "Orbital Accelerations of the Pageos Spacecraft", paper presented at the Fourteenth Plenary Meeting of Cospar, Seattle, Washington, 1971.
- {20} E.J. Prior "Observed Effects of Earth-Reflected Radiation and Hydrogen- Drag on the Accelerations of Balloon Satellites", Geophysical Monograph Series, American Geophysical Union, No. 15, 1971.
- {21} "System/360 Scientific Subroutine Package (360A-CM-03X) Version III", IBM-Manual GH20-0166-5.
- {22} E.M. Gaposchkin, J. Latimer, G. Mendes "Station Coordinates in the Standard Earth III System and Radiation-Pressure Perturbation from ISAGEX Camera Data", Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts 02138, August 1975.
- {23} J.G. Marsh, B.C. Douglas, S.M. Klosko "The Relation of the European Datum to a Geocentric Reference System", Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland & Wolf Research and Development Corporation, Riverdale, Maryland. Presented at the International Union of Geodesy and Geophysics Meeting in Moscow, U.S.S.R., August 1971.
- {24} W. Ehrnsperger "Geometric Adjustment of Western European Satellite Triangulation (Solution 1975)", Bayerische Kommission für die Internationale Erdmessung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, D-8000 München 22, Marstallplatz 8, 1975.
- {25} D.L.F. Van Loon, T.J. Poelstra "The Modified Astrometric Procedure of Satellite Plate Reduction as Applied at the Kootwijk Observatory of the Delft Geodetic Institute", Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 6, No. 2, 1976.

- {26} G. Balmino, Ch. Reigber, B. Moynot "A Geopotential Model Determined from Recent Satellite Observing Campaigns (Grim 1)", Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale, Toulouse, France, 1975.
- {27} G. Balmino, Ch. Reigber, B. Moynot "The Grim 2 Earth Gravity Model", Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften Reihe A: Theoretische Geodäsie, Heft Nr. 86, 1976.
- {28} R.J. Anderle "Geodetic Analysis through Numerical Integration", Naval Weapons Laboratory, Dahlgren, Virginia, presented at the First International Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy and Geodynamics in Athens, Greece, May 1973.
- {29} G. Beutler "Eine numerische Methode zur integralen Auswertung von Satellitenbeobachtungen", Hausdruckerei, Institut für Exakte Wissenschaften, Bern, 1976.
- {30} P. Henrici "Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations", J. Wiley & Sons Inc., New York, London, Sydney, 1962.
- {31} Information Bulletin Nos 6, 7, 9, 11 Central Bureau for Satellite Geodesy Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts, USA.

