

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Zweiunddreissigster Band

Das Geoid in der Schweiz

Werner Gurtner

1978

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz

herausgegeben von der

Schweizerischen Geodätischen Kommission
(Organ der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft)

Zweiunddreissigster Band

Das Geoid in der Schweiz

Werner Gurtner

1978

Adresse der Schweizerischen Geodätischen Kommission:

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
ETH-Hönggerberg
CH-8093 Zürich

Diese Arbeit erscheint ebenfalls als Mitteilung
aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
der ETH-Zürich, Heft Nr. 20

Redaktion des 32. Bandes:
Dr. W. Gurtner, Zürich

Druck: Offsetdruck Bern AG

VORWORT DES PRAESIDENTEN DER SGK

Die Schweizerische Geodätische Kommission (SGK) hat sich seit ihrem Bestehen immer wieder mit dem Geoid in der Schweiz befasst, ohne bisher zu einer einigermaßen abschliessenden Lösung gelangt zu sein. Schon 1893 schrieb R. Gautier in seinem "Exposé historique des travaux de la Commission de 1862 à 1892": "... la figure de la terre diffère sensiblement de cette forme géométrique (Rotationsellipsoid) et c'est ainsi que s'est posé le nouveau problème de déterminer toutes ces variations locales, afin d'en déduire la connaissance du sphéroïde terrestre, de ce qu'on est convenu d'appeler le géoïde".

Einen ersten Versuch, das Geoid in der Schweiz zu bestimmen, unternahm Messerschmidt (SGK Bd.9, 1901), allerdings mit nur sehr dürftigen Beobachtungsunterlagen. In den folgenden Jahren wurden weitere Lotabweichungen bestimmt, und 1903 empfahl Helmert in einem eingeholten Gutachten der Kommission, im Meridian des Gotthard ein astrogeodätisches Nivellement durchführen zu lassen. Diese Arbeit konnte erst 1916 in Angriff genommen werden und führte schliesslich zum Ergebnis eines viel beachteten Nord-Süd-Geoidschnittes (SGK Bd. 20, 1939). In der Folge wurde ein Ost-West-Profil im Parallel von Zürich beobachtet (SGK Bd. 22, 1944). Weitere Profile waren vorgesehen, gelangten aber - wohl wegen des allzu grossen Aufwandes - nicht zur Ausführung.

In den 50er-Jahren wurden nach einem Vorschlag von Kobold im Berner Oberland mit Hilfe von Höhenwinkelmessungen Lotabweichungen bestimmt, die den Vergleich mit direkt bestimmten ohne weiteres aushalten (SGK Bd. 26, 1967). Eine Ausdehnung auf die ganze Schweiz wäre aber schon wegen Versagens der Methode im Flachland infolge der Unsicherheiten in den Refraktionsstörungen nicht möglich gewesen, so dass es auch bei diesem Verfahren mit einem Versuch sein Bewenden hatte. Sowohl die Geoidschnitte, wie auch das Berner Oberländer-Netz wurden aber in der vorliegenden Arbeit vielfach als Testwerte benutzt.

Inzwischen hatte man aber doch mit der Zeit auf etwa 200 Punkten in der Schweiz und im benachbarten Ausland, vor allem für Laplace-Punktbestimmungen,

Lotabweichungen gemessen, und man konnte an eine flächenhafte Bestimmung des Geoides denken. Hier sind die Arbeiten von Elmiger zu erwähnen. Er hat die Lotabweichungen isostatisch reduziert und benutzte dabei einen von ihm und Mitarbeitern ermittelten Raster von 500 m Maschenbreite für die Höhen, die auf Magnetband gespeichert sind. Senkrecht zu den reduzierten Lotabweichungen wurde nun ein sog. Cogeoid gelegt, wobei für dieses ein Polynomansatz gemacht wurde. Mit diesem Cogeoid konnten nun weitere Lotabweichungen interpoliert werden. Die direkt beobachteten und auf das Geoid reduzierten und die interpolierten Lotabweichungen wurden nun für ein flächenhaftes Nivellement benutzt und damit die Geoidfläche aufgebaut, wobei man aber nicht ohne ziemlich willkürliche Annahmen auskommt. Das Geoid von Elmiger war aber schon eine recht gute Lösung.

Die vorliegende Arbeit Gurtners unterscheidet sich in drei wesentlichen Punkten von der Elmigers. Erstens war inzwischen von den Geophysikern der Verlauf der Mohodiskontinuität in der Schweiz - wenn auch nur rudimentär - bestimmt worden, und Gurtner benutzte dieses Modell für die Reduktion der Lotabweichungen, und nicht mehr das allzu schematische Modell der Isostasie. Zweitens wurde das Cogeoid mit Hilfe der multivariaten Prädiktion und nicht mehr mittels eines Polynomansatzes bestimmt. Drittens wurde das Geoid aus dem Cogeoid und dem Potential des oben erwähnten Massenmodells mittels der Formel von Bruns errechnet also auf einem indirekten, aber beträchtlich vorteilhafteren Weg. Damit ist ein wesentlicher Fortschritt erzielt worden, und das von Gurtner bestimmte Geoid kann als vorläufiger Abschluss der Bemühungen der SGK betrachtet werden. Eine noch genauere Geoidbestimmung könnte wohl nur durch Vermehrung der Lotabweichungspunkte, durch ein wirklichkeitsnäheres Krustenmodell und durch den Einbezug von Schwereanomalien erreicht werden.

Die Arbeit wurde als Dissertation der ETH Zürich eingereicht und erscheint auch als Nr. 20 der Mitteilungen des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich.

Die Kommission ist Herrn Gurtner für diese wertvolle Arbeit zu grossem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Conzett ist zu danken für die sorgfältige Durchsicht

des Manuskripts und manche Anregung, Herrn Dr. A. Elmiger für seine Mithilfe und Erläuterungen des Computerprogramms für die Reduktion der Lotabweichungen, Herrn Dr. E. Klingelé vom Institut für Geophysik an der ETH-Z für die Berechnung von Höhenschichtlinien, Herrn W. Schneibel für die klaren Zeichnungen der zahlreichen Figuren und Frau Strickler für die Niederschrift des Manuskripts.

Der Präsident der Schweizerischen
Geodätischen Kommission:

Prof. Dr. M. Schürer

ABSTRACT

Due to the large variations of the deflections of the vertical in Switzerland the direct astrogeodetic determination of the geoid gives a rather low accuracy. Better results are obtained by introducing a cogeoid related to a mass model, and subsequent application of Brun's theorem. The resulting geoid shows a very detailed structure. The employed mass model involves the topography, the variable crustal thickness, and the Ivrea body, the most important mass anomaly in the considered limited area. The corresponding cogeoid was calculated directly from the reduced deviations by means of multivariate prediction. The standard error of the geoidal heights relative to a reference point turns out to be less than 10 cm in most of Switzerland.

Die vorliegende Arbeit ist unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. M. Schürer entstanden, dem ich an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

W. Gurtner

I N H A L T

	Seite
1. Einleitung	1
1.1 Allgemeine Bemerkungen, Zielsetzung der Arbeit	1
1.2 Gliederung der Arbeit	2
2. Grundlagen und bisherige Arbeiten zum Geoid in der Schweiz	3
2.1 Die astronomischen Stationen in der Schweiz	3
2.2 Bisherige Arbeiten zum Geoid der Schweiz	4
3. Geometrische Methoden der Geoidbestimmung	5
3.1 Einige Definitionen und Bezeichnungen	5
3.2 Das astrogeodätische Nivellement längs Profilen	6
3.3 Das astrogeodätische Flächennivellement	10
3.4 Die Darstellung des Geoides durch gewöhnliche Polynome	16
4. Grundsätzliche Verbesserungen der geometrischen Methoden	18
4.1 Berücksichtigung der 1. Ableitungen der Lotabweichungen	18
4.2 Glättung des Geoides	21
4.3 Cogeoid und Satz von Bruns	25
4.3.1 Prinzip	25
4.3.2 Die Berechnung des Potentials und der reduzierten Lotabweichungen	26
4.3.3 Besonderheiten der Methode	30
4.3.4 Cogeoidtypen	34
5. Interpolationen	42
5.1 Stützpunktverdichtung	42
5.2 Interpolation der Niveauflächen	42
6. Statistische Methoden der Geoidbestimmung	44
6.1 Kurzer Abriss über Prädiktion und Kollokation im allgemeinen	44
6.1.1 Prädiktion	44
6.1.2 Kollokation	47
6.1.3 Die Kovarianzfunktion	49
6.2 Die Lotabweichungen als Zufallsprozesse	50
6.3 Selbstkonsistentes statistisches Modell für $\Delta g, \xi, \eta, N$	51
6.4 Empirische Bestimmung der Kovarianzfunktion	56
6.5 Die stochastischen Eigenschaften der Lotabweichungen	61
6.6 Interpolation von Lotabweichungen	62
6.7 Niveauflächenbestimmung	63

	Seite
7. Berechnungen, Vergleiche, Interpolationen	72
7.1 Einleitende Bemerkungen	72
7.2 Die Geoidprofile	73
7.3 Interpolation von Lotabweichungen	75
7.3.1 Konzept	75
7.3.2 Prädiktion	76
7.3.3 Polynominterpolation	81
7.3.4 Vergleich Prädiktion \leftrightarrow Polynominterpolation	82
7.4 (Co-)Geoidbestimmung mit Prädiktion und Polynomapproximation	83
7.5 (Co-)Geoidbestimmung mit Hilfe des Flächennivellementes, Vergleich aller betrachteten Methoden	87
7.6 Der Einfluss von Fehlern der Geoidhöhen auf die Distanzreduktion	91
7.7 Die definitive Cogeoid- und Geoidberechnung	93
8. Zusammenfassung	99
 Literaturverzeichnis	 101
 <u>Anhang:</u> Karte I Moho-Cogeoid	
Karte II Geoid der Schweiz (Schweizer Datum)	
Karte III Geoid der Schweiz (Datum ED-50)	
Karte IV Die astronomischen Stationen der Schweiz	
Verzeichnis der astronomischen Stationen der Schweiz	

1. EINLEITUNG

1.1 Allgemeine Bemerkungen, Zielsetzung der Arbeit

Die Bestimmung des Geoides ist eine der wichtigsten Aufgaben der höheren Geodäsie. Obschon die moderne Satellitengeodäsie neue Möglichkeiten zu deren Lösung aufzeigt, haben die als klassisch zu bezeichnenden Methoden nichts an Aktualität verloren, sind doch vorderhand nur sie geeignet, die Kleinformen der Potentialniveauflächen zu bestimmen.

Die enge Verknüpfung des Potentialfeldes mit dem Aufbau der Erde, im lokalen Bereich insbesondere mit der Struktur und Mächtigkeit der Kruste, gibt dem Geodäten beispielsweise die Möglichkeit, die Resultate seismischer Untersuchungen zur Lösung seiner Aufgabe heranzuziehen.

Andererseits kann der Geophysiker mit Hilfe von Lotabweichungen, Schwereanomalien und Niveauflächen wertvolle Rückschlüsse auf die Dichteverteilung des Untergrundes ziehen.

Das Geoid und seine Normalenrichtungen haben in den letzten Jahren für den praktischen Geodäten trotz der Ansätze der dreidimensionalen Geodäsie an Bedeutung zugenommen. Die Entwicklung genauer elektronischer Distanzmesser verlangt vor allem in den Alpen eine saubere Reduktion der gemessenen Distanzen auf das Referenzellipsoid. Wird die Reduktion mit Hilfe der Stationshöhen durchgeführt, müssen sich diese auf das betreffende Ellipsoid beziehen. Da die Gebrauchshöhen aber eher orthometrischen Höhen entsprechen, ist eine Kenntnis der lokalen Geoidundulationen notwendig. Ihre Vernachlässigung kann bei steilen Visuren auf wenige Kilometer nicht selten Fehler von 10 cm bewirken.

Werden Höhenwinkel zur Reduktion benützt, müssen diese zuerst von den Lotabweichungen befreit werden.

Der Praktiker wird nun vor allem an Geoidhöhen- bzw. Lotabweichungsdifferenzen interessiert sein, was die Kenntnis der lokalen Feinstruktur des Geoides und seiner Normalen an beliebigen Orten verlangt.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit soll sein, verschiedene Methoden der lokalen Geoidbestimmung zu untersuchen und untereinander zu vergleichen. Insbesondere wird die Frage aufgeworfen, ob und wie bestehende Methoden verbessert werden können und welche Genauigkeit sie liefern.

Die Darstellung des Geoides bzw. der Cogeoides durch mathematische Funktionen

(Abschnitt 3.4) oder durch multivariate Prädiktion (Abschnitt 6.7) liefern gleichzeitig Lotabweichungen in beliebigen Punkten, so dass auch die Probleme der Lotabweichungsinterpolation gestreift werden.

Endlich sollen mit der geeignetsten Methode das Geoid sowie einige regularisierte Flächen (Cogeoide) im Gebiet der Schweiz bestimmt werden. Dabei soll geprüft werden, ob das resultierende Geoid, bzw. die gewählte Methode, die Forderungen der angewandten Geodäsie erfüllen kann.

Einschränkung:

Im folgenden werden nur astrogeodätische Methoden zur Geoidbestimmung untersucht. Auf einen später möglichen Einbezug von Schwereanomalien in das Konzept der Prädiktion wird im entsprechenden Kapitel hingewiesen.

1.2 Gliederung der Arbeit

Im Kapitel 2 werden die benützten Grundlagen sowie die bis jetzt in der Schweiz durchgeführten Arbeiten zusammengestellt.

Das Kapitel 3 behandelt bekannte Methoden der geometrischen Geoidbestimmung.

Mögliche Verbesserungen grundsätzlicher Art werden im Kapitel 4 aufgeführt.

Im Kapitel 5 stellen wir einige Ueberlegungen zu der Interpolation von Lotabweichungen und Geoidhöhen an.

Die auf stochastischen Prozessen basierende Prädiktion von Lotabweichungen und Geoidundulationen behandeln wir im Kapitel 6.

Berechnungen und Resultate, die aus Vergleichsgründen zusammengefasst aufgeführt werden sollen, sind im Kapitel 7 dargestellt, wo dann verschiedene Methoden auf Grund dieser Ergebnisse einander gegenübergestellt werden.

2. GRUNDLAGEN UND BISHERIGE ARBEITEN ZUM GEOID IN DER SCHWEIZ

2.1 Die astronomischen Stationen in der Schweiz

Im Gebiet, das von der Triangulation der Schweiz überdeckt wird, sind bis heute auf 110 Stationen total 207 Lotabweichungskomponenten beobachtet worden, wenn wir die aus astronomischen Azimuten gerechneten Ost-West-Komponenten mit einbeziehen.

Im weiteren wurden von der Schweizerischen Geodätischen Kommission (SGK) vier Profile gemessen:

im Meridian vom Gotthard	{SGK Bd. 20}
im Parallel von Zürich	{SGK Bd. 22}
im Parallel von Locarno	{SGK Bd. 24}
im Meridian von Lugano	{SGK Bd. 24}

mit einem Total von 102 Stationen und 108 Lotabweichungskomponenten.

Indem wir zusätzlich 8 ausländische Punkte mit je 2 LA-Komponenten heranziehen, stehen uns somit zur astrogeodätischen Bestimmung des Geoides in der Schweiz 220 Stützpunkte mit total 331 LA-Komponenten zur Verfügung. Ein vollständiges Verzeichnis und eine Karte "Astronomische Stationen in der Schweiz" befinden sich im Anhang.

Neben der sehr inhomogenen Verteilung der Stationen ist zu beachten, dass die einzelnen LA-Komponenten mit unterschiedlicher Genauigkeit bestimmt wurden.

Elmiger hatte in {1975} deshalb alle Messungen in die folgenden 7 Güteklassen eingeteilt:

Klasse 1	$\sigma_{\epsilon} = \pm 0''4$
2	0''5
3	0''6
4	0''7
5	1''0
6	1''5
7	2''0

In der vorliegenden Arbeit wird diese als zweckmässig erachtete Einteilung ebenfalls verwendet. (Vgl. Stationsverzeichnis im Anhang, Kolonne 1.)

Alle Lotabweichungen beziehen sich auf das schweizerische Datum:

Bessel-Ellipsoid:	a = 6 377 397.155 m
	f = 1/299.152 81
Fundamentalpunkt:	B ₀ = 46°57'08"66
Alte Sternwarte Bern	L ₀ = 7°26'22"50
	N ₀ = - 0.50 m *)

2.2 Bisherige Arbeiten zum Geoid in der Schweiz

Eine erste Darstellung des Geoides in der Schweiz wurde Ende des letzten Jahrhunderts von Messerschmitt {SGK Bd.9, Tafel IV} gewonnen, indem er mit Hilfe der damals bekannten Lotabweichungsstationen (unter Vernachlässigung der Lotkrümmungen) 5 Meridian- und zwei Parallelprofile konstruierte und daraus eine Höhenkurvenkarte des Geoides zeichnete.

Die im Jahre 1948 abgeschlossenen Beobachtungen der im Abschnitt 2.1 aufgeführten Geoidprofile boten erstmals die Gelegenheit, das Geoid der Schweiz in seinen Detailformen, allerdings nur profilweise, darzustellen. Die damals angewandte Methode des astrogeodätischen Nivellements wird im Abschnitt 3.2 diskutiert.

Bereits 1947 wurde in der SGK vorgeschlagen, drei weitere Meridianprofile sowie ein zusätzliches Ost-West-Profil zu beobachten. Da man nun aber an einer flächenhaften Darstellung des Geoides interessiert war, liess man den Vorschlag fallen.

In seiner Dissertation, deren Hauptthema die Interpolation von Lotabweichungen war, streifte Elmiger kurz die Darstellung des Geoides mit Polynomen {Elmiger 1969, S. 158 ff}. (Vgl. auch Abschnitt 3.4).

Als bisher letzte Arbeit erschien {Elmiger 1975} über eine Geoidbestimmung der Schweiz mit Hilfe des Flächennivellements. Die Methode ist im Abschnitt 3.3 dargestellt.

Drei Bestimmungen des europäischen Geoides seien noch erwähnt, in denen naturgemäss nur die "grobe" Form erkennbar ist:

{Wolf 1956} , {Bomford 1971} , {Levallois 1973}.

*) Der Wert N₀ = - 0.50 m ergibt sich aus den Resultaten der vorliegenden Arbeit unter der (willkürlichen) Annahme N_{Schwerzenbach} = 0.00 m (siehe Seite 97 und Verzeichnis der Geoidhöhen im Anhang).

3. GEOMETRISCHE METHODEN DER GEOIDBESTIMMUNG

Im Unterschied zum Kapitel 6, wo Lotabweichungen und Geoidundulationen als stochastische Prozesse aufgefasst werden, sollen im vorliegenden Kapitel im wesentlichen nur geometrische Beziehungen zwischen diesen Grössen benützt werden.

3.1 Einige Definitionen und Bezeichnungen

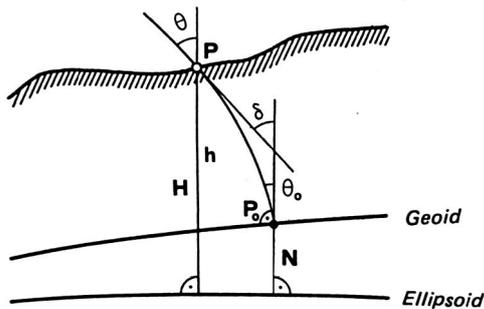


Fig. 3.1

ϕ, λ : astronomische Breite, Länge

B, L : geodätische Breite, Länge

h : orthometrische Höhe

H : ellipsoidische Höhe

$N = H - h$: Geoidhöhe, Unterschied

Geoid - Ellipsoid

θ : Lotabweichung im Punkt P:

Winkel zwischen der Tangenten an die Lotlinie und der Ellipsoidnormalen durch P

θ_0 : Lotabweichung im Geoidpunkt P_0 (Projektion nach Pizetti, vgl. Fig. 3.1): Winkel zwischen der Normalen auf das Geoid und der Ellipsoidnormalen durch P_0

$\xi = \phi - B$: Lotabweichungskomponente Nord - Süd im Punkt P

$\eta = (\lambda - L) \cos \phi$: Lotabweichungskomponente Ost - West im Punkt P

$\epsilon = \xi \cos a + \eta \sin a$: Lotabweichungskomponente in Richtung des Azimutes a

$\xi_0, \eta_0, \epsilon_0$: sinngemäss im Punkt P_0

$\delta = \theta_0 - \theta$: Lotkrümmung

3.2 Das astrogeodätische Nivellement längs Profilen

Bekanntlich erhält man die Geoidhöhendifferenz ΔN zwischen zwei Punkten A und B mit Hilfe der Helmertschen Formel:

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = - \int_A^B \epsilon_0 ds \quad (3.1)$$

wobei, falls ϵ_0 als Funktion des Weges s graphisch dargestellt wird, das Integral der Fläche unter der Kurve $\epsilon_0 = f(s)$ entspricht.

Kennt man in einer Anzahl Zwischenpunkte die Lotabweichungskomponente ϵ_0 (z.B. in einem Meridianprofil nur die Komponente ξ_0), so kann die Kurve $\epsilon_0 = f(s)$ gezeichnet und die Fläche unter der Kurve ausgezählt werden.

Falls die Oberflächenlotabweichungen ϵ benützt werden, muss das Integral

$\Delta N'_{AB} = - \int_A^B \epsilon ds$ um die orthometrische Korrektur E_{AB} vermindert werden {SGK Bd. 20 Seite 5}:

$$\Delta N_{AB} = \Delta N'_{AB} - E_{AB} \quad (3.2)$$

mit

$$g_0 E_{AB} = \int_A^B (g - g_0) dz + h_B (g_0 - \bar{g}_B) - h_A (g_0 - \bar{g}_A) \quad (3.3)$$

wobei

- g : Schwerewert entlang dem Integrationsweg
- g_0 : willkürlich gewählter Schwerewert
- \bar{g} : mittlere Schwerebeschleunigung in der Lotlinie des Punktes A bzw. B

Die Berechnung von E_{AB} erfordert also die Kenntnis von g längs des Profiles sowie die mittleren Schwerewerte längs der Lotlinien aller gesuchten Punkte. Ueber deren Messung bzw. Berechnung verweise ich auf das Beispiel des Gotthardmeridians in {SGK Bd. 20}.

Da die Kurve der Oberflächenlotabweichungen im Gebirge sehr bewegt verläuft, wurden vor allem an den Hängen, wo Extremwerte zu erwarten sind, weitere Punkte hineininterpoliert. Genauere Untersuchungen von Hunziker {SGK PV 1950 - 1953} über die getroffene Wahl solcher Zwischenpunkte zeigten, dass schlecht gewählte Punkte bei einem Stützpunktstand von nur wenigen Kilometern mehr als 1 cm Fehler an ΔN bewirken konnten:

In der Figur 3.2 wurden zwischen den Stützpunkten Nr. 40 (Giubing) und Nr. 41 (Airolo) des Meridians vom Gotthard zwei zusätzlich zu Punkt 40 A interpolierte

Werte einbezogen. Gestrichelt dargestellt ist der genauere Verlauf der Oberflächenlotabweichungen. Die schraffierte Fläche entspricht einer Geoidhöhenänderung von 1.5 cm auf 4.4 km Distanz.

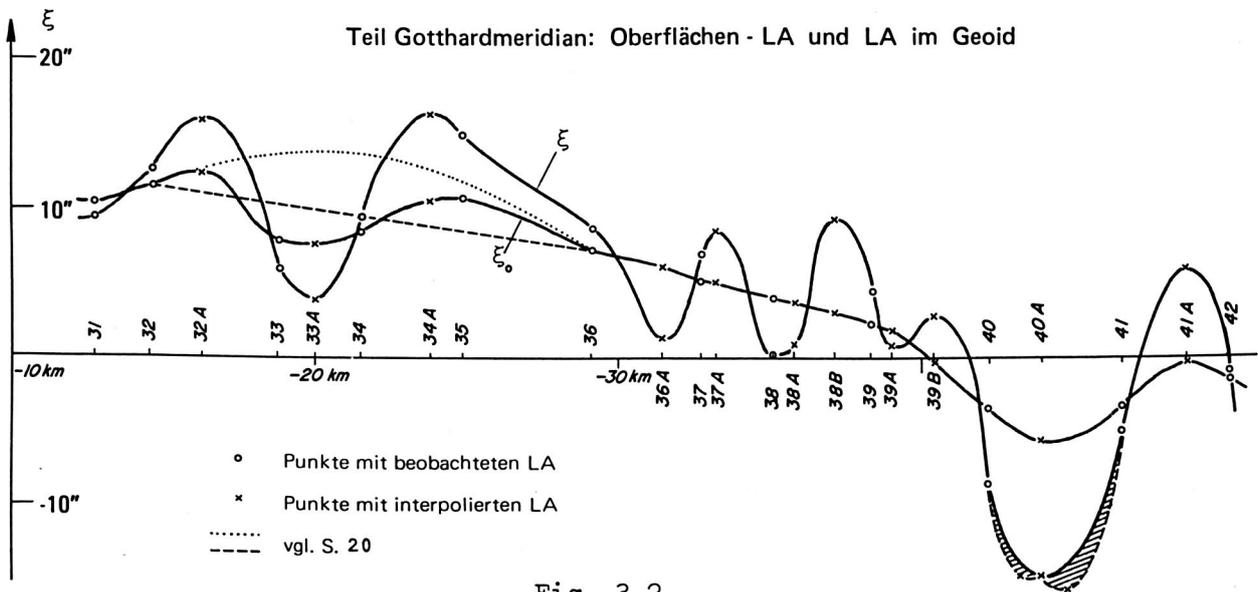


Fig. 3.2

Anstelle der graphischen Integration, bei der die Kurve von Hand durch die Stützpunkte hindurch gelegt wird, kann, wie Helmert {1880, S. 573ff} dargestellt hat, die Kurve stückweise durch Polynom- oder Fourierreihenentwicklungen (mit oder ohne Ueberbestimmung) approximiert und damit analytisch integriert werden.

Der lineare Ansatz ersetzt die Kurve zwischen zwei Punkten durch die Sehne, die Höhendifferenz ergibt sich aus:

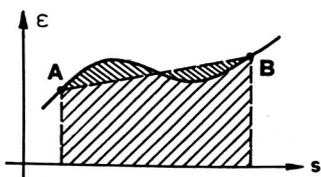


Fig. 3.3

$$\Delta N'_{AB} = -\frac{1}{2} (\epsilon_A + \epsilon_B) \Delta s \quad (3.4)$$

Sie stellt das Integral dann exakt dar, falls die Trapezfläche gleich der Fläche unter der tatsächlichen Kurve ist.

Falls nun, wie im Meridianprofil des Gotthards, die Stützpunkte und interpolierten Punkte so gewählt werden, dass die wellenartige Struktur des Lotabweichungsverlaufes möglichst lückenlos erfasst wird, so pflanzen sich die an sich systematischen Fehler (schraffierte Flächen in der Figur 3.4) praktisch nicht fort, da sie abwechselungsweise positiv und negativ wirken.

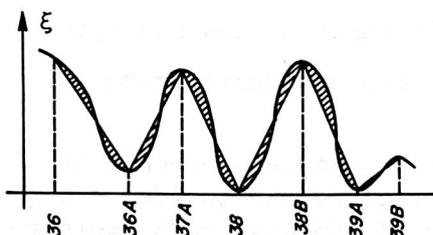


Fig. 3.4

Ersetzt man beispielsweise für den Meridian vom Gotthard das Integral $-\int \epsilon ds$ durch die lineare Approximation $\sum_i \Delta N'_i = \sum_i -\frac{1}{2}(\epsilon_i + \epsilon_{i+1}) \Delta s_i$, so erhält man folgende Maximalfehler:

Grösste Abweichung einer Höhendifferenz zwischen zwei benachbarten Punkten gegenüber der graphischen Integration:

$$\text{Punkt 40 A} - \text{Punkt 41 (Airolo)} : \delta \Delta N' = 3.0 \text{ cm}$$

Grösste Differenz der Geoidhöhen (Ausgangspunkt Nr. 1 Sotteneegg: $N'_1 = 0$) gegenüber der graphischen Integration:

$$\text{Punkt 26 A} : \delta N' = -4.3 \text{ cm}$$

Totale Anzahl Stützpunkte: 111 wovon 57 Punkte interpoliert

Totale Länge des Profils : 186 km

Maximale Geoidundulation : 260 cm (zwischen Punkt 1 und Punkt 19, vgl. auch Fig. 4.16 Seite 35)

In der Figur 3.5 sind die Unterschiede der mit Hilfe der linearen Approximation gerechneten Höhen gegenüber den aus der graphischen Integration resultierenden für alle Profilpunkte aufgetragen. Man sieht, dass sich die Approximationsfehler nicht beliebig weit aufsummieren, da sie doch recht zufällig bald positiv, bald negativ wirken.

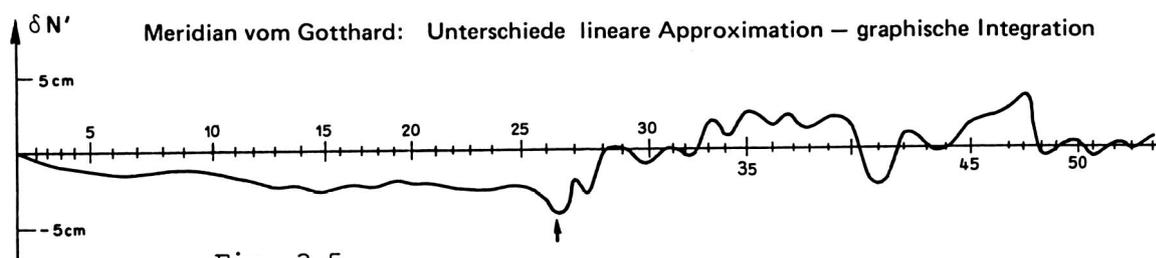


Fig. 3.5

Kennt man in jedem Stützpunkt die Lotkrümmung *), können somit die Lotabweichungen ϵ_0 im Geoid gerechnet werden. Da ihr Verlauf wesentlich ruhiger ist (vgl. Fig. 3.2 für Teil Gotthardmeridian), kann die Dichte der Stützpunkte schon beträchtlich reduziert werden. Die Berechnung der orthometrischen Korrektur (3.3) ist nicht nötig.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, welche Fehler in Funktion des Stützpunkt- abstandes zu erwarten sind, wenn zur Berechnung der Geoidhöhendifferenz die

*) Elmiger {1969} bestimmt die LK als Differenz von aus Massen gerechneten LA an der Oberfläche bzw. im Geoid. Dazu kommt die Freiluftreduktion (für die ξ -Komponente). Er rechnet mit einem mittleren Fehler der LK von etwa $\pm 0''5$. Weitere Methoden der LK-Bestimmung siehe zum Beispiel im Handbuch {Jordan-Eggert-Kneissl, Band V}.

Näherungsformel $-\frac{1}{2}(\epsilon_{0A} + \epsilon_{0B}) \Delta s$ verwendet wird.

Da die Berechnung von Geoidprofilen mittels Oberflächenlotabweichungen und orthometrischer Korrektur nicht weiter verfolgt werden soll, sei abschliessend als Illustration eine Darstellung der mittleren Fehler einiger Geoidhöhen gegeben, wie sie für den Meridian vom Gotthard von Niethammer in {SGK Bd. 20} berechnet wurden:

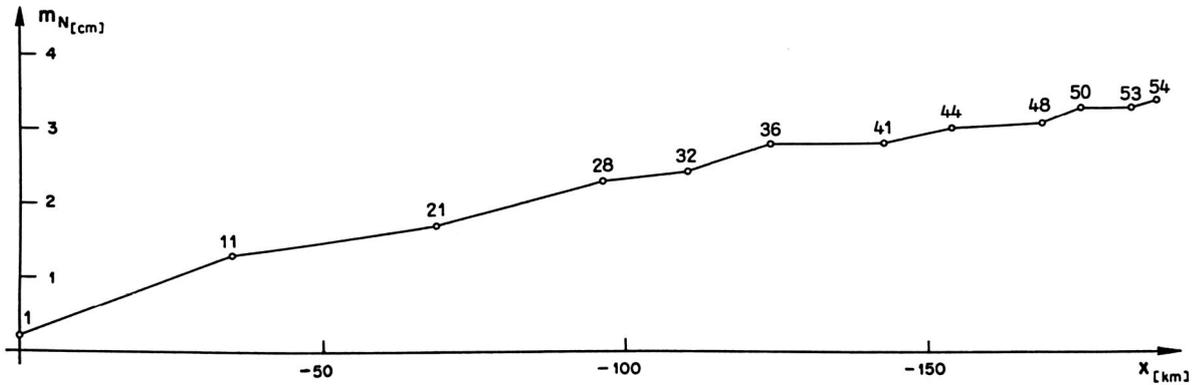


Fig. 3.6

3.3 Das astrogeodätische Flächennivellement

Um zu einer flächenhaften Vorstellung des Geoides zu gelangen, können etwa verschiedene Profile gitterförmig zusammengefügt werden, wobei, ähnlich wie bei Nivellementsnetzen, die Widersprüche in den Knotenpunkten auf die einzelnen Profilstücke verteilt werden müssen {Helmert 1880}.

In den meisten Fällen sind jedoch die Punkte mit bekannten Lotabweichungen beliebig und zum Teil sehr unregelmässig verteilt. Wir erweitern deshalb die Methode des astrogeodätischen Nivellementes auf flächenhaft verteilte Stützpunkte.

Wir ersetzen wieder den Verlauf der Lotabweichungen zwischen zwei (Stütz-)Punkten P_i und P_k durch eine Gerade und erhalten somit für die Geoidhöhendifferenz:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2} (\epsilon_i + \epsilon_k) s_{ik} \quad (3.5)$$

(Da wir uns im folgenden nicht mehr mit Oberflächenlotabweichungen befassen, verzichten wir einfachheitshalber bei den Bezeichnungen für die Lotabweichungen auf den Index "0".)

Die Komponente ϵ der LA in Richtung von $P_i P_k$ erhalten wir aus:

$$\epsilon = \xi \cos a + \eta \sin a \quad (3.6)$$

Vernachlässigen wir die Meridiankonvergenz, können wir setzen:

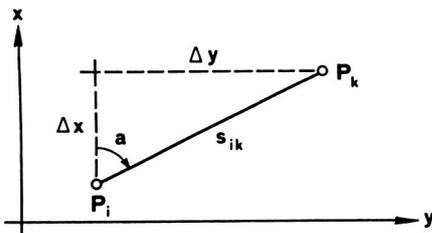


Fig. 3.7

$$\cos a = \frac{x_k - x_i}{s_{ik}} = \frac{\Delta x}{s_{ik}}$$

$$\sin a = \frac{y_k - y_i}{s_{ik}} = \frac{\Delta y}{s_{ik}}$$

somit:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2} \left((\xi_i + \xi_k)(x_k - x_i) + (\eta_i + \eta_k)(y_k - y_i) \right) \quad (3.7)$$

Rechnet man nicht in der Projektion, sondern auf dem Ellipsoid, entspricht der Formel (3.7) folgende Darstellung, wie sie beispielsweise im Handbuch {J.E.K. Band V} hergeleitet ist:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2} \left((\xi_i + \xi_k)(\phi_k - \phi_i)M + (\eta_i + \eta_k)(\lambda_k - \lambda_i)N \cos \phi_m \right) \quad (3.8)$$

mit: M: Meridiankrümmungsradius N: Querkrümmungsradius ϕ_m : mittlere Breite

Wir können nun mit Hilfe der Stützpunkte ein "Höhennetz" aufbauen, in welchem die mit (3.7) gerechneten Höhendifferenzen die Beobachtungen darstellen. Dies führt auf eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit den Geoidhöhen N als Unbekannte und den

$$\text{Beobachtungsgleichungen: } \Delta \bar{N}_{ik} = N_k - N_i$$

$$\text{Verbesserungsgleichungen: } v_{ik} = -\delta N_i + \delta N_k - (\Delta N_{ik} - (N_k^0 - N_i^0))$$

Mindestens eine Geoidhöhe N_0 muss als bekannt vorausgesetzt werden. Da die Beobachtungsgleichungen schon linear sind, würde sich die Einführung von Näherungswerten für N erübrigen.

In Matrixschreibweise:

$$\underline{v} = B \delta \underline{N} - \underline{L}$$

und

$$\delta \underline{N} = (B^T P B)^{-1} B^T P \underline{L} \quad (3.9)$$

wobei P die Gewichtsmatrix der "Beobachtungen" ist.

Der Vorteil dieser Methode liegt eindeutig im einfachen Aufbau; sie ist leicht zu programmieren und benötigt sehr wenig Rechenzeit. Zum Beispiel braucht eine IBM 370-158 für die Berechnung eines Netzes von 50 Punkten inklusive automatischer Netzdefinition (vgl. unten) knapp 3 Sekunden.

Im weiteren können problemlos beliebig viele Festpunkte eingeführt werden.

Auf diese Art wurde das Geoid der Schweiz von Elmiger {1975} bestimmt.

Bei der Anwendung der hier beschriebenen Methode treten nun aber verschiedene Probleme auf:

a) Netzaufbau

Im Gegensatz zu einem wirklichen Höhennetz, wo der Netzaufbau auf Grund fehlertheoretischer Ueberlegungen und möglicher Beobachtungen gemacht werden kann, haben wir in unserem Fall im Prinzip beliebig viele Möglichkeiten, um aus einer gegebenen Stützpunktverteilung ein Netz zu formen:

Man fordert etwa, dass jeder Netzpunkt wenigstens durch eine bestimmte Anzahl von "Beobachtungen" mit den Nachbarpunkten verbunden sein soll.

Oder: Es sollen alle möglichen Verbindungen berücksichtigt werden, deren Längen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Zusätzlich könnte noch eine maximale

Anzahl Verbindungen pro Punkt vorgegeben werden.

Eine weitere Möglichkeit einer Netzdefinition, die allerdings recht schwierig zu programmieren wäre, ist der Aufbau eines Netzes aus möglichst regelmässigen Dreiecken.

Im Kapitel 7 wird der Einfluss des Netzaufbaues auf die resultierenden Geoidhöhen anhand einiger Beispiele untersucht.

b) Gewichte

Da die Längen der Verbindungen im allgemeinen recht stark differieren und die zugrunde gelegten Lotabweichungen mit unterschiedlicher Genauigkeit gemessen wurden, stellt sich die Frage nach der Gewichtung der "Beobachtungen".

Der Fehler einer "Beobachtung" setzt sich zusammen aus den Fehlern der gemessenen und auf das Geoid reduzierten Lotabweichungen sowie aus dem Unterschied der linearen Approximation zum exakten Integral $-\int \epsilon ds$.

Der Anteil der Messfehler wirkt distanzproportional, der zweite wird oft proportional zum Quadrat der Entfernung angenommen ({J.E.K. Bd. V, Seite 183}).

Damit erhält man: $m_{\Delta N}^2 = a^2 s^2 + b^2 s^4$

a, d.h. der mittlere Fehler der Lotabweichungen, ist in der Grössenordnung bekannt, während über b a priori nichts ausgesagt werden kann.

Empirisch kann der Verlauf von $m_{\Delta N}$ für einen bestimmten Geländetyp folgendermassen abgeschätzt werden:

Sind von einer Anzahl Stützpunkte ihre Geoidhöhen ungefähr bekannt, rechnet man für alle möglichen Kombinationen die Höhendifferenzen mit (3.7) und vergleicht diese mit den aus den gegebenen Höhen berechneten Differenzen. Indem nun die quadratischen Mittelwerte der Abweichungen in einzelnen Distanzklassen berechnet werden, erhalten wir ein Bild vom gesuchten Verlauf.

In der Figur 3.8 ist $m_{\Delta N}$ für drei Gebiete dargestellt, nämlich:

- | | | |
|------|---------------------------------|--------------------|
| BO : | Berner Oberland - Netz | (Alpen) |
| MG : | Teil des Meridians vom Gotthard | (Voralpen) |
| PZ : | Parallel von Zürich | (Jura, Mittelland) |

(Das Berner Oberland-Netz umfasst die Punkte, welche von Wunderlin in {SGK Bd.26} publiziert wurden. Sie dienen dem Studium der Bestimmung von Lotabweichungen mit Hilfe gemessener Höhenwinkel.)

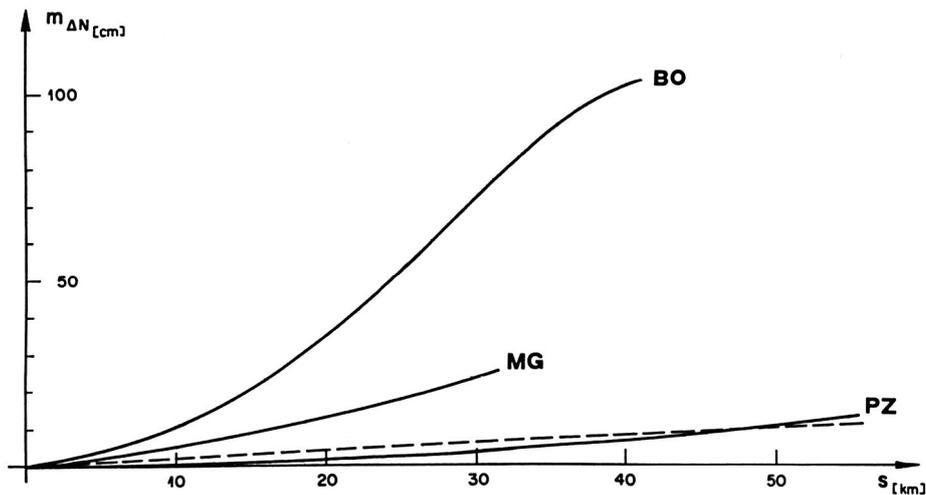


Fig. 3.8

Die Kurven gelten für auf das Geoid reduzierte Lotabweichungen. Die Gerade entspricht dem Anteil, der aus dem Fehler der Lotabweichungen (hier: $m_{\epsilon} = \pm 0''4$) stammt. Wie zu erwarten war, steigt der totale mittlere Fehler der Höhendifferenzen wesentlich stärker an.

Falls nun im zu berechnenden Netz Lotabweichungen mit stark unterschiedlichen Genauigkeiten gemessen wurden, müssten die Gewichte der "Beobachtungen" als Funktion der LA-Fehler und eines für ein Teilgebiet charakteristischen, distanzabhängigen "Approximationsfehlers" gerechnet werden.

Im Abschnitt 7.5 wird der Einfluss der Gewichtswahl auf die resultierenden Geoidhöhen anhand einiger Beispiele untersucht.

c) Korrelationen zwischen den "Beobachtungen"

Die mit Hilfe von (3.7) gerechneten, als "Beobachtungen" in die Ausgleichung eingeführten Höhendifferenzen sind in Wirklichkeit nicht unabhängig voneinander, sondern über die Lotabweichungen algebraisch miteinander korreliert.

Das folgende funktionale Modell vermeidet diese Korrelationen:

Die gemessenen Lotabweichungen werden direkt als Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt. Die Unbekannten sind wie früher die Geoidhöhen der Stationen.

Nun formulieren wir Bedingungen zwischen den Unbekannten und den Beobachtungen:

Unbekannte:	$N = N^0 + \delta N$	Anzahl:	u
Beobachtungen:	$\bar{\xi} = \xi + v_{\xi}$	Anzahl:	je n
	$\bar{\eta} = \eta + v_{\eta}$		

Bedingungen: $N_k - N_i = -\frac{1}{2} ((\bar{\xi}_i + \bar{\xi}_k) \Delta x_{ik} + (\bar{\eta}_i + \bar{\eta}_k) \Delta y_{ik})$ Anzahl: r

damit:

$$-N_k^0 - \delta N_k + N_i^0 + \delta N_i - \frac{\Delta x_{ik}}{2} (\xi_i + v_{\xi_i}) - \frac{\Delta x_{ik}}{2} (\xi_k + v_{\xi_k}) - \frac{\Delta y_{ik}}{2} (\eta_i + v_{\eta_i}) - \frac{\Delta y_{ik}}{2} (\eta_k + v_{\eta_k}) = 0$$

Wir fassen die Koeffizienten in den Matrizen A^T , B, \underline{w} zusammen:

$$A^T_{r, 2n} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots - \frac{\Delta x_{ik}}{2} \dots - \frac{\Delta x_{ik}}{2} \dots - \frac{\Delta y_{ik}}{2} \dots - \frac{\Delta y_{ik}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$B_{r, n} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots + 1 \dots - 1 \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\underline{w}_{r, 1} = \begin{vmatrix} \vdots \\ -\frac{1}{2} ((\xi_i + \xi_k) \Delta x_{ik} + (\eta_i + \eta_k) \Delta y_{ik} - N_k^0 + N_i^0) \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Somit haben wir in Matrixschreibweise die Bedingungsgleichungen:

$$A^T \underline{v} + B \delta \underline{N} + \underline{w} = 0 \tag{3.10}$$

Formell liegt eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten vor.

Die Forderung $[pvv] = \min$ ergibt folgende Normalgleichungen:

$$\begin{vmatrix} A^T_{\epsilon\epsilon} Q_{\epsilon\epsilon} A_{\underline{k}} + B \delta \underline{N} + \underline{w} = 0 \\ B^T_{\underline{k}} = 0 \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

$Q_{\epsilon\epsilon}$ ist die inverse Gewichtsmatrix der Lotabweichungen, meistens wohl als Diagonalmatrix einzuführen.

\underline{k} ist der (uns primär nicht interessierende) Korrelatenvektor.

Mit $R_{rr} = A^T_{\epsilon\epsilon} Q_{\epsilon\epsilon} A$ erhalten wir die Lösung:

$$\underline{\delta N} = - (B^T R^{-1} B)^{-1} B^T R^{-1} \underline{w} \tag{3.12}$$

Es stellt sich nun noch die Frage, wieviele unabhängige Bedingungsgleichungen im Maximum aufgestellt werden können:

R wird singulär, falls die Matrix A^T mehr Zeilen als Spalten hat, d.h. falls $r > 2n$.

Skizzierung des Beweises: Falls $r > 2n$, ist der Rang von A^T und A höchstens $2n$, somit auch derjenige von R. R hat aber r Zeilen und r Spalten, d.h. sein Rang ist kleiner als die Anzahl Zeilen und Spalten.

Die grösstmögliche Anzahl Bedingungsgleichungen ist folglich gleich $2n$. Dies bedeutet, dass jeder Netzknoten durchschnittlich mit 4 Nachbarknoten verbunden werden kann.

Im Minimum muss natürlich auf jeden Punkt eine Verbindung gehen.

Die Matrix R^{-1} entspricht nun der Gewichtsmatrix P in (3.9), wobei aber hier die algebraischen Korrelationen zwischen den fingierten Beobachtungen \underline{w} berücksichtigt sind.

Zusätzlich kann in R der Einfluss der Approximationsfehler angebracht werden.

Der Hauptnachteil der im vorliegenden Abschnitt entwickelten Methode gegenüber dem einfachen Flächennivellement ist der beträchtlich grössere Rechenaufwand, muss doch bei n Stützpunkten eine $2n \times 2n$ - Matrix (R) invertiert werden.

Im Abschnitt 7.5 untersuchen wir den Einfluss der Berücksichtigung der Korrelationen anhand einiger Beispiele.

d) Fehlende Lotabweichungskomponenten

Die Berechnung der "Beobachtungen" (3.7) bzw. der Widersprüche \underline{w} verlangt in jedem Stützpunkt die Kenntnis beider LA-Komponenten.

In vielen Stationen ist aber nur eine Komponente beobachtet worden. Man müsste nun entscheiden, ob solche Stationen fallen gelassen oder die fehlenden Komponenten vorgängig mit einer geeigneten Methode interpoliert werden sollen.

e) Geoidhöhen ausserhalb der Stützpunkte

Die Methode des Flächennivellements liefert nur die Geoidhöhen der Stützpunkte. Um zu einer lückenlosen Flächendarstellung zu gelangen, müsste anschliessend eine Interpolation der Höhen durchgeführt werden.

Eine andere Möglichkeit wäre eine feinere, beispielsweise gitterförmige Interpolation der Lotabweichungen mit anschliessender Höhenbestimmung.

Bsp: {Wolf, 1956}.

f) Approximationsfehler

Wie wir in Figur 3.8 dargestellt haben, können die Fehler, die durch die Approximationsformel (3.7) hervorgerufen werden, mit der Distanz sehr stark anwachsen.

Im Kapitel 4 wird deshalb nach grundsätzlichen Verbesserungen gesucht, die wenn möglich den Einfluss dieser Approximationsfehler herabsetzen sollen.

3.4 Die Darstellung des Geoides durch gewöhnliche Polynome

Die Niveauläche N kann als Polynom n -ten Grades der Koordinaten x und y dargestellt werden:

$$N_n(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} c_{ik} x^i y^k \quad (3.13)$$

Die Koeffizienten c_{ik} werden aus den Lotabweichungen der Stützpunkte mit einer Ausgleichung bestimmt:

$$\xi = - \frac{\partial N}{\partial x} = - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} i c_{ik} x^{i-1} y^k \quad (3.14)$$

$$\eta = - \frac{\partial N}{\partial y} = - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} k c_{ik} x^i y^{k-1}$$

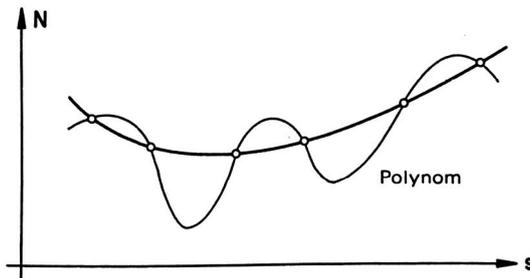
Die Koordinaten x, y müssen vorgängig im allgemeinen mit einem Skalierungsfaktor in die Größenordnung von 1 reduziert werden, da sonst bei Polynomen höheren Grades sehr leicht Zahlen entstehen, deren Exponenten die Kapazität der Rechenanlage übersteigen.

- Vorteile:
- Die Bestimmung der Koeffizienten c_{ik} und die Berechnung der Niveauläche (3.13) ist sehr leicht auf einer Rechenanlage durchzuführen.
 - Mit Hilfe von (3.13) als Beobachtungsgleichungen können in die Ausgleichung beliebig viele Festpunkthöhen eingeführt werden.
 - Da (3.13) die Fläche kontinuierlich darstellt, erübrigt sich eine anschliessende Interpolation der Höhen.
 - Lotabweichungen können an beliebiger Stelle berechnet werden, man hat demzufolge zusätzlich die Möglichkeit der Lotabweichungsinterpolation.

- Es können auch Stützpunkte mit nur einer beobachteten LA-Komponente eingeführt werden.

Nachteile: - Die resultierende Fläche geht im allgemeinen nicht durch die gegebenen Festpunkte.

- Der Grad der Polynome kann nicht beliebig vergrößert werden, da



sonst vorallem in den stützpunktfreien Gebieten unreaale Undulationen auftreten können. Deshalb ist eine komplizierte Fläche nicht befriedigend darzustellen, da die Anpassung zu wenig flexibel ist.

Fig. 3.9

- Eine Erhöhung der Anzahl Punkte mit bekannten Lotabweichungskomponenten bringt folglich nicht zwangsläufig eine Erhöhung der Genauigkeit.
- Extrapolieren führt auf nicht annehmbare Resultate.

Elmiger legt in seiner Dissertation {1969} der Interpolation von Lotabweichungen Polynome zu Grunde, indem er die Differenz aus beobachteten minus aus Massen berechneten Lotabweichungen mit Polynomen (3.14) darstellt.

Falls die diesen reduzierten Lotabweichungen entsprechende Niveaufläche einen glatten Verlauf zeigt, bildet (3.13) - mit Hilfe der in Kapitel 4.3 entwickelten Methode - eine gute Möglichkeit der Geoidbestimmung. Die direkte Darstellung des Geoides mit Polynomen ist jedoch (für die Schweiz) nicht sinnvoll. (Vgl. die numerischen Untersuchungen im Kapitel 7.)

Auf eine allfällig mögliche Anwendung von sog. Spline-Funktionen kann hier nicht eingegangen werden.

4. GRUNDSAETZLICHE VERBESSERUNGEN DER GEOMETRISCHEN METHODEN

Die hauptsächliche Schwierigkeit der astrogeodätischen Geoidbestimmung liegt darin, dass wir eine im allgemeinen kompliziert verlaufende Fläche mit Hilfe weniger Stützpunkte, in denen nur die Flächennormalen gegeben sind, darstellen müssen.

In den folgenden Abschnitten entwickeln wir nun drei verschiedene Methoden, die alle als zusätzliche Information vorhandene, digitalisierte Geländedaten, im folgenden "digitales Geländemodell" genannt, in die Geoidbestimmung einführen.

Im Abschnitt 4.1 berechnen wir in den Stützpunkten die Ableitungen der Lotabweichungskomponenten nach x und y aus Massen und versuchen damit, den LA-Verlauf zwischen den Stützpunkten besser zu erfassen.

Im Abschnitt 4.2 wird die sichtbare Topographie dazu benützt, den tatsächlichen LA-Verlauf und damit das daraus resultierende Geoid zu glätten.

Indem wir den wohlbekannten Satz von Bruns auf das durch das digitale Geländemodell definierte Störpotential anwenden, können wir uns, wie im Abschnitt 4.3 gezeigt, im wesentlichen auf die Bestimmung eines - beträchtlich ruhiger verlaufendes - Cogeoides beschränken.

Zur Verbesserung der topographischen Reduktion der Lotabweichungen benützen wir - anstelle der üblichen isostatischen Modelle - den Verlauf der (vorallem seismisch bestimmten) Mohorovičić - Diskontinuität.

4.1 Berücksichtigung der 1. Ableitungen der Lotabweichungen

Wie wir im Abschnitt 3.2 ausgeführt haben, ersetzt die Formel $\Delta N = -\frac{1}{2}(\epsilon_i + \epsilon_k) \Delta s$ die Kurve der Lotabweichungen zwischen den Punkten P_i und P_k durch die Sehne.

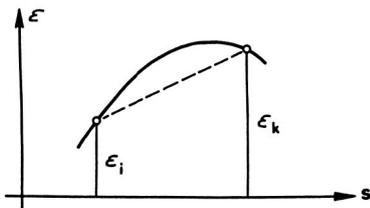


Fig. 4.1

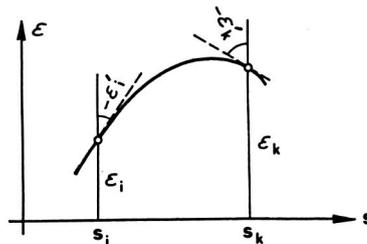


Fig. 4.2

Falls nun die Ableitungen der Lotabweichungen in P_i und P_k nach s bekannt sind, kann die Kurve durch ein Polynom 3. Grades approximiert werden:

$$\epsilon = a s^3 + b s^2 + c s + d \quad (4.1)$$

Zur Bestimmung der vier Koeffizienten a, b, c, d haben wir die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= a s_i^3 + b s_i^2 + c s_i + d \\ \epsilon_k &= a s_k^3 + b s_k^2 + c s_k + d \\ \epsilon_i' &= \frac{d\epsilon_i}{ds} = 3a s_i^2 + 2b s_i + c \\ \epsilon_k' &= \frac{d\epsilon_k}{ds} = 3a s_k^2 + 2b s_k + c \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Höhendifferenz ΔN erhalten wir aus:

$$\Delta N = - \int_{s_i}^{s_k} (a s^3 + b s^2 + c s + d) ds \quad (4.3)$$

Berechnen wir die Koeffizienten a, b, c, d mit Hilfe von (4.2) und setzen sie in (4.3) ein, erhalten wir:

$$\Delta N = - \frac{\Delta s}{2} (\epsilon_i + \epsilon_k) - \frac{\Delta s^2}{12} (\epsilon_i' - \epsilon_k') \quad (4.4)$$

Mit $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ und $\epsilon = \xi \cos a + \eta \sin a$ erhalten wir für beliebige Richtungen:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{d\epsilon}{ds} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \cos a + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \cos a + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{ds} \sin a + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{ds} \sin a \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos^2 a + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos a \sin a + \frac{\partial \eta}{\partial y} \sin^2 a \\ \epsilon' &= \frac{1}{\Delta s^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \Delta y^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die 4 Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ können für jeden Punkt numerisch berechnet werden, indem man die Lotabweichungskomponenten für den Punkt selbst, sowie für zwei Nachbarnpunkte aus Massen rechnet:

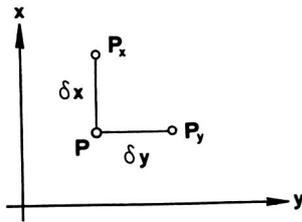


Fig. 4.3

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \approx \frac{\xi_{P_x} - \xi_P}{\delta x} \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} \approx \frac{\xi_{P_y} - \xi_P}{\delta y}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{\eta_{P_x} - \eta_P}{\delta x} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} \approx \frac{\eta_{P_y} - \eta_P}{\delta y}$$

Theoretisch sollte dabei die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

erfüllt sein. Tatsächlich zeigen sich kleine Unterschiede infolge der Endlichkeit der Intervalle δx und δy .

Im Testfeld des Berner Oberlandes führten wir mit dieser Erweiterung der Höhendifferenzformel (4.4) verschiedene Untersuchungen durch.

Die Erwartungen wurden aber bei weitem nicht erfüllt; es zeigten sich keine wesentlichen Verbesserungen gegenüber dem einfachen Ansatz, weder hinsichtlich des mittleren Fehlers einer Höhendifferenz (berechnet wie auf Seite 12 unten angegeben), noch in den Resultaten der Ausgleichung.

Dafür gibt es vorallem zwei Gründe:

1. Die Quadereinteilung der Topographie bewirkt eine Verfälschung der Differentialquotienten.
2. Die Kurve 3. Grades wird vorallem durch die beiden Tangentenrichtungen definiert. Bei grossen Aenderungen der Tangentenrichtung kann nun die Kurve 3. Grades stark vom tatsächlichen Verlauf der Lotabweichungen differieren, stärker noch als die einfache lineare Approximation. In Figur 3.2 Seite 7 sind die Kurve 3. Grades und die lineare Approximation zwischen zwei Punkten des Gotthardprofils mit ca. 15 km Abstand (Punkte 32 und 36) gezeichnet. Man vergleiche sie mit dem tatsächlichen Lotabweichungsverlauf zwischen den beiden Punkten.

Im weiteren stellt die Berechnung der Lotabweichungsableitungen einen beträchtlichen Mehraufwand dar.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich die Berücksichtigung der Lotabweichungsableitungen als ein untaugliches Mittel erwiesen hat.

4.2 Glättung des Geoides

Das Geoid kann für ein bestimmtes Gebiet verschieden detailliert dargestellt werden. Schürer unterscheidet in {1961} folgende fünf Näherungslösungen dieser Aufgabe:

1. Näherung - Ellipsoid
2. " - Undulation von ungefähr 100 m Amplitude
3. " - Undulationen von 1 - 2 m Amplitude, hervorgerufen durch Gebirgszüge (Bsp. Jura, nördl. und südl. Alpenwall) und Unterschiede in der Mächtigkeit der Kruste
4. " - Undulationen von ungefähr 1 - 10 cm Amplitude, verursacht durch einzelne Berge und Bergketten
5. " - Undulationen, die durch einzelne Felsen, Flussläufe und Hügel entstehen und bis etwa 0.1 mm Amplitude besitzen

Die 5. Näherung stellt das tatsächliche Geoid in all seinen Kleinformen dar. Der Verlauf der Flächennormalen ist aber sehr uneinheitlich und bewegt. Folglich kann die dazugehörige Fläche, wie wir im Kapitel 3 ausgeführt haben, schlecht bestimmt werden.

Es stellt sich nun die Frage, ob wir den Verlauf der Lotabweichungen glätten können, indem wir sie beispielsweise vom Einfluss der näheren Topographie (5 bis 10 km) befreien: Die dazugehörige, leicht generalisierte Fläche entspräche etwa der 3. bis z.T. der 4. Näherung obiger Zusammenstellung. Der Verlauf der Flächennormalen würde ruhiger, die Fläche selbst also einfacher zu bestimmen.

Die Generalisierung der Lotabweichungen geschieht rechnerisch:

Von den gemessenen (auf das Geoid reduzierten) Lotabweichungen wird der Einfluss der sichtbaren Topographie innerhalb eines bestimmten Umkreises subtrahiert.

Kleines Modellbeispiel

3 Prismen, Länge 20 km, Breite 4 km, Höhe 1600 m, Laufpunkt 800 m unterhalb der Basis. (Ein Prisma entspricht mit seinen Massen ungefähr der Niesenkette im Berner Oberland).



Fig. 4.4

In Figur 4.5 ist der Verlauf der rohen Lotabweichungen sowie der um den Einfluss der Topographie innerhalb von 3 bzw. 5 km reduzierten LA dargestellt.

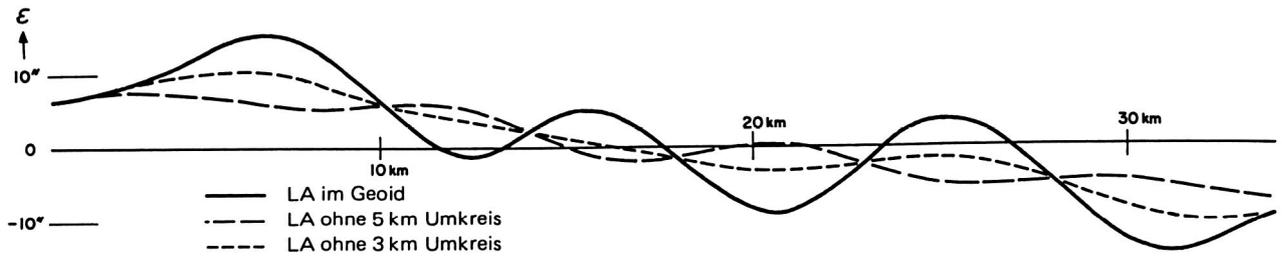


Fig. 4.5

Figur 4.6 zeigt das dazugehörige Geoid sowie die für 3 bzw. 5 km Umkreis generalisierten Flächen.

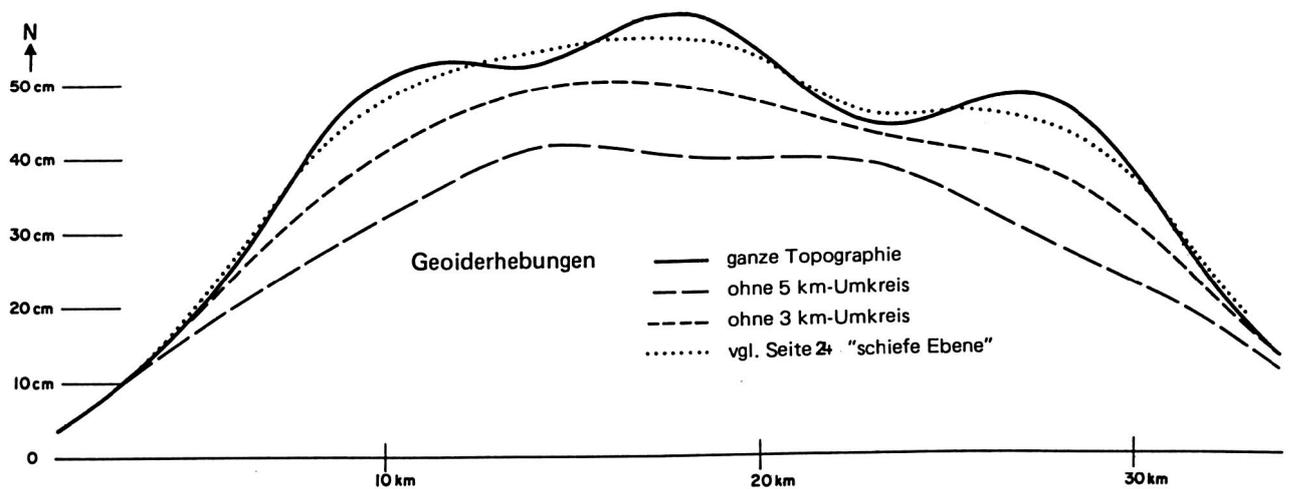


Fig. 4.6

In diesem Modellbeispiel werden offensichtlich die von den einzelnen Ketten hervorgerufenen Undulationen (Amplitude von 5 - 10 cm) bereits durch Abspaltung der Topographie bis 3 km wegfiltriert.

Es fällt jedoch auf, dass die generalisierte Fläche durchwegs unterhalb der ursprünglichen verläuft. Die Differenz wird mit zunehmender Generalisierung grösser. Dieser Effekt tritt auf, weil innerhalb des Umkreises in Richtung Massivmitte im allgemeinen mehr Masse eliminiert wird als in Gegenrichtung. ("Indirekter Effekt" der eliminierten Massen).

Die generalisierten LA werden also im Durchschnitt betragsmässig zu klein. Dies soll noch anhand einiger Punkte des Berner Oberland Netzes illustriert werden. In Figur 4.7 sind die Lotabweichungen im Geoid sowie ihre Generalisierung für 5 bzw. 10 km Umkreis dargestellt. Der ruhigere Verlauf der 5- insbesondere der

10-km LA ist offensichtlich, ebenso aber auch die Tendenz, dass die generalisierten LA betragsmässig kleiner werden.

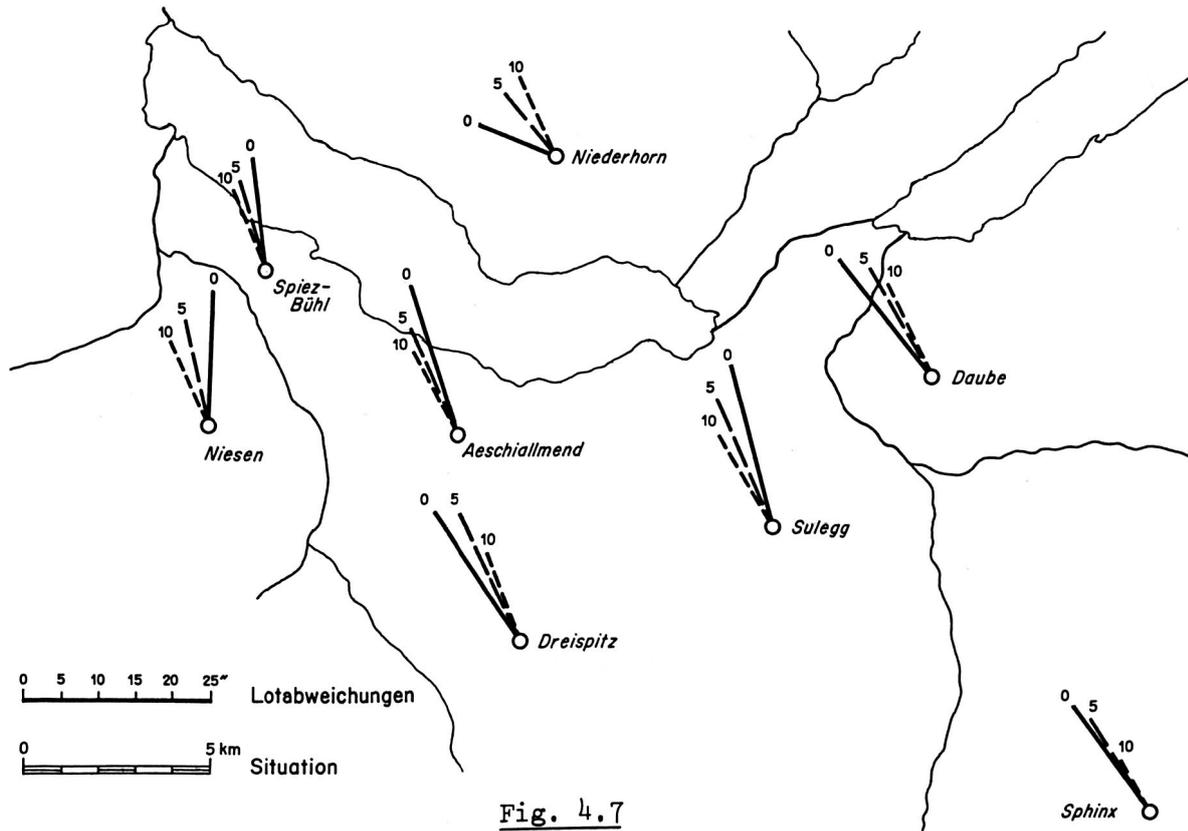


Fig. 4.7

Berechnet man mit Hilfe des Flächennivellementes die Geoidhöhen der Punkte im Berner Oberland, erhält man, je nach Generalisierungsgrad, folgende Höhendifferenz zwischen dem höchsten (Sphinx) und dem tiefsten Punkt (Spiez-Bühl):

Generalisierungsgrad	ΔN_{\max}	(pvv)
-	225 cm	22.5
bis 3 km	210 cm	12.2
bis 5 km	190 cm	5.6
bis 10 km	143 cm	5.5

Die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen der als Beobachtungen eingeführten Höhendifferenzen $-\frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \Delta s$ ergibt eine qualitative Beurteilung des Generalisierungsgrades der Fläche.

Wie zu erwarten war, nimmt dieser Wert (Kolonne 3) mit zunehmendem Generalisierungsgrad ab. Desgleichen auch, wie oben schon ausgeführt, die Geoid-Höhendifferenz zwischen den beiden Netzpunkten.

Es ist klar, dass wir eine systematische Verfälschung der Fläche in diesen Grössenordnungen nicht zulassen können.

Wir prüfen nun, ob dem durch geeignete Massnahmen begegnet werden kann:

Falls man innerhalb des Umkreises nur den Einfluss der Topographie bezüglich einer dem Gelände bestangepassten schiefen Ebene berechnet und von den gemessenen Lotabweichungen eliminiert, könnte dem systematischen Massendefizit entgegen gewirkt werden. Vgl. Fig. 4.8.

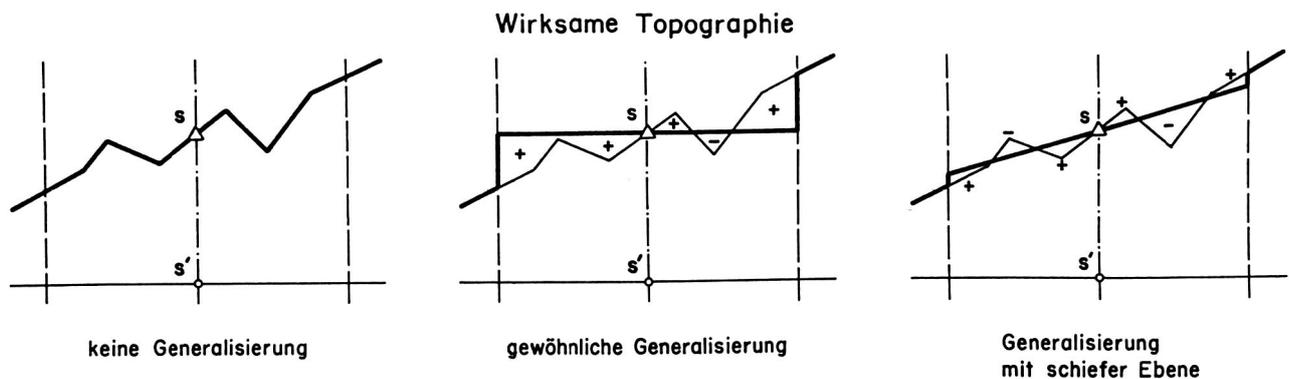


Fig. 4.8

In der Figur 4.6 S. 22 ist für das Modellbeispiel das generalisierte Geoid (punktirierte Linie) dargestellt unter Berücksichtigung der schiefen Ebene bis 5 km.

Die Berechnung des Berner Oberlandnetzes (wie auch des Modellbeispiels) zeigt nun tatsächlich ein weitgehendes Verschwinden der systematischen Differenzen. Andererseits nehmen aber die Verbesserungen der "Beobachtungen" nahezu wieder dieselben Beträge an wie ohne Generalisierung.

Mit diesem Verfahren kann das Geoid nicht wesentlich genauer bestimmt werden als mit den ursprünglichen Lotabweichungen. Unbefriedigend ist weiter die Schwierigkeit, quantitative Angaben über die Grösse der Generalisierung zu machen.

Im übrigen ist für die niedere Geodäsie, wie wir in der Einleitung erläutert haben, gerade die Kenntnis der Feinstruktur (4. Näherung) des Geoides von Bedeutung.

Die Resultate dieser Untersuchungen bestätigen jedoch die Tatsache, dass der Verlauf der Lotabweichungen beträchtlich ruhiger wird, wenn man den Einfluss der näheren Topographie eliminiert. Dem wird nun auch im nächsten Abschnitt Rechnung getragen.

4.3 Cogeoid und Satz von Bruns

4.3.1 Prinzip

Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Schwerepotential W und dem Potential U der Normalschwere bezeichnet man üblicherweise als Störpotential T :

$$T = W - U \quad (4.6)$$

Wir spalten nun T in zwei Teile auf:

$$T = T_M + T_S \quad (4.7)$$

T_M ist das Störpotential, das von den Massen herrührt, die von einem digitalen Geländemodell erfasst werden. (Dieses Massenmodell kann aus verschiedenen Dichten zusammengesetzt sein wie auch isostatische Kompensationsmassen und bekannte Störkörper enthalten).

T_S ist das Störpotential, das von allen übrigen, nicht im Modell enthaltenen Störmassen, d.h. von Modellfehlern gegenüber der tatsächlichen Erde, herrührt. Diese Modellfehler äussern sich dadurch, dass die mit Hilfe des Modells berechneten Lotabweichungen nicht mit den tatsächlichen übereinstimmen. (Von den Messfehlern der LA muss hier abgesehen werden. Ihre Filterung siehe Kapitel 6).

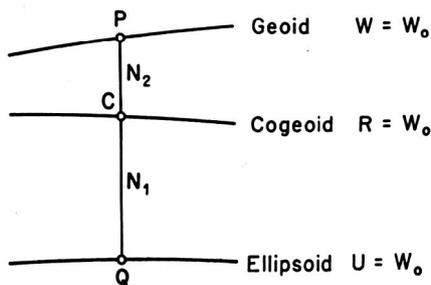


Fig. 4.9

In Analogie zur gravimetrischen Geodäsie nennen wir die Fläche

$$R = U + T_S = W_0 = \text{konstant}$$

Cogeoid. Ihre Normalenrichtungen werden durch die sogenannten reduzierten Lotabweichungen $\Delta\epsilon$ dargestellt:

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\text{gemessen}} - \epsilon_{\text{Modell}} \quad (4.8)$$

Sie werden folglich berechnet, indem man die tatsächlichen Lotabweichungen vom Einfluss der Modellmassen befreit.

Das Cogeoid wird mit Hilfe der reduzierten Lotabweichungen mit einer der im Kapitel 3 bzw. 6 beschriebenen Methoden bestimmt.

Indem wir auf das Störpotential T_M den Satz von Bruns anwenden, erhalten wir den uns noch fehlenden Höhenunterschied N_2 zwischen Cogeoid und Geoid:

$$\begin{aligned} R_P &= R_C + \frac{dR}{dn} \cdot N_2 = R_C - g \cdot N_2 \\ W_P &= R_P + T_M = R_C + \frac{dR}{dn} \cdot N_2 + T_M \\ &= R_C - g \cdot N_2 + T_M \end{aligned}$$

Mit $W_P = R_C = W_0$ erhalten wir: $0 = -g \cdot N_2 + T_M$

Damit:

$$\underline{N_2} = \frac{T_M}{g} \quad (\text{Satz von Bruns}) \quad (4.9)$$

g ist derselbe mittlere Schwerewert, wie er zur Berechnung der Lotabweichungen aus den Modellmassen verwendet wird.

Somit erhalten wir:

$$N_{\text{Geoid}} = N_{\text{Cogeoid}} + \frac{\text{Störpotential } T_M}{g}$$

 (4.10)

4.3.2 Die Berechnung des Potentials und der reduzierten LA

Im folgenden Abschnitt stellen wir die Formeln zusammen, mit denen wir das Potential der Modellmassen berechnen.

Da im wesentlichen das digitale Geländemodell von Elmiger benützt wird, basieren die Berechnungen des Potentials auf den Formeln für Massenpunkt, Massenstrecke und Quader, in Analogie zu der Berechnungsart von Lotabweichungen aus Massen, wie sie in {Elmiger, 1969} entwickelt wurde. Da in jener Publikation die Formeln für die horizontale Anziehung von Massen angegeben und das Geländemodell genau beschrieben ist, verzichten wir hier auf deren Darstellung.

Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

- h : Terreinhöhe
- ρ : Dichte
- G : Gravitationskonstante
- E : Erdkrümmung: $E = \frac{g^2}{2R}$
- ΔF : Fläche eines Rasterelementes des digitalen Geländemodells

a) Formeln für das Potential T

Allgemein

$$T = G \iiint \rho \frac{dV}{r}$$

Massenpunkt

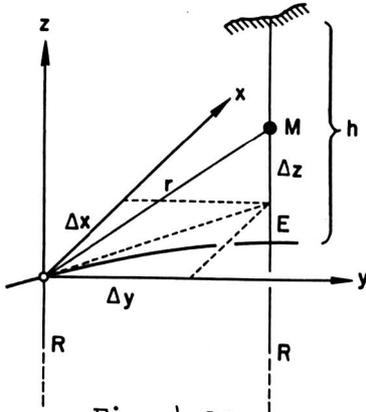


Fig. 4.10

$$\Delta z \approx \frac{h}{2} - E$$

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$T = G \rho \Delta F \frac{h}{r} \quad (4.11)$$

Massenstrecke

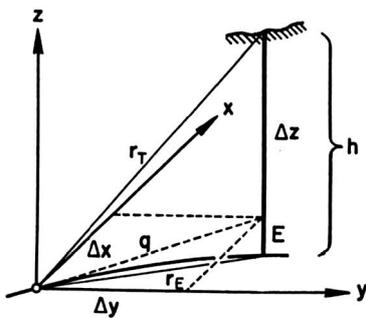


Fig. 4.11

$$q^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$r_T^2 = q^2 + (h - E)^2$$

$$r_E^2 = q^2 + E^2$$

$$T = G \rho \Delta F \ln \frac{r_T + h - E}{r_E - E} \quad (4.12)$$

Quader

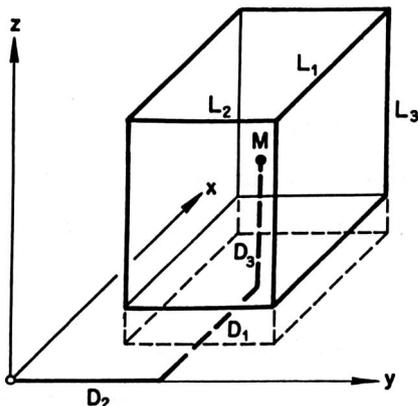


Fig. 4.12

L_1, L_2, L_3 : Dimensionen des Quaders

D_1, D_2, D_3 : Koordinatendifferenzen zum Quadermittelpunkt

Da die Quaderformel nur für nahe Massenelemente verwendet wird, vernachlässigen wir die Erdkrümmung.

Die Herleitung sowie eine ausführliche Darstellung findet man z.B. in {Mac Millan 1958}.

Für die Programmierung der Formel kann aber bei Verwendung von Schleifenanweisungen für die zyklischen Vertauschungen eine wesentlich gedrängtere Form gefunden werden:

Als Beispiel sei eine in BASIC geschriebene Möglichkeit angegeben:

```
110 REM          POTENTIAL T EINES QUADERS
120 REM          L1,L2,L3: DIMENSIONEN DES QUADERS
130 REM          D1,D2,D3: KOORD.DIFFERENZ ZUR QUADERMITTE
140 G0=6.67E-08
150 R0=2.67
160 E0=1E-90
170 A[1]=A[4]=L1/2
180 A[2]=A[5]=L2/2
190 A[3]=L3/2
200 X[1]=X[4]=-D1
210 X[2]=X[5]=-D2
220 X[3]=-D3
230 V1=1
240 T0=0
250 FOR K=1 TO 3
260 FOR I=1 TO 4
270 Z2=(X[K]+A[K])*(X[K+1]+A[K+1])
280 IF Z2=0 THEN 350
290 R1=SQR((X[K]+A[K])^2+(X[K+1]+A[K+1])^2+(X[K+2]+A[K+2])^2)
300 R2=SQR((X[K]+A[K])^2+(X[K+1]+A[K+1])^2+(X[K+2]-A[K+2])^2)
310 P1=V1*Z2*LOG((R1+R2+2*A[K+2]+E0)/(R1+R2-2*A[K+2]+E0))
320 P2=V1/2*(X[K+2]+A[K+2])^2*ATN(Z2/((X[K+2]+A[K+2])*R1+E0))
330 P3=V1/2*(X[K+2]-A[K+2])^2*ATN(Z2/((X[K+2]-A[K+2])*R2+E0))
340 T0=T0+P1-P2+P3
350 A[K]=-A[K]
360 A[K+1]=-(-1)^I*A[K+1]
370 V1=(-1)^I*V1
380 NEXT I
390 NEXT K
400 T=G0*R0*T0
```

Im allgemeinen wird der Aufpunkt in der Verlängerung der Quadergrundfläche (Meereshöhe) liegen: L_3 ist gleich h (Terrainhöhe) und D_3 gleich $\frac{h}{2}$.

b) Reduzierte Lotabweichungen

Zur Berechnung des Cogeoides brauchen wir, wie wir im Abschnitt 4.3.1 erläutert haben, dessen Normalenrichtungen, mithin also die vom Einfluss der Topographie, oder allgemeiner: vom Einfluss der Modellmassen befreiten Lotabweichungen im Cogeoid.

Mit ϵ^{oben} bezeichnen wir die Lotabweichungen an der Oberfläche, mit ϵ^{unten} die Lotabweichungen auf dem Geoid bzw. in der Höhe des Cogeoides. (Der Uebergang vom Geoid zum Cogeoid ist vernachlässigbar klein: Unter der Annahme einer totalen

Lotkrümmung von 20" (Station Eigerwand, H = 2866 m ü.M.), einer Differenz Geoid-Cogeoid von 10 m und einer kreisbogenförmigen Lotlinie ergäbe sich eine Korrektur von unter 0"1).

Mit ϵ_{mess} bezeichnen wir gemessene (bzw. gemessene und rechnerisch auf das Geoid reduzierte) Lotabweichungen und mit ϵ_{rech} aus dem Modell berechnete Lotabweichungen.

$\delta\epsilon = - 0"00017 H_{(m)} \cdot \sin 2\phi$ sei die "Freiluftreduktion" (nur in ξ - Richtung, vgl. {Heiskanen/Moritz 1967}).

LK sei die totale Lotkrümmung abzüglich der Freiluftreduktion.

Es gilt:

$$\epsilon_{\text{mess}}^{\text{unten}} = \epsilon_{\text{mess}}^{\text{oben}} + \text{LK} + \delta\epsilon \quad (4.13)$$

$$\text{LK} = \epsilon_{\text{rech}}^{\text{unten}} - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{oben}} \quad (4.14)$$

Wir wollen die Lotkrümmung also, in Anlehnung an {Elmiger 1969}, aus Differenzen von gerechneten LA "unten" minus "oben" bestimmen. Faktisch ist dies die einzige Möglichkeit, da uns im allgemeinen keine Schweremessungen in der näheren Umgebung der Stationen zur Verfügung stehen.

Die reduzierten LA erhalten wir (vgl. Formel 4.8) aus:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon^{\text{unten}} &= \epsilon_{\text{mess}}^{\text{unten}} - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{unten}} \\ &= \epsilon_{\text{mess}}^{\text{oben}} + (\epsilon_{\text{rech}}^{\text{unten}} - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{oben}}) + \delta\epsilon - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{unten}} \\ \Delta\epsilon^{\text{unten}} &= \epsilon_{\text{mess}}^{\text{oben}} - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{oben}} + \delta\epsilon \end{aligned} \quad (4.15)$$

Es genügt also, zur Bestimmung der $\Delta\epsilon$ nur die Oberflächenlotabweichungen zu berechnen.

Da die Potentiale desselben Massenmodells für die entsprechenden Punkte "unten" berechnet werden müssen, wird die Problematik der Lotkrümmungsbestimmung nur scheinbar umgangen. Einflüsse, die zu Fehlern in den LK führen würden, wirken sich direkt auf die reduzierten Lotabweichungen aus. Der mittlere Fehler dürfte aber {Elmiger 1969, S. 61} unter 0"5 liegen.

c) Verwendete Rechenprogramme

Die Berechnung der topographischen und topographisch-isostatischen Lotabweichungen wurde mit Hilfe des von Dr. Elmiger erstellten Programmes LASRM auf der CDC-Rechenanlage der ETH Zürich durchgeführt. Es diente gleichzeitig als Grundlage für ein neu zu erstellendes Programm zur Berechnung der Potentiale. Im wesentlichen wurden dabei nur die Subroutinen für Massenpunkt, Massenstrecke und Quader ausgetauscht, während dem die Organisation des Programmes beibehalten wurde. Dies garantierte die absolute Gleichbehandlung des digitalen Massenmodelles für die Bestimmung sowohl der Lotabweichungen wie auch der Potentiale.

Allerdings zeigte es sich, dass zur Berechnung der Potentiale die Höhen der näheren Stationsumgebung, die bisher für jeden Punkt gesondert aus der Karte herausgelesen werden mussten (vgl. {Elmiger 1969}), vernachlässigt d.h. durch die im Geländemodell enthaltene mittlere Höhe ersetzt werden dürfen. Dies bedeutet, dass bei bekannter, d.h. interpolierter Cogeoidhöhe eines Neupunktes seine Geoidhöhe rein rechnerisch, ohne zusätzliche Höhenablesungen, bestimmt werden kann.

4.3.3 Besonderheiten der Methode

a) Vergleich mit der gravimetrischen Geoidbestimmung

In der folgenden Tabelle werden die einzelnen Schritte den entsprechenden Schritten der gravimetrischen Geoidbestimmung gegenübergestellt:

	Schritt	gravimetrische Methode	geometrische Methode
1	Messung an der Oberfläche	$g_{\text{mess}}^{\text{oben}}$	$\epsilon_{\text{mess}}^{\text{oben}}$
2	Topographie entfernen Isostat. Reduktionen Geologische Korrekturen usw.	$g_{\text{red}}^{\text{oben}} = g_{\text{mess}}^{\text{oben}} - g_{\text{rech}}^{\text{oben}}$	$\Delta\epsilon^{\text{oben}} = \epsilon_{\text{mess}}^{\text{oben}} - \epsilon_{\text{rech}}^{\text{oben}}$
3	Freiluftreduktion	$g_{\text{red}}^{\text{unten}} = g_{\text{red}}^{\text{oben}} + F$	$\Delta\epsilon^{\text{unten}} = \Delta\epsilon^{\text{oben}} + \delta\epsilon$
4	Vergleich mit Normalwert	$\Delta g = g_{\text{red}}^{\text{unten}} - \gamma$	entfällt (Normalwert im Cogeoid ≈ 0)
5	Cogeoidbestimmung	$N_1 = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}} \int \Delta g S(\psi) d\sigma$ (Stokes)	siehe Kapitel 3 und 6
6	Indirekter Effekt	$N_2 = \frac{T}{g} M$	
7	Geoid	$N = N_1 + N_2$	

Der Vergleich zeigt, dass beide Methoden (unter der Voraussetzung der Verwendung

desselben Referenzellipsoides und Massenmodelles) im Schritt 5 auf die gleiche Fläche führen, die in der gravimetrischen Geodäsie Cogeoid genannt wird. Wir haben also diesen Begriff in 4.3.1 zu recht verwendet.

b) Einzugsgebiet

Oft werden zur Berechnung der Lotabweichungen aus Massen die Einzugsgebiete für jeden Stützpunkt gesondert festgelegt; meistens nimmt man zur Abgrenzung Kreise mit einem bestimmten Radius.

Falls nun eine Masse gerade ausserhalb des Einzugsgebietes eines Punktes liegt, für den Nachbarpunkt jedoch schon innerhalb seines Gebietes, können dadurch (vgl. auch {Heitz, 1968 S. 11}) Fehler in den reduzierten Lotabweichungen auftreten.

Ihr Einfluss bei der Bestimmung des Geoides wird nun durch die entsprechenden Fehler der berechneten Potentiale nicht reduziert, sondern im Gegenteil verstärkt, wie folgendes kleines Modellbeispiel zeigt:

Die Masse M liege im Einzugsgebiet des Punktes A , nicht aber in demjenigen des Punktes B .

ϵ sei die von M verursachte Lotabweichung, T das Störpotential, ϵ_R die berechnete Lotabweichung, T_R das berechnete Störpotential.

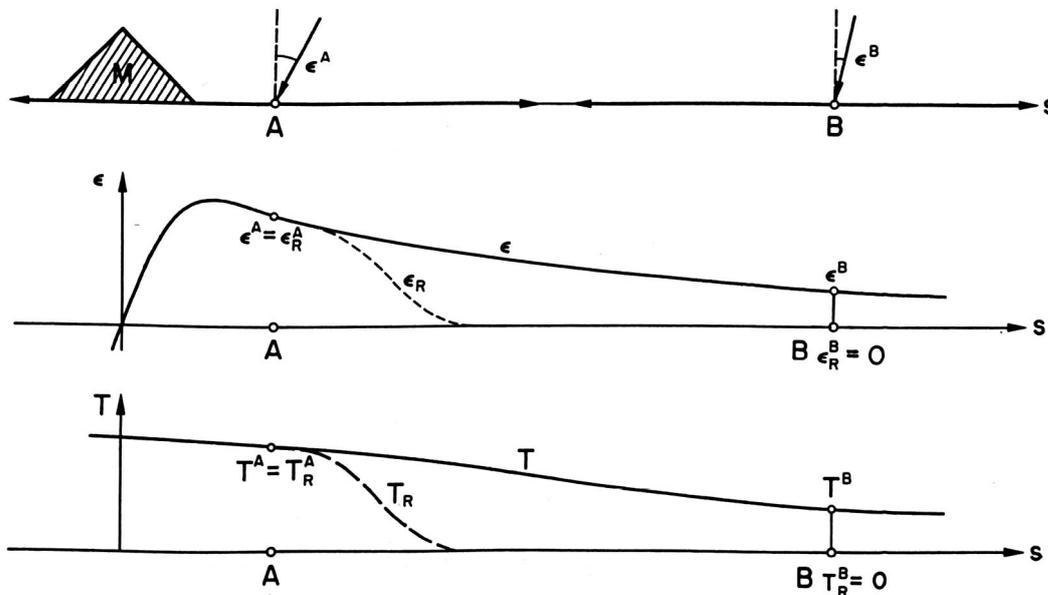


Fig. 4,13

Die Geoidhöhendifferenz ΔN_R zwischen A und B erhalten wir mit (4.10):

$$\Delta N_R = - \int_A^B (\epsilon - \epsilon_R) ds + \frac{T_R^B - T_R^A}{g}$$

und mit $T_R^B = 0$:

$$\Delta N_R = - \int_A^B \Delta \epsilon ds - \frac{T_R^A}{g}$$

Die Sollhöhendifferenz ΔN ist gegeben durch:

$$\Delta N = \frac{T^B - T^A}{g} = \frac{T^B}{g} - \frac{T^A}{g} \quad \text{da } T^A = T_R^A$$

Der Fehler, der durch individuelle Einzugsgebiete entsteht, beträgt folglich:

$$\Delta N - \Delta N_R = \frac{T^B}{g} - \frac{T^A}{g} + \int_A^B \Delta \epsilon ds + \frac{T_R^A}{g} = \frac{T^B}{g} + \int_A^B \Delta \epsilon ds$$

Er bewirkt also eine zu starke Absenkung des Geoides von der Masse weg.

Wir wählen deshalb ein gemeinsames Einzugsgebiet für alle Stützpunkte.

Welchen Einfluss auf die Geoidbestimmung haben Massen ausserhalb des gemeinsamen Einzugsgebietes?



Fig. 4.14

$$\epsilon_R^A = \epsilon_R^B = 0; \quad T_R^A = T_R^B = 0$$

$$\Delta N_R = \frac{T_R^B - T_R^A}{g} - \int_A^B (\epsilon - \epsilon_R) ds = 0 - \int_A^B (\epsilon - 0) ds = - \int_A^B \epsilon ds = \Delta N$$

Massen ausserhalb des gemeinsamen Einzugsgebietes bewirken also keine Fehler. Wird aber das Einzugsgebiet zu klein gewählt, erhalten wir unter Umständen ein unruhigeres Cogeoid, das damit schwieriger zu bestimmen ist.

Das von uns verwendete Gebiet (Modell Elmiger) erstreckt sich über rund 400 x 500 km. Es ist so gewählt, dass jeder Stützpunkt mindestens 70 km vom Rand entfernt im Innern liegt.

c) Vorteile der Methode

Falls die Geoidundulationen nicht nur zum Zwecke eher qualitativer Interpretationen, sondern auch z.B. für Distanzreduktionen auf das Referenzellipsoid benötigt werden, verlangt man die Kenntnis der Geoidhöhen in jedem beliebigen Punkt. Unabhängig von der gewählten Methode der Geoidbestimmung braucht man also eine kontinuierliche Darstellung des Geoides, z.B.

- Höhenkurvenkarte
- mathematische Funktion oder Interpolationsvorschrift
- genügend feines digitales Modell

Je regelmässiger die Fläche ist, desto einfacher gelingt die Darstellung. Da nun aber ein Cogeoid im allgemeinen beträchtlich ruhiger als das Geoid verläuft, bietet seine Bestimmung, unabhängig von der gewählten Methode, wesentlich weniger Schwierigkeiten.

Haben wir uns nun für eine Darstellungsart des Cogeoides entschieden, erhalten wir mit (4.10) die Geoidhöhen punktweise in beliebiger Dichte, das Geoid also in nahezu beliebiger Feinheit.

Davon ausgehend können wir, wenn nötig, Höhenkurvenkarten herstellen.

Als Beispiel zeigen wir einen Ausschnitt von 20 x 20 km aus dem Geoid im Berner Oberland:

Die Figur 4.15 enthält:

- die in das Gebiet fallenden Stützpunkte, mit welchen das Cogeoid bestimmt wurde.
- die Höhenkurven des Geoides mit 5 cm Aequidistanz, interpoliert aus einem Raster von je 2 km (\cong 1 cm) Maschenweite. Vorgängig wurde das Geoid um die in diesem Gebiet vorherrschende Neigung gedreht, damit die Feinstruktur besser zum Vorschein kommt.
- die Topographie.

Man beachte, wie sich der hauptsächlichliche Verlauf der Topographie im Geoid widerspiegelt.

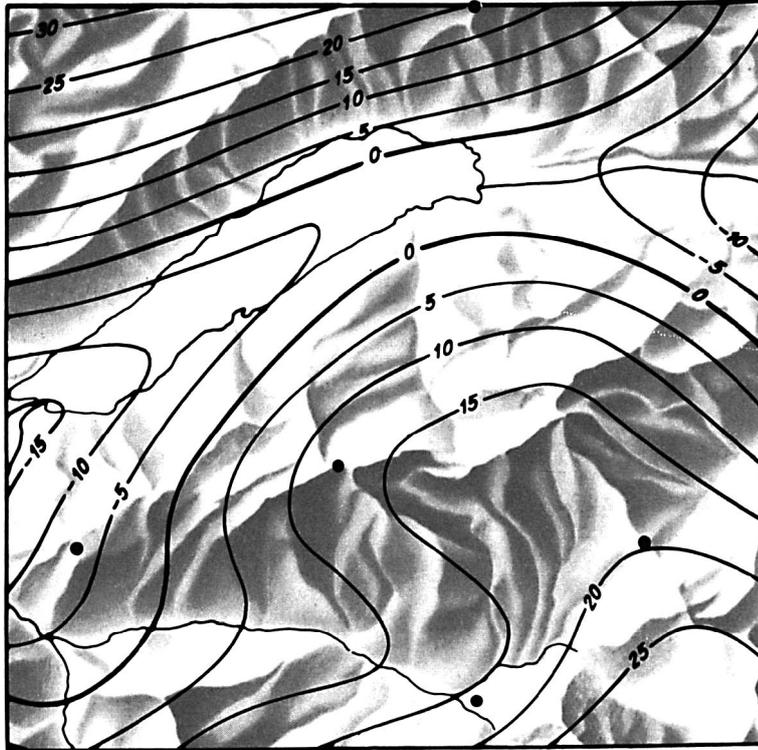


Fig. 4.15

Massstab 1 : 200 000

RELIEF: EIDGEN. LANDESTOPOGRAPHIE

4.3.4 Cogeoidtypen

Wie wir im letzten Abschnitt ausgeführt haben, brauchen wir ein Cogeoid mit möglichst glattem Verlauf; es ist, mit andern Worten, ein Massenmodell zu finden, das die tatsächlichen Lotabweichungen möglichst gut darstellt. Dieselbe Forderung wird auch gestellt bei der Interpolation von Lotabweichungen.

Im Prinzip braucht deshalb das gewählte Modell nicht unbedingt geophysikalisch sinnvoll zu sein. Wichtig ist für unsere Zwecke nur das Resultat, nämlich eine möglichst glatte Cogeoidfläche.

a) Das topographische Cogeoid

Dieses einfachste Modell besteht aus den Massen (konstanter Dichten) zwischen der durch das digitale Geländemodell erfassten Terrainoberfläche und dem Geoid.

Die topographisch reduzierten LA bzw. das daraus abgeleitete Cogeoid zeigen bereits einen wesentlich ruhigeren Verlauf als die Lotabweichungen im Geoid bzw. als das Geoid.

In Figur 4.16 sind die Schnitte durch das Geoid und das topographische Cogeoid im Meridian vom Gotthard dargestellt.

Die Höhen des Punktes 14 (Schwerzenbach) wurden willkürlich gleich null gesetzt.

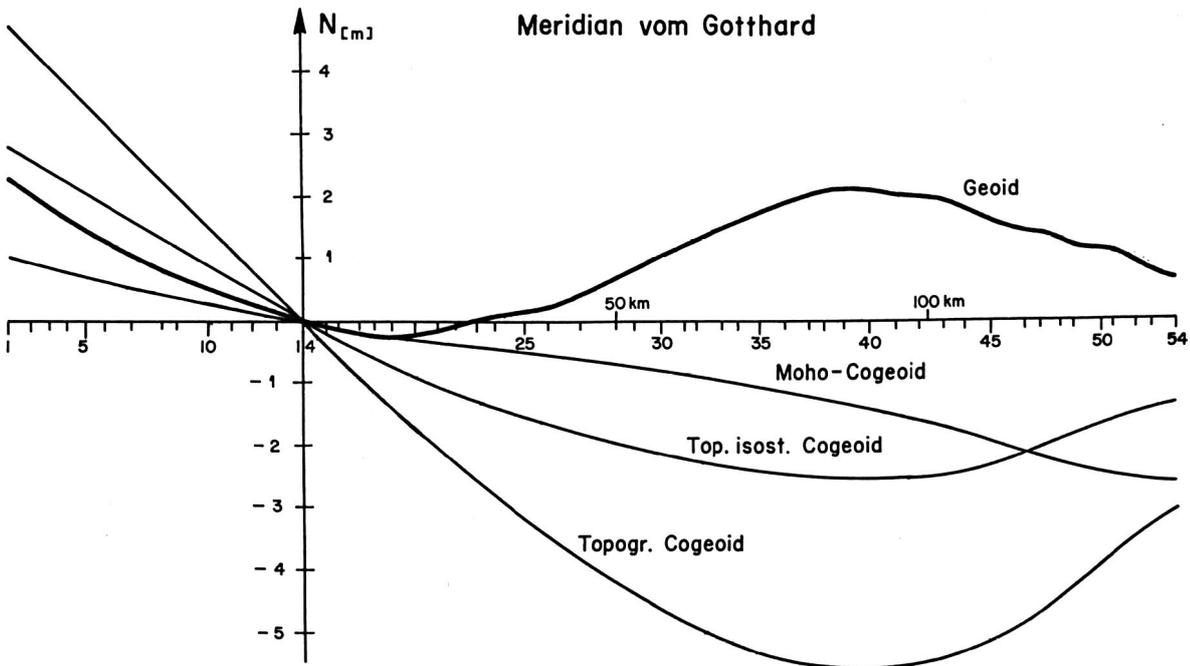


Fig. 4.16

In Fig. 4.17 ist wieder der bei Verwendung der Näherungsformel (3.5) zu erwartende mittlere Fehler einer als Beobachtung in das Flächennivellement einzuführenden Höhendifferenz dargestellt (Gebiet: Berner Oberland).

Es fällt auf, dass er nur noch ca. 1/5 desjenigen für Lotabweichungen im Geoid (vgl. Fig. 3.8 S. 13) beträgt: Eine Bestätigung der Vermutung, dass das Cogeoid beträchtlich genauer als das Geoid bestimmt werden kann.

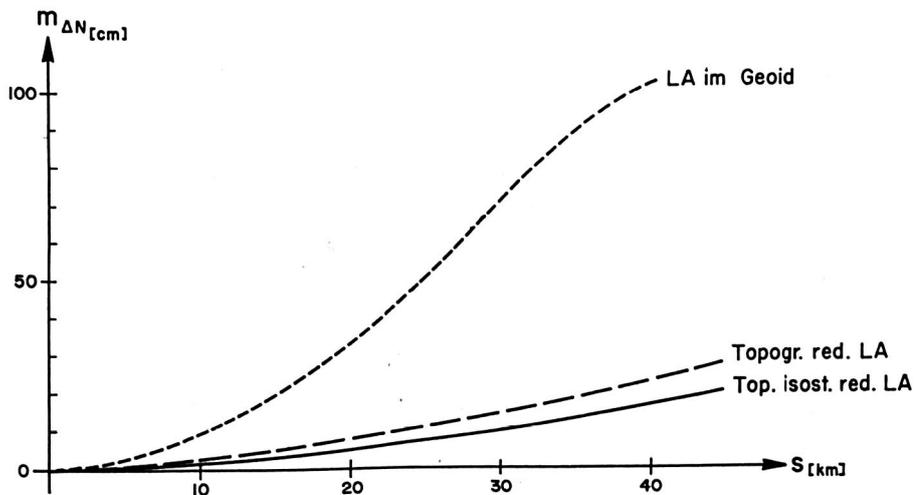


Fig. 4.17

b) Das topographisch-isostatische Cogeoid

Das Massenmodell berücksichtigt zusätzlich den isostatischen Effekt, wobei ihm das Isostasiemodell von Pratt-Hayford zugrunde gelegt wird:

Die Masse über einer in konstanter Tiefe angenommenen Ausgleichsfläche ist für alle Elementarsäulen konstant.

Das erwähnte Programm LASRM und das entsprechende Potentialprogramm berücksichtigen die isostatische Reduktion mit den beiden Vereinfachungen

- ebene statt sphärische Rechnung
- Kompensationsmassen werden mit den Formeln für Massenstreifen anstelle der exakten Quaderformel berechnet.

In Fig. 4.16 ist der Schnitt durch das topographisch-isostatische Cogeoid im Meridian vom Gotthard dargestellt. Fig. 4.17 zeigt den mittleren Fehler einer "Beobachtung" ΔN in Funktion der Distanz, wieder für das Gebiet des Berner Oberlandes. Er ist noch etwas kleiner als derjenige der topographischen Reduktion.

c) Das "Moho - Cogeoid"

Die Berechnung topographisch-isostatisch reduzierter Lotabweichungen und Schwereanomalien zeigt, dass sich die Schweizer Alpen nicht vollständig im isostatischen Gleichgewicht befinden (Fig. 4.16 und {Kahle et al 1976}):

Der generelle Verlauf der so reduzierten LA zeigt entsprechende systematische Abweichungen von null.

Im weiteren berücksichtigt das top.isost. Modell keine der bekannten Störmassen, deren wichtigste für uns wohl der sog. Ivrea-Körper ist (Südtessin und in Oberitalien). Dadurch erhalten wir zusätzliche, eher lokal begrenzte Verfälschungen der reduzierten Lotabweichungen und Schweren. Gerade diese lokalen Störungen erschweren uns aber die Bestimmung der Cogeoidfläche wie auch die Interpolation von Lotabweichungen.

Wassouf {1975} ergänzte deshalb das top.isost. Modell im Gebiet der Südschweiz und Norditaliens mit zusätzlichen Störmassen, die er so wählte, dass die reduzierten Lotabweichungen möglichst klein wurden. Dies gestattete ihm eine wesentlich bessere Interpolation der Lotabweichungen.

Kennt man nun aber den Aufbau der Erdkruste und insbesondere den Verlauf der sog. Mohorovičić - Diskontinuität (Trennfläche Mantel - Kruste), kann man sich vollständig vom Isostasiemodell lösen:

Das neue Modell enthält die sichtbare Topographie, die Mohofläche sowie alle bekannten Störmassen innerhalb des zu betrachtenden Einzugsgebietes.

Das von uns verwendete, stark vereinfachte Modell enthält als einzige Störmasse den Ivreakörper, der als Aufwölbung der Mohofläche bis knapp unter die Oberfläche dargestellt wird.

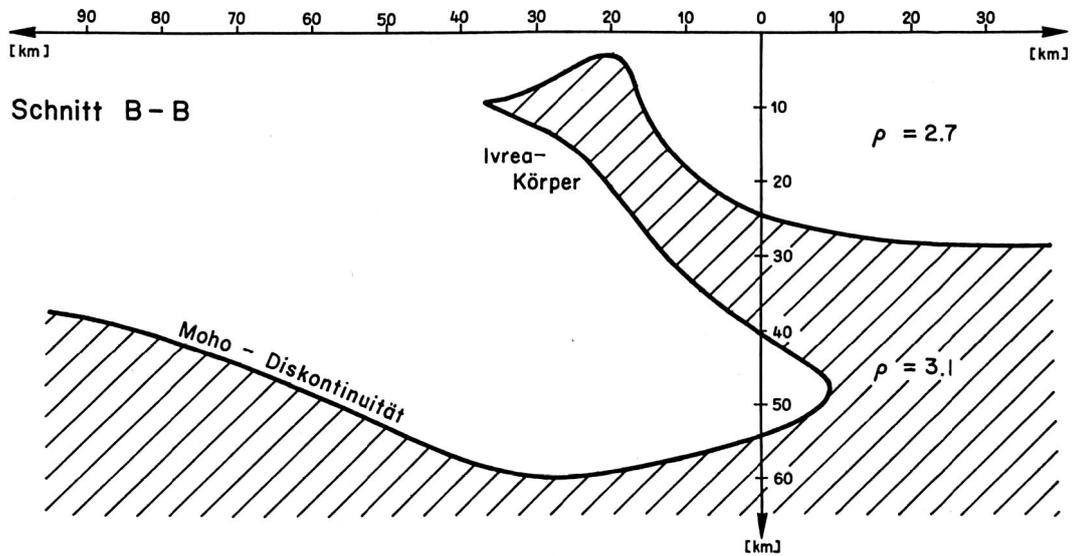


Fig. 4.18

Im ganzen Gebiet wurde nur eine konstante Dichtendifferenz zwischen Kruste und Mantel verwendet. Die beste Uebereinstimmung zwischen den gemessenen und den mit dem Modell berechneten LA ergab sich bei der Annahme:

$$\text{Krustendichte: } \rho = 2.7; \Delta\rho = 0.4$$

Um die Randeffekte des rechteckförmigen Einzugsgebietes möglichst auszuschließen, beziehen sich die Rechnungen der Mohokorrektur auf eine Ebene in mittlerer Tiefe ($T = 34$ km).

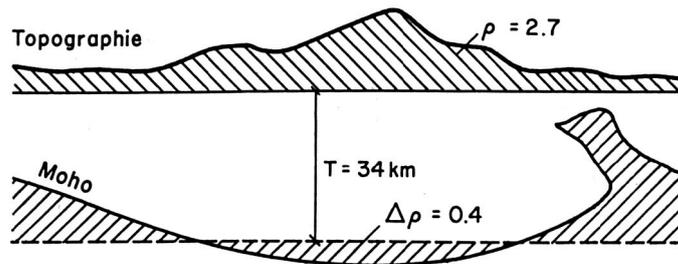


Fig. 4.19

Die Fig. 4.20 zeigt die Schichtlinien (in km) der Mohofläche innerhalb des verwendeten Einzugsgebietes.

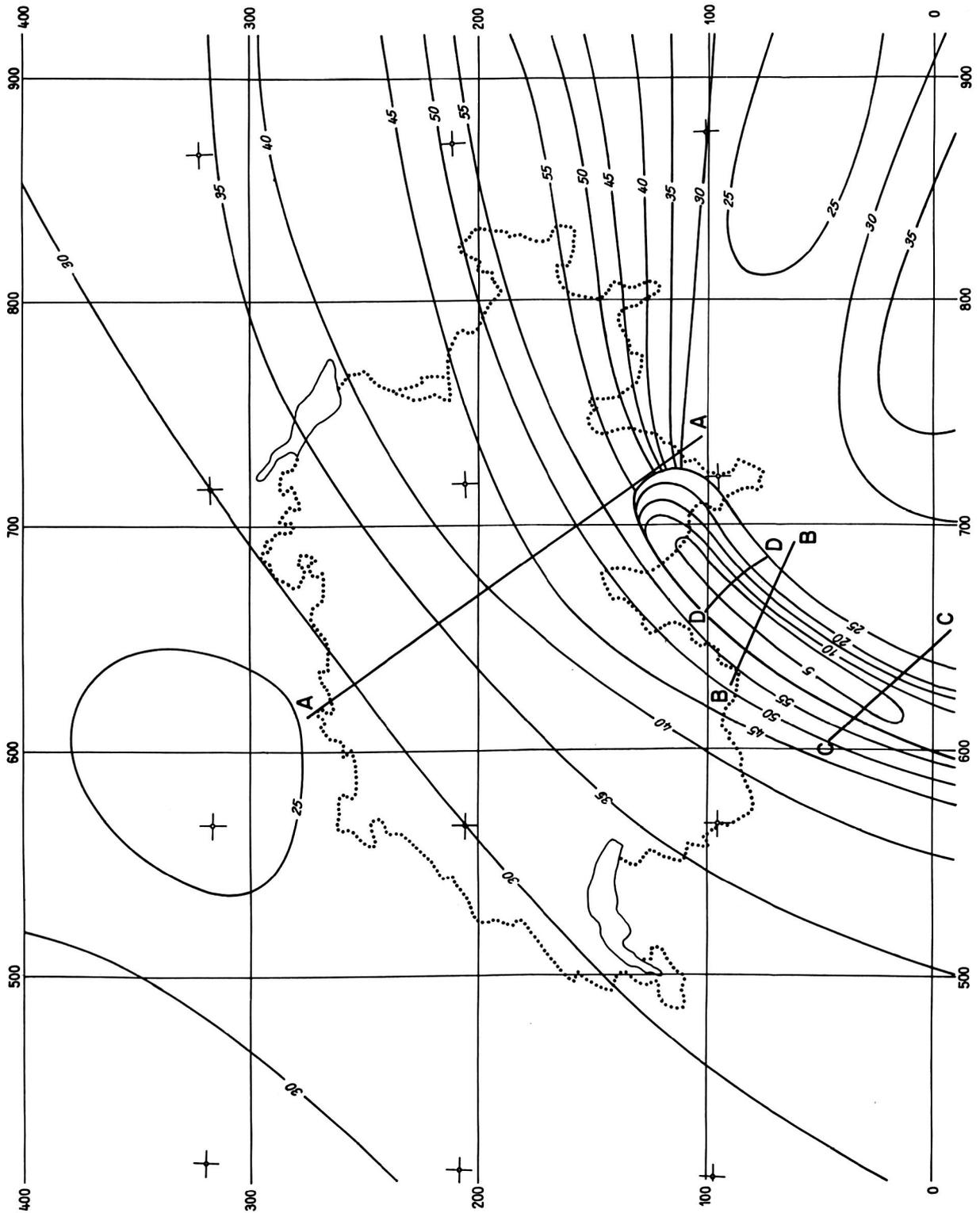


Fig. 4.20

Folgende Quellen wurden verwendet:

- {Choudhury et al, 1971} Gesamtdarstellung der Mohofläche in unserem Gebiet
- {Edel et al, 1975} Krusten-Mantelgrenze nördlich von Basel
- {Kahle et al, 1976} Schnitt A - A (Fig. 4.20)
- {Kaminski/Menzel, 1968} Schnitt C - C (Fig. 4.20)
- {Berckhemer, 1968} Schnitt B - B (Fig. 4.20; Fig. 4.18, adaptiert)

Da die Struktur des nordöstlichen Teiles des Ivreakörpers nicht bekannt war, wurde die aus den Schnitten B-B und C-C hervorgehende "Vogelkopfform" (vgl. Fig. 4.18) auf den ganzen Körper ausgedehnt. Der Vergleich zwischen den gemessenen und den berechneten LA im Gebiet Südschweiz/Norditalien deutete aber auf ein Massendefizit für das Modell des nordöstlichen Teiles hin.

Nördlich der Linie D-D (Fig. 4.20) wurde deshalb die Ueberlappung vollständig mit Mantelmasse "aufgefüllt".

Die Figur 4.21 zeigt die Differenz der beobachteten minus berechneten Lotabweichungen für die Punkte im erwähnten Gebiet.

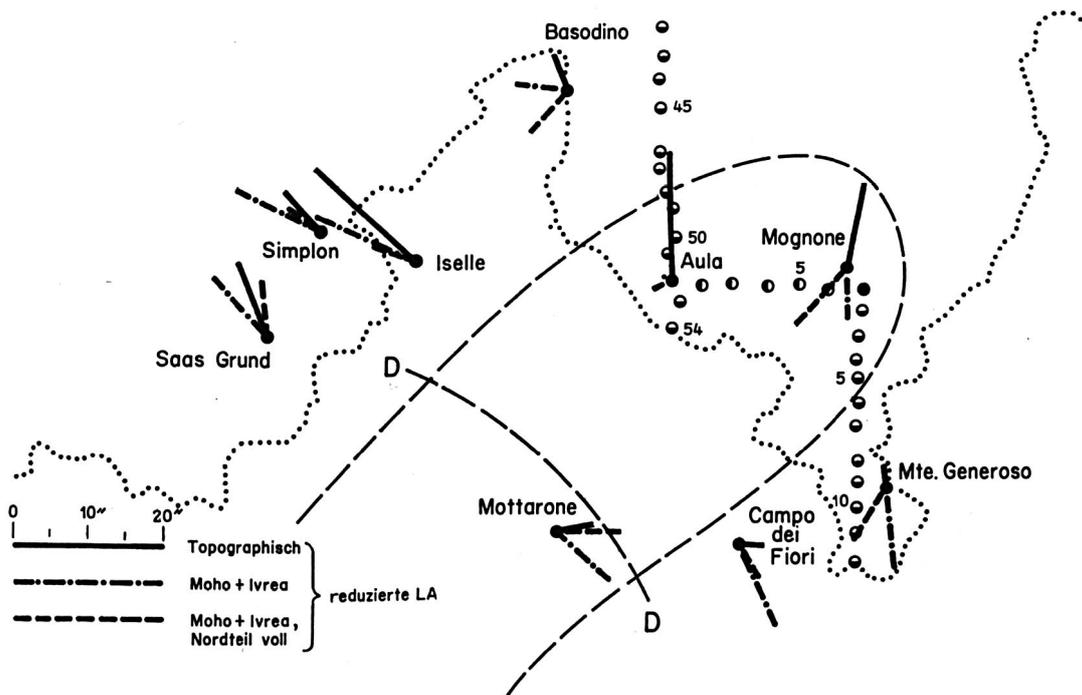


Fig. 4.21

Es sei ausdrücklich festgehalten: es geht hier nicht darum, auf Grund der gemessenen LA ein neues Ivreamodell aufzustellen. Damit ein solches Modell der Wirklichkeit näher kommt, müssten alle verfügbaren Daten des Schwerefeldes (LA und Schwereanomalien) wie auch der seismischen Untersuchungen (Dichten!) in Betracht gezogen werden. Dies würde aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen.

Hier sollte nur gezeigt werden, dass zwar die Lotabweichungen mit Hilfe des in der geophysikalischen Literatur zu findenden Ivreamodells noch nicht vollständig darstellbar sind, andererseits aber gegenüber den rein topographisch bzw. topogr.isostatisch reduzierten Lotabweichungen eine Beruhigung ihres Verlaufes festgestellt werden kann: Vgl. die Darstellung der reduzierten LA (Fig. 4.22) für den Parallelschnitt durch Locarno und den Meridianschnitt durch Lugano:

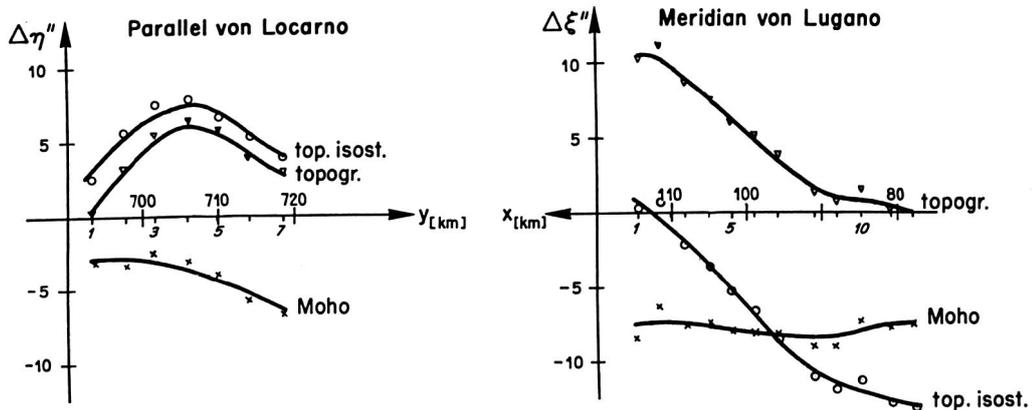


Fig. 4.22

Die Figuren 4.23 und 4.24 zeigen den Verlauf der verschiedenen reduzierten Lotabweichungen für den Meridian vom Gotthard und den Parallel von Zürich:

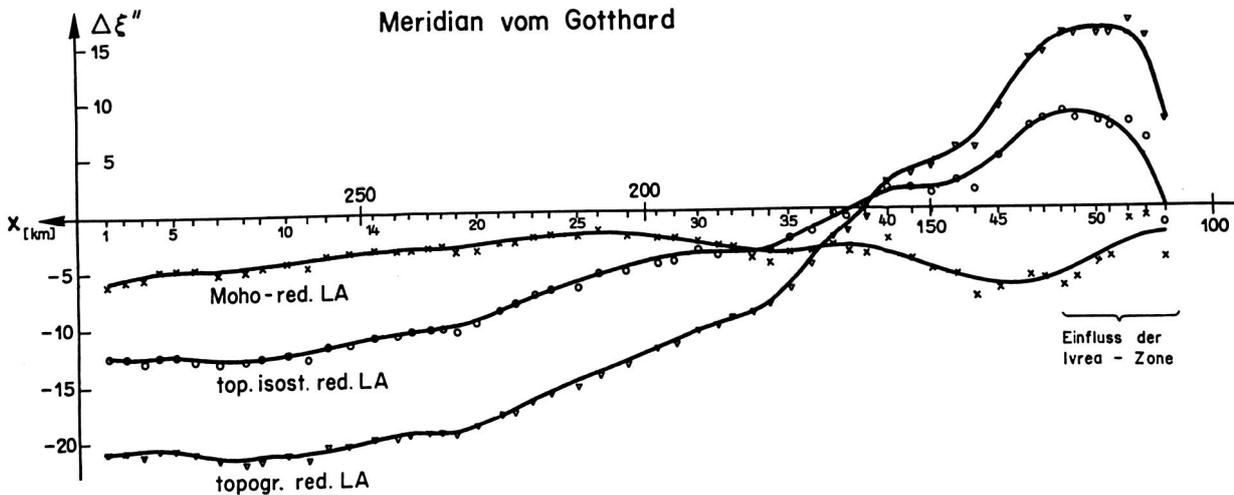


Fig. 4.23

Fig. 4.16 Seite 35 zeigt den Meridianschnitt durch die entsprechenden Cogeoiden.

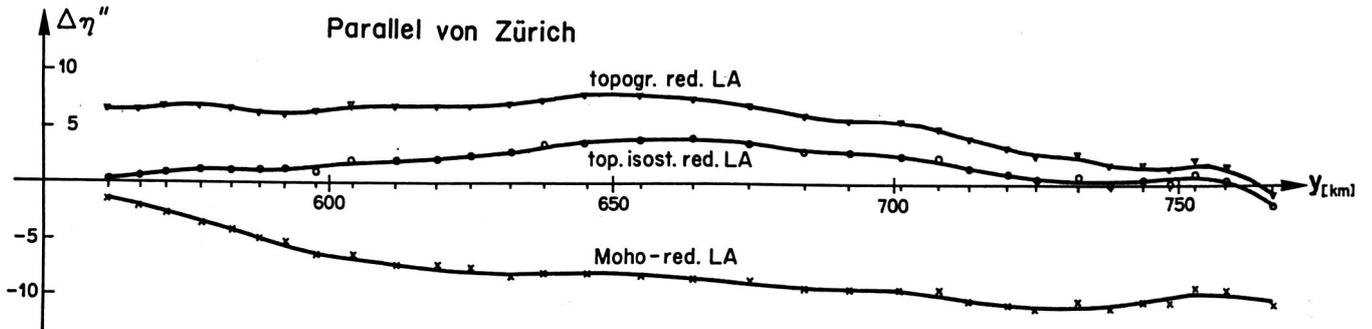


Fig. 4.24

Die durchgezogenen Kurven in den Figuren 4.22 bis 4.24 wurden mit Hilfe der Prädiktionsfilterung ($m_{\epsilon} = \pm 0.5$) hineininterpoliert (vgl. Kapitel 6).

Der zu erwartende mittlere Fehler einer als "Beobachtung" in das Flächennivelement einzuführenden Höhendifferenz nach Formel (3.5) entspricht für die mohoreduzierten LA (Berner Oberland) ungefähr demjenigen der topographisch-isostatischen Reduktionen (Fig. 4.17 Seite 35).

Abschliessend fassen wir die sich abzeichnenden (und im Kapitel 7 bestätigten) Eigenschaften der Mohoreduktion zusammen:

- Der Einbezug des Ivreakörpers bringt gegenüber der topographischen bzw. topographisch-isostatischen Reduktion in der Südschweiz eine zusätzliche Beruhigung in den Verlauf der reduzierten Lotabweichungen.
- Ausserhalb des Einflussgebietes der Ivreazone dürfte das Mohocogeoid mit mindestens derselben Genauigkeit bestimmt werden können wie das topographisch-isostatische Cogeoid.
- Das topographisch-isostatische Cogeoid zeigt unter der Alpenkette eine (gegenüber dem rein topographischen Cogeoid zwar abgeschwächte, jedoch immer noch deutlich vorhandene) Senke, die darauf hinweist, dass das Isostasie-modell das Massendefizit unter den Alpen nicht vollständig erfassen kann.

Mit der Verwendung der Mohodiskontinuität für die Reduktion gelingt es uns aber, dieses Massendefizit zu berücksichtigen. Uebrig bleibt eine allgemeine Neigung des Mohocogeoides, die z.T. auch von der Lagerung des Referenzellipsoides herrührt. (Vgl. Meridianschnitte in Fig. 4.16 und die Darstellung der Cogeoides in den Figuren 7.18, 7.20 und 7.21.)

5. INTERPOLATIONEN

5.1 Stützpunktverdichtung

Bisher hat in praktisch allen Arbeiten über astrogeodätische Geoidbestimmungen die Verdichtung der Stützpunkte, mithin also die Lotabweichungsinterpolation, eine zentrale Rolle gespielt.

Dabei wurde hauptsächlich eine der drei folgenden Methoden benutzt, wobei z.T. mit Hilfe eines top.isost. Massenmodells reduzierte Lotabweichungen interpoliert wurden:

1. Graphische Interpolation auf Grund von gezeichneten Kurven gleicher Lotabweichungsbeträgen, getrennt nach ξ und η .

Bsp.: {Wolf, 1956} (gemessene LA)

2. Polynominterpolation

Bsp.: {Elmiger, 1969} (reduzierte LA)

3. Prädiktionsmethoden (vgl. Kap. 6)

Bsp.: {Heitz, 1967} (reduzierte LA)

{Ganeko, 1976} (gemessene LA)

Der Vollständigkeit halber sei noch die Punktverdichtung mit Hilfe von Schwereanomalien erwähnt.

5.2 Interpolation von Niveauflächen

Falls die zur Bestimmung der Niveaufläche benutzte Methode keine stetige Darstellung liefert, müssen (unter Umständen) weitere Höhen interpoliert werden.

Hier bieten sich, neben graphischen Interpolationen ("von Hand"), die beiden folgenden Möglichkeiten an:

1. Lokale Interpolation mit Polynomen. Spezialfall: Lineare Interpolation.

Besondere Aufmerksamkeit müsste auftretenden Sprüngen in den Uebergängen geschenkt werden. Denkbar wäre eine Darstellung der Niveaufläche mit Hilfe zweidimensionaler Spline-Funktionen (allg. Literatur über Spline-Funktionen z.B. {Späth, 1973})

2. Statistische Methoden: Formell gleich wie die Interpolation von Schwereanomalien.

Bsp.: {Brennecke et al, 1975}

Im folgenden Kapitel wird gezeigt, wie - ausgehend von beliebig verteilten Flächennormalen - mit statistischen Methoden direkt, d.h. ohne explizite Interpolationen, die Fläche punktweise bestimmt werden kann. Die Anwendung auf die reduzierten LA ergibt folglich Cogeoidhöhen; zusammen mit dem Satz von Bruns erhalten wir die Geoidhöhen in beliebigen Punkten.

6. STATISTISCHE METHODEN DER GEOIDBESTIMMUNG

6.1 Kurzer Abriss über Prädiktion und Kollokation

Im folgenden wollen wir eine kurze Zusammenfassung des Prinzips der gebräuchlichsten statistischen Interpolationsmethode geben. Nähere Einzelheiten finden sich z.B. in den gut verständlichen Arbeiten von Moritz {1970}, {1973}.

6.1.1 Prädiktion (Interpolation nach kleinsten Quadraten)

Wir messen in m beliebig verteilten Punkten X irgendwelche, für diese Punkte charakteristische Grössen, beispielsweise die Höhen einer Fläche, Schwerewerte, Temperaturen, usw.

Gesucht sind nun die entsprechenden Werte in anderen (zur Messung ev. nicht zugänglichen) Punkten P .

Es sind:

- s die zu bestimmenden Grössen (Signale)
- x die gemessenen Signale
- y die geschätzten (interpolierten) Werte für s
- ϵ die wahren Interpolationsfehler von y : $\epsilon = s - y$

Die Messungen x des Signals sollen vorerst frei von Messfehlern sein.

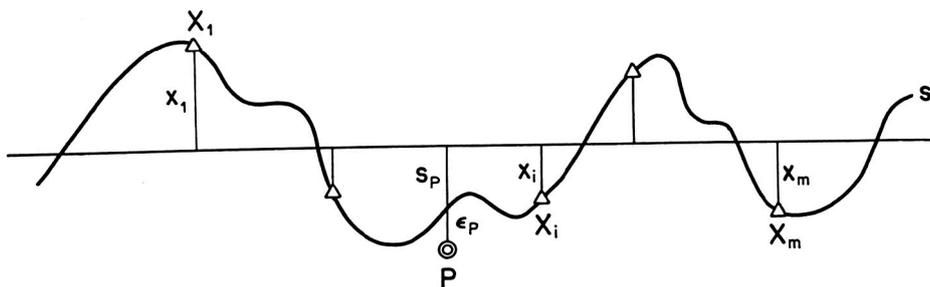


Fig. 6.1

Wir fassen nun die Signale als zufällige - mit den Nachbarsignalen korrelierte - Schwankungen um einen Mittelwert auf, wobei wir im folgenden voraussetzen wollen, dass dieser Mittelwert null sei. (Durch eine vorgängige Zentrierung lässt sich dies allenfalls immer erreichen).

Die mittlere quadratische Abweichung von null entspricht also der Varianz des Signals s .

Etwaige systematische Effekte müssen vorher abgespalten werden. Das geschätzte Signal y wird als Linearkombination (lineare Prädiktion) aller Messungen dargestellt *)

$$y_P = \underline{h} \cdot \underline{x} \quad \underline{h}: (h_{P1}, \dots, h_{Pm}); \quad \underline{x}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Der Koeffizient h_{P1} ist also gewissermassen ein Gewichtungsfaktor, mit dem die Messung x_1 multipliziert werden muss. Er ist, wie wir später sehen werden, unter anderem abhängig davon, wie weit der Messpunkt X_1 vom zu interpolierenden Punkt P entfernt ist.

Der Interpolationsfehler ϵ beträgt:

$$\epsilon_P = s_P - y_P = s_P - \underline{h} \cdot \underline{x} \quad (6.2)$$

und
$$\epsilon_P^2 = s_P^2 - 2 s_P \cdot \underline{h} \cdot \underline{x} + (\underline{h} \cdot \underline{x})^2 \quad (6.3)$$

Unter der getroffenen Voraussetzung, dass der Mittelwert von s wie auch von x null ist, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} M(s_P \cdot s_Q) = c_{PQ} : \text{Autokovarianz des} \\ \text{Signals } s \\ M(s_P \cdot x_i) = c_{Pi} : \text{Kreuzkovarianz zwischen} \\ \text{Signal } s \text{ und Messung } x \\ M(x_i \cdot x_k) = c_{ik} : \text{Autokovarianz der} \\ \text{Messungen } x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{bilden} \\ \text{die} \\ \text{Matrizen} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} C_{ss} \\ C_{sx} \\ C_{xx} \end{array} \right.$$

Wir erhalten damit aus (6.3) die Varianz der Schätzung:

$$M(\epsilon_P^2) = \sigma_P^2 = c_{PP} - 2 \underline{h} \cdot \underline{c}_{sx}^T + \underline{h} \cdot C_{xx} \cdot \underline{h}^T \quad (6.4)$$

*) Skalare und Elemente von Vektoren und Matrizen werden im folgenden mit kleinen Buchstaben, Vektoren (auch einzelne Zeilen bzw. Spalten von Matrizen) mit kleinen unterstrichenen und Matrizen mit grossen Buchstaben bezeichnet.

\underline{c}_{sx} ist ein Zeilenvektor mit den Kovarianzen zwischen dem Signal s_p und den einzelnen Messungen x_i als Elemente.

C_{xx} ist eine quadratische Matrix mit den Kovarianzen zwischen den einzelnen Messungen x_i und x_k als Elemente. Die Diagonalen ($i = k$) enthalten ihre Varianzen.

c_{pp} ist die Varianz des Signals im Punkte P.

Wir bestimmen die unbekannt Koeffizienten h so, dass sie den mittleren Interpolationsfehler σ_p zum Minimum machen. Setzen wir die partiellen Ableitungen von (6.4) nach h_{pi} gleich null, erhalten wir (unter Berücksichtigung der Symmetrie von C_{xx}):

$$\underline{h} \cdot C_{xx} = \underline{c}_{sx} \quad (\text{Wiener-Hopf Gleichung}) \quad (6.5)$$

und damit die Lösung:

$$\underline{h} = \underline{c}_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \quad (6.6)$$

Setzen wir (6.6) in (6.1) ein, folgt für das geschätzte Signal y_p :

$$\underline{y}_P = \underline{c}_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (6.7)$$

und seine Varianz (6.4):

$$\underline{\sigma}_P^2 = c_{pp} - \underline{c}_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{c}_{sx}^T \quad (6.8)$$

Die Interpolation kann gleichzeitig für mehrere Punkte P_j durchgeführt werden:

\underline{c}_{sx} wird zur Matrix C_{sx} , die y_j fassen wir im Vektor \underline{y} zusammen:

$$\underline{y} = C_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (6.7)'$$

und die Varianz-Kovarianzmatrix Σ der Interpolationswerte entsprechend:

$$\Sigma = C_{ss} - C_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot C_{sx}^T \quad (6.8)'$$

6.1.2 Kollokation

Falls sich die zu messenden bzw. zu bestimmenden Grössen \underline{z} aus einem zufälligen (Signal) und einem systematischen (Trend) Anteil zusammensetzen, wobei die Messungen selbst durch Messfehler (noise) verfälscht sind, gilt:

$$\underline{z} = A \cdot \underline{u} + s \quad (6.9)$$

$$\underline{x} = A \cdot \underline{u} + \underline{s} + \underline{n} \quad (6.10)$$

Der Trend $A \cdot \underline{u}$ sei eine lineare bzw. linearisierte Funktion der noch unbekanntenen Parametern \underline{u} .

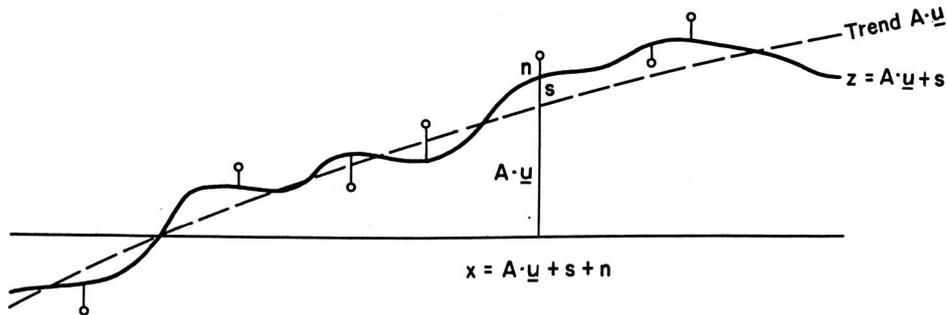


Fig. 6.2

Beispiel: Darstellung der Schwere aus einzelnen Schweremessungen:

$g = \gamma + \Delta g$	g : Schwere	=	z
	γ : Normalschwere	=	$A \cdot \underline{u}$
bzw:	Δg : Schwereanomalie	=	s
$g_{\text{gem}} + v = \gamma + \Delta g$	g_{gem} : gemessene Schwere	=	x
	v : Messfehler	=	$-n$

Die Schätzung \underline{y} für das Signal \underline{s} erhalten wir (vgl. {Moritz 1973}) mit:

$$\underline{y} = C_{sx} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot (\underline{x} - A \cdot \underline{u}) \quad (6.11)$$

wobei:

$$\underline{u} = (A^T \cdot C_{xx}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (6.12)$$

6.1.3 Die Kovarianzfunktion

Die Elemente der Kovarianzmatrix C_{ss} beschreiben die Kovarianz zwischen den Signalen s_i und s_k in zwei Punkten P_i und P_k . Diese nimmt im allgemeinen mit zunehmendem Abstand r der beiden Punkte ab und geht für $r \rightarrow \infty$ gegen null.

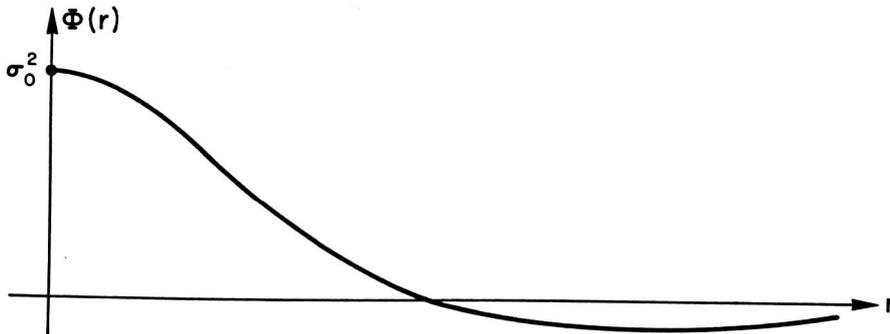


Fig. 6.3

Homogenität bedeutet Ortsunabhängigkeit der Kovarianzfunktion. Isotropie bedeutet Richtungsunabhängigkeit der Kovarianzfunktion.

Man wählt nun zu ihrer Darstellung eine geeignete Funktion (Modell!) mit (meistens zwei) freien Parametern, die man empirisch (vgl. Abschnitt 6.4) bestimmt.

Beispiele:

$$\phi(r) = \sigma_0^2 e^{-r/d} \quad \text{Parameter: } \sigma_0, d$$

$$\phi(r) = \frac{\sigma_0^2}{1 + (r/d)^2}$$

6.2 Die Lotabweichungen als Zufallsprozesse

Wir fassen nun die Lotabweichungskomponenten ξ und η als Zufallsfunktionen des Ortes (Signale im Sinne des Abschnittes 6.1) auf. Man sagt auch etwa, dass diese Zufallsfunktionen einen sog. Zufalls- oder stochastischen Prozess bilden. Die tatsächlich vorhandenen Lotabweichungen stellen dann eine Realisierung des Prozesses dar.

Selbstverständlich spielt es formal keine Rolle, ob wir effektiv LA-Komponenten ξ , η oder mit irgend einem Massenmodell reduzierte Komponenten $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ interpolieren wollen.

Als Beispiel einer komponentenweisen Interpolation topographisch-isostatisch reduzierter LA sei die Arbeit von Heitz {1967} erwähnt.

Die LA-Komponenten ξ , η sind nun aber gegenseitig korreliert (vgl. Abschnitt 6.3). Grafarend und Offermanns {1975} zeigten, dass das Modell des "statistisch isotrop-chaotischen Vektorfeldes" {Steenbeck, 1963} gegenüber einer korrekten vektoriellen Prädiktion, welche die Korrelationen zwischen ξ und η berücksichtigt, signifikante numerische Unterschiede liefert.

Im übrigen entspricht die komponentenweise Prädiktion dem üblicherweise in der Photogrammetrie verwendeten Verfahren der Restfehlerinterpolation.

6.3 Selbstkonsistentes statistisches Modell für Δg , ξ , η , N

Damit wir die Methode der multivariaten Prädiktion zur Bestimmung von Geoid- undulationen aus Lotabweichungen anwenden können, brauchen wir, wie wir im Abschnitt 6.1 gesehen haben, alle vorkommenden Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen.

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes soll sein, diese Funktionen bereitzustellen. Dabei wollen wir uns vor allem auf die Arbeiten von Jordan {1972}, Grafarend-Offermanns {1975} und Grafarend {1971} stützen. Ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis findet man in {Grafarend 1976}.

Schwereanomalien Δg , Lotabweichungen ξ , η und Geoidundulationen N sind direkte Folgen ein und desselben Störpotentials T .

Zwischen ihnen bestehen unter anderem die bekannten Integralbeziehungen von Vening-Meinesz und Stokes.

Da wir uns nur mit lokalen Geoidbestimmungen befassen, benützen wir an Stelle der sphärischen Formeln ebene Approximationen, von denen wir als Beispiele nur diejenige von Stokes sowie zwei differentielle Beziehungen angeben wollen:

$$N(y,x) = \frac{1}{2\pi g_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(v,u)}{\sqrt{(y-v)^2 + (x-u)^2}} du dv \quad (\text{Stokes}) \quad (6.14)$$

$$\xi(y,x) = -\frac{\partial N}{\partial x} ; \quad \eta(y,x) = -\frac{\partial N}{\partial y} \quad (6.15)$$

(x-Achse nach Norden, y-Achse nach Osten)

Wir fassen nun die Geoidundulationen als zweidimensionalen Zufallsprozess auf, wobei wir Stationarität (Homogenität) und Isotropie voraussetzen wollen.

Die bekannten Integral- und Differentialbeziehungen wie (6.14) und (6.15) zwischen den Grössen N , Δg , ξ und η gestatten es, Beziehungen zwischen der Autokovarianzfunktion der Geoidundulationen und den Autokovarianzfunktionen der Schwereanomalien und Lotabweichungskomponenten wie auch den verschiedenen Kreuzkovarianzfunktionen herzuleiten:

Kovarianzfunktionen bezeichnen wir im folgenden mit Φ ; ihre unabhängigen Variablen seien r (Abstand) bzw. r und a (Azimut);

$$\Phi'(r) \text{ entspreche } \frac{\partial}{\partial r} (\Phi), \quad \Phi''(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Phi).$$

So findet man z.B. bei {Jordan 1972} Beziehungen, die in etwas anderer Schreibweise folgendermassen aussehen:

$$\xi: \quad - \Phi_{\xi\xi}(r,a) = \frac{1}{r} \sin^2 a \Phi'_{NN}(r) + \cos^2 a \Phi''_{NN}(r) \quad (6.16)$$

$$\eta: \quad - \Phi_{\eta\eta}(r,a) = \frac{1}{r} \cos^2 a \Phi'_{NN}(r) + \sin^2 a \Phi''_{NN}(r) \quad (6.17)$$

$$\Delta g: \quad - \frac{1}{g_0} \Phi_{g\xi}(r) = \frac{1}{r} \Phi'_{NN}(r) + \Phi''_{NN}(r) \quad (6.18)$$

Falls die Kovarianzfunktion $\Phi_{NN}(r)$ der Geoidundulationen bekannt ist, können wir also daraus alle andern (Auto-)Kovarianzen berechnen.

Uns interessieren noch folgende Beziehungen zwischen den Kreuzkovarianzfunktionen und Φ_{NN} :

$$\Phi_{N\xi}(r,a) = - \Phi_{\xi N}(r,a) = - \cos a \Phi'_{NN}(r) \quad (6.19)$$

$$\Phi_{N\eta}(r,a) = - \Phi_{\eta N}(r,a) = - \sin a \Phi'_{NN}(r) \quad (6.20)$$

$$\Phi_{\xi\eta}(r,a) = \Phi_{\eta\xi}(r,a) = \sin a \cos a \left\{ \frac{1}{r} \Phi'_{NN}(r) - \Phi''_{NN}(r) \right\} \quad (6.21)$$

Bemerkenswert ist erstens, dass die Autokovarianzfunktionen $\Phi_{\xi\xi}$ und $\Phi_{\eta\eta}$ trotz der verlangten Isotropie der Geoidundulationen richtungsabhängig sind und zweitens, dass die Kreuzkovarianz $\Phi_{\xi\eta}$ im allgemeinen nicht identisch null ist.

Man kann zeigen, dass unter den getroffenen Annahmen (Homogenität und Isotropie der Geoidundulationen) die Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen der Lotabweichungen folgendermassen zerlegt werden können (vgl. z.B. {Grafarend-Offermanns 1975}):

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi\xi}(r,a) &= \Phi_{\Psi\Psi}(r) + \{\Phi_{\Omega\Omega}(r) - \Phi_{\Psi\Psi}(r)\} \cos^2 a \\ \Phi_{\eta\eta}(r,a) &= \Phi_{\Psi\Psi}(r) + \{\Phi_{\Omega\Omega}(r) - \Phi_{\Psi\Psi}(r)\} \sin^2 a \\ \Phi_{\xi\eta}(r,a) &= \Phi_{\eta\xi}(r,a) = \{\Phi_{\Omega\Omega}(r) - \Phi_{\Psi\Psi}(r)\} \sin a \cos a \end{aligned} \quad (6.22)$$

(Taylor - Karman - Zerlegung)

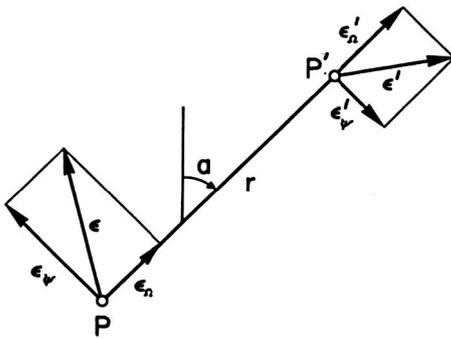


Fig. 6.4

$\Phi_{\Omega\Omega}(r)$ ist die sogenannte Längskovarianz, das heisst die Kovarianz zwischen den Komponenten der Lotabweichungen zweier Punkte in deren Verbindungsgeraden:

$$\Phi_{\Omega\Omega}(r) = \text{cov}(\epsilon_{\Omega}, \epsilon'_{\Omega})$$

$\Phi_{\Psi\Psi}(r)$ ist die Querkovarianz, also die Kovarianz zwischen den Komponenten senkrecht auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte:

$$\Phi_{\Psi\Psi}(r) = \text{cov}(\epsilon_{\Psi}, \epsilon'_{\Psi})$$

$\Phi_{\Omega\Omega}$ und $\Phi_{\Psi\Psi}$ sind richtungsunabhängig, und die Kreuzkovarianzen $\Phi_{\Omega\Psi}$ und $\Phi_{\Psi\Omega}$ verschwinden.

Das isotrop-chaotische Modell können wir nun rückblickend präziser wie folgt charakterisieren:

$$\Phi_{\xi\xi} = \Phi_{\eta\eta} = \Phi_{\Omega\Omega} = \Phi_{\Psi\Psi}; \Phi_{\xi\eta} = 0$$

Dies bedeutet insbesondere auch Richtungsunabhängigkeit der Autokovarianz der Lotabweichungskomponenten.

Im Hinblick auf die spätere LA-Interpolation und Geoidbestimmung, der wir die Überlegungen des Abschnittes 4.3 (Cogeoid und Satz von Bruns) zugrunde legen werden, sei noch folgende Bemerkung angefügt:

Falls wir die Grössen des tatsächlichen Störpotentials T durch diejenigen des mit Hilfe eines Massenmodells reduzierten Störpotentials T_s ersetzen, behalten die Ausführungen des vorliegenden Kapitels grundsätzlich ihre Gültigkeit:

Störpotential T		Störpotential T_s
Geoidundulation N	Massenmodell →	Cogeoidundulation N_c
Lotabweichungen ξ, η		reduzierte LA $\Delta\xi, \Delta\eta$
Schwereanomalien Δg		reduzierte Anomalien Δg_{red}

Wir können also mit denselben Ueberlegungen ein selbstkonsistentes statistisches Modell für die reduzierten Grössen aufbauen.

Bequemlichkeitshalber verzichten wir jedoch im folgenden auf die Mitführung der entsprechenden Indizes. Beispielsweise bezeichnen wir die Kovarianzfunktion der reduzierten LA-Komponenten $\Delta\xi$ ebenfalls mit $\Phi_{\xi\xi}$. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da wir uns vom nächsten Abschnitt an praktisch nur noch auf die reduzierten Grössen beschränken werden.

Die Frage stellt sich nun nach dem mathematischen Ansatz für die Kovarianzfunktion der Geoidundulationen, nach der wir dann mit Hilfe der Formeln (6.16) bis (6.21) alle uns interessierenden Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen berechnen können.

Unser Ansatz sollte folgende Bedingung erfüllen:

$$-\infty < \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_{NN}'(r)}{r} < 0 \quad (6.23)$$

damit (vgl. 6.16 und 6.17) die Kovarianzfunktion der LA-Komponenten für $r = 0$ einen endlichen Wert erhält.

Somit scheiden bereits einige, für andere Aufgaben verwendete, Ansätze aus, z.B. das Exponentialmodell

$$\Phi_{NN}(r) = \sigma_N^2 e^{-r/d}$$

Kasper {1971} erläuterte, dass die Autokovarianzfunktion der Schwereanomalien, um physikalisch sinnvoll zu sein, für $r = 0$ eine horizontale Tangente haben sollte, d.h.:

$$\Phi_{\xi\xi}'(r=0) = 0 \quad (6.24)$$

was sich über (6.18) ebenfalls auf die Wahl von Φ_{NN} auswirkt.

Das folgende, von Jordan {1972} vorgeschlagene, sog. Markov-Undulationsmodell 3. Ordnung erfüllt die Bedingungen (6.23) und (6.24) und ist daneben sehr einfach auszuwerten: (Markovprozess: Begriff aus der Theorie der stochastischen Prozesse, auf dessen Erläuterung wir hier verzichten können. Siehe z.B. {Arnold, 1973}).

$$\Phi_{NN}(r) = \sigma_N^2 \left(1 + \frac{r}{d} + \frac{r^2}{3d^2}\right) e^{-r/d} \quad (6.25)$$

Die Anwendung der Beziehungen (6.16), (6.17) und (6.21) ergibt sofort die uns vorerst interessierenden Kovarianzfunktionen der Lotabweichungen:

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi\xi}(r,a) &= \sigma_{\xi}^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2} \cos^2 a\right) e^{-r/d} \\ \Phi_{\eta\eta}(r,a) &= \sigma_{\eta}^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2} \sin^2 a\right) e^{-r/d} \\ \Phi_{\xi\eta}(r,a) &= \Phi_{\eta\xi}(r,a) = -\frac{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}}{2} \cdot \frac{r^2}{d^2} e^{-r/d} \sin 2a\end{aligned}\quad (6.26)$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \frac{\sigma_N}{\sqrt{3}d} \quad (= \sigma_{\epsilon}) \quad (6.27)$$

Wir erhalten die Längskovarianz $\Phi_{\Omega\Omega}$, indem wir in der Kovarianzfunktion $\Phi_{\xi\xi}$ $a = 0^\circ$ bzw. in $\Phi_{\eta\eta}$ $a = 90^\circ$ setzen. (Falls das Azimut von P nach P' null Grad beträgt, entsprechen die LA-Komponenten ξ und ξ' gerade den Längskomponenten ϵ_{Ω} und ϵ'_{Ω} . Analog für $a = 90^\circ$: $\eta, \eta' = \epsilon_{\Omega}, \epsilon'_{\Omega}$. Vgl. Fig. 6.4):

$$\Phi_{\Omega\Omega}(r) = \sigma_{\epsilon}^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2}\right) e^{-r/d} \quad (6.28)$$

Die Querkovarianz $\Phi_{\Psi\Psi}$ entspricht $\Phi_{\xi\xi}$ für $a = 90^\circ$ bzw. $\Phi_{\eta\eta}$ für $a = 0^\circ$:

$$\Phi_{\Psi\Psi}(r) = \sigma_{\epsilon}^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \quad (6.28)'$$

Wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann, erfüllen diese Funktionen die Taylor-Karman-Zerlegung (6.22).

Die Anwendung von (6.19) und (6.20) auf (6.25) führt uns leicht auf die beiden letzten, für die Prädiktion von (Co-)Geoidundulationen aus LA notwendigen Kovarianzfunktionen $\Phi_{N\xi}$ und $\Phi_{N\eta}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{N\xi}(r,a) &= \sigma_N \sigma_{\xi} \frac{r}{\sqrt{3}d} \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \cos a \\ \Phi_{N\eta}(r,a) &= \sigma_N \sigma_{\eta} \frac{r}{\sqrt{3}d} \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sin a\end{aligned}\quad (6.29)$$

Wir werden im Abschnitt 6.7 diese zwei Kreuzkovarianzfunktionen noch einmal, auf eine recht anschauliche Art, ausgehend von den Kovarianzfunktionen der Lotabweichungen herleiten.

6.4 Empirische Bestimmung der Kovarianzfunktion

Da wir a priori keine Kenntnis über die Kovarianzfunktionen der Lotabweichungen besitzen, müssen wir sie empirisch bestimmen. Nachdem wir uns für einen mathematischen Ansatz der Funktion entschieden haben (6.25), genügt also die Bestimmung der Parameter σ_N und d (charakteristische Distanz).

Grundsätzlich bieten sich uns zwei Möglichkeiten an:

a) Mit Hilfe der Schwereanomalien Δg

Aus der Beziehung (6.18) und mit (6.25) erhalten wir sofort die Darstellung der Kovarianzfunktion Φ_{gg} der Schwereanomalien:

$$\begin{aligned}\Phi_{gg}(r) &= -g_0^2 \left[\frac{1}{r} \Phi_{NN}'(r) + \Phi_{NN}''(r) \right] \\ \Phi_{NN}'(r) &= -\frac{\sigma_N^2}{3d} \left(\frac{r}{d} + \frac{r^2}{d^2} \right) \cdot e^{-r/d} \\ \Phi_{NN}''(r) &= -\frac{\sigma_N^2}{3d^2} \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2} \right) \cdot e^{-r/d}\end{aligned}$$

damit:

$$\Phi_{gg}(r) = \frac{2g_0^2}{3d^2} \sigma_N^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{2d^2} \right) \cdot e^{-r/d}$$

bzw.:

$$\Phi_{gg}(r) = \sigma_g^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{2d^2} \right) \cdot e^{-r/d} \quad (6.30)$$

mit:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{g_0}{d} \cdot \sigma_N \quad (6.31)$$

Indem wir nun den Mittelwert $M(\Delta g_i \cdot \Delta g_k)$ aller Produkte $\Delta g_i \cdot \Delta g_k$ bilden, für welche die Distanz zwischen P_i und P_k den Wert r_j annimmt (bzw. in ein endliches Intervall mit r_j als Mittelpunkt fällt), erhalten wir einen Schätzwert der Kovarianz $\Phi_{gg}(r_j)$ für die Distanz $r = r_j$.

Somit können wir durch geeignete Distanzklassenbildung die Kovarianzen in diskreten Punkten darstellen. Anschliessend passen wir die Funktion (6.30) durch Variation der Parameter σ_g^2 und d in die empirisch ermittelten Werte ein. Aus (6.31) und (6.27) folgen σ_N und σ_ϵ .

Da die Varianz $\sigma_g^2 = \Phi_{gg}(r=0)$ des Signals um einige Zehnerpotenzen grösser ist als die Varianz der Beobachtungsfehler, können letztere bei der Bestimmung der Kovarianzfunktion vernachlässigt werden.

Der hauptsächliche Vorteil der Parameterbestimmung mit Hilfe der Schwereanomalien liegt in der normalerweise grossen Anzahl möglicher Paarbildungen, insbesondere in den kurzen Distanzen.

Leider stehen uns die bezüglich der drei im Abschnitt 4.3.4 besprochenen Massenmodellen reduzierten Schwereanomalien der Schweiz noch nicht zur Verfügung.

Wir bestimmen deshalb die Parameter

b) mit Hilfe der Lotabweichungen

Indem wir die Produktmittel in verschiedenen Distanzklassen für $\xi_i \cdot \xi_k$, $\eta_i \cdot \eta_k$ bzw. $\xi_i \cdot \eta_k$ bilden, können wir mit demselben Verfahren, wie oben angegeben, die Parameter bestimmen.

Zu beachten ist allerdings, dass eine zusätzliche Klasseneinteilung für die Azimute a gebildet werden muss, da die Kovarianzfunktionen (6.26) auch azimutabhängig sind.

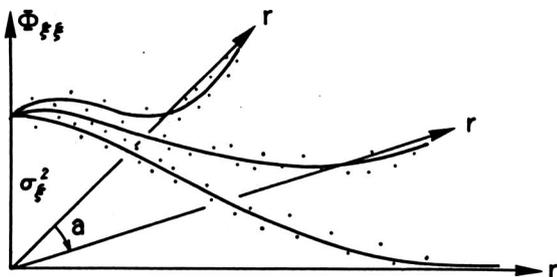


Fig. 6.5

Tragen wir beispielsweise die empirisch ermittelten $\Phi_{\xi\xi}$ in Funktion von r und a graphisch auf, haben wir die Aufgabe, die durch $\Phi_{\xi\xi}(r, a)$ definierte Fläche durch Variation der Parameter σ_{ξ}^2 und d in die Punktwolke einzupassen.

Falls wir aber die Längs- und Querkovarianzen $M(\epsilon_{\Omega} \cdot \epsilon'_{\Omega})$ und $M(\epsilon_{\Psi} \cdot \epsilon'_{\Psi})$ mit

$$\epsilon_{\Omega} = \xi \cos a + \eta \sin a; \quad \epsilon'_{\Omega} = \xi' \cos a + \eta' \sin a$$

$$\epsilon_{\Psi} = \xi \sin a - \eta \cos a; \quad \epsilon'_{\Psi} = \xi' \sin a - \eta' \cos a$$

berechnen, können wir auf die zusätzlichen Azimutklassen verzichten, da die Längs- und Querkovarianzen azimutunabhängig sind. Allerdings können damit diejenigen Stationen mit nur einer Lotabweichungskomponente nicht berücksichtigt werden.

Wie wir im Abschnitt 6.3 ausgeführt haben, gelten folgende Beziehungen: *)

$$\Phi_{\Omega\Omega}(r) = \Phi_{\xi\xi}(r, a = 0^\circ) = \Phi_{\eta\eta}(r, a = 90^\circ) = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2}\right) \cdot e^{-r/d} \quad (6.32)$$

$$\Phi_{\Psi\Psi}(r) = \Phi_{\xi\xi}(r, a = 90^\circ) = \Phi_{\eta\eta}(r, a = 0^\circ) = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) \cdot e^{-r/d} \quad (6.33)$$

Im weiteren entspricht $\Phi_{\xi\xi}$ der Funktion $\Phi_{\eta\eta}$ für $a = \pm 45^\circ$:

$$\Phi_{\xi\xi}(r, a = \pm 45^\circ) = \Phi_{\eta\eta}(r, a = \pm 45^\circ) = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{2d^2}\right) \cdot e^{-r/d} \quad (6.34)$$

In Figur 6.6 Seite 59 sind für diese 8 Spezialfälle die empirisch ermittelten Kovarianzen topographisch-isostatisch reduzierter LA der Schweiz in Klassen zu 10 km graphisch dargestellt. Im weiteren sind die entsprechenden Kovarianzfunktionen (6.32) bis (6.34) eingezeichnet, deren gemeinsame Parameter σ_ϵ^2 und d mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden.

Im Hinblick auf die Untersuchungen des Kapitels 7 (siehe auch Abschnitt 6.5) haben wir die Kovarianzfunktionen unter vorheriger Abspaltung verschiedener Trendanteile berechnet. Als Trendansatz verwendeten wir gewöhnliche Polynome (3.14).

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt:

Trendpolynom P_i	Topogr. red. LA		Top.isost. red. LA		Moho-red. LA	
	σ_ϵ	d	σ_ϵ	d	σ_ϵ	d
P_1 : 1. Grad	8"3	47 km	4"1	39 km	3"0	52 km
P_2 : 2. Grad	3"9	22 km	3"1	21 km	2"3	30 km
P_4 : 4. Grad	2"7	17 km	2"0	14 km	1"7	15 km

Tabelle 6.7: Parameter der Kovarianzfunktionen reduzierter LA

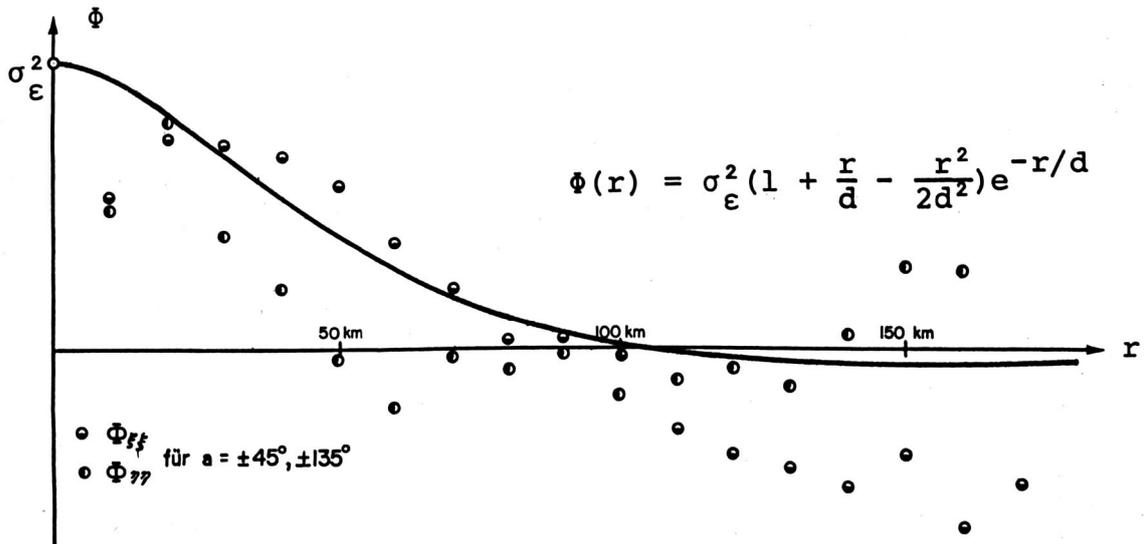
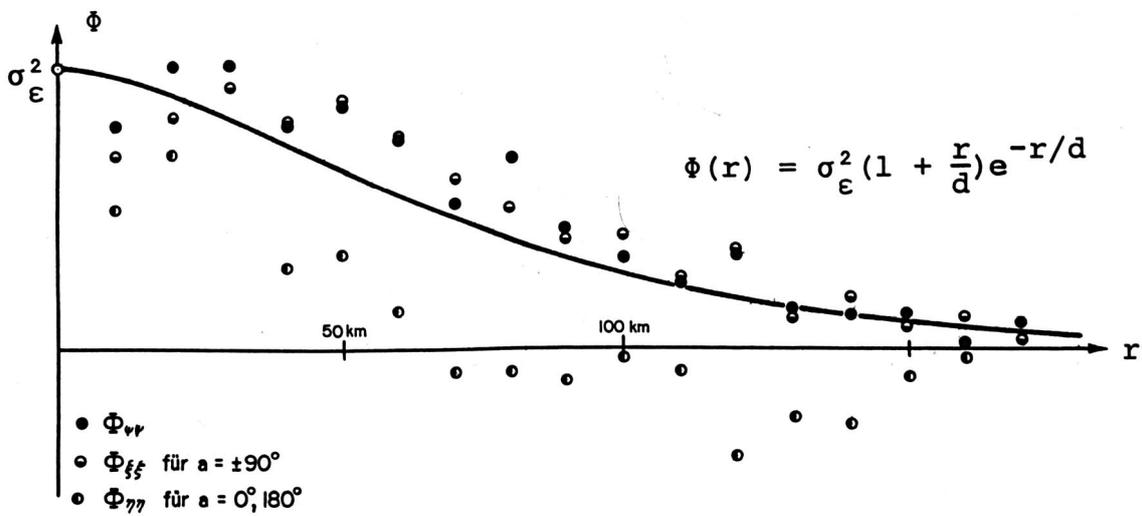
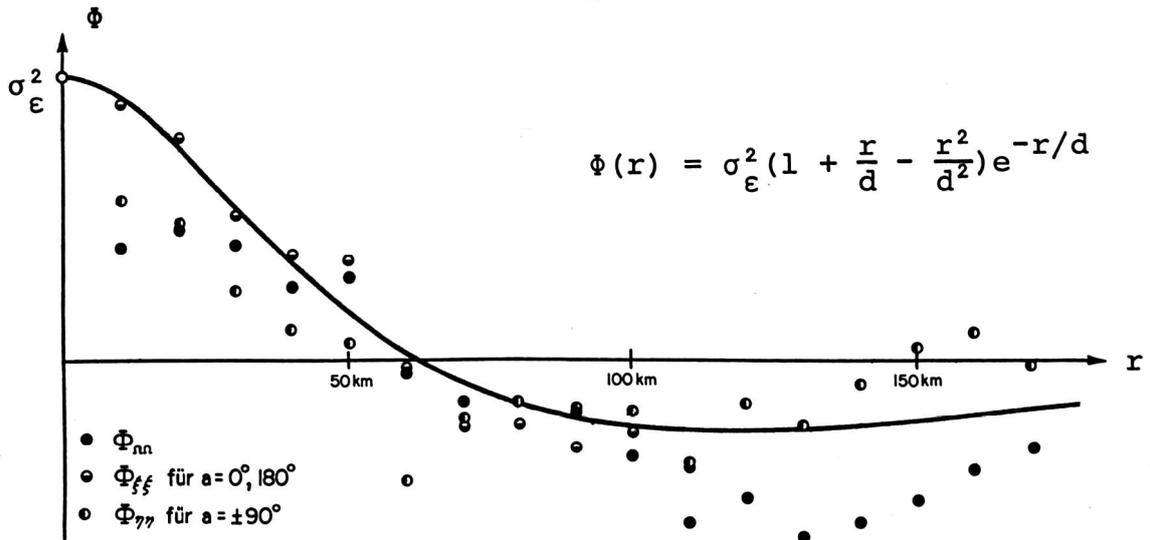
Der angegebene Grad der Polynome bezieht sich auf die Darstellung der dazugehörenden Fläche (3.13), so dass z.B. das ausgleichende Polynom 1. Grades effektiv nur eine Zentrierung von ξ und η bedeutet.

*) Die zusätzlichen Beziehungen wegen $\Phi_{ik}(r, a) = \Phi_{ik}(r, a + 180)$ verstehen sich von selbst und werden deshalb nicht speziell aufgeführt.

Kovarianzfunktionen

Topographisch-isostatisch reduzierte LA

Trend: $P_1 \rightarrow \sigma_\epsilon = 4.1 \quad d = 38.7 \text{ km}$



Figur 6.6

An Stelle der Berechnung diskreter Kovarianzwerte für einzelne Distanzklassen könnte jedes mögliche Produkt zweier Signale in Funktion seiner Distanz (bzw. Distanz und Azimut) direkt zur Bestimmung der Kovarianzfunktion herangezogen werden: Man könnte sich so von der willkürlichen Klasseneinteilung überhaupt lösen {Lauer, 1971}. Damit geht aber die Möglichkeit der einfachen graphischen Darstellung der empirischen Berechnung verloren.

c) Die Güte der Kovarianzfunktion und ihr Einfluss auf die Prädiktion

Da weder die Varianz der Kovarianzen noch die Konfidenzintervalle der berechneten Korrelationskoeffizienten ein brauchbares Mittel darstellen, um die Güte der empirisch ermittelten Kovarianzfunktion anzugeben {Rummel, 1975}, helfen wir uns mit den folgenden Ueberlegungen:

- Aus der graphischen Darstellung der empirischen Kovarianzen schätzen wir grob den Bereich ab, in welchem die tatsächliche Funktion etwa verlaufen kann. (Bsp.: $d = 38 \text{ km} \pm 10 \text{ km}$ maximal). Anschliessend können wir empirisch den Einfluss auf die Prädiktionsergebnisse berechnen, indem wir die Prädiktion mit beiden Extremwerten durchführen. Sowohl bei der Lotabweichungsinterpolation (Abschnitt 6.5) wie bei der Cogeoidbestimmung (Abschnitt 6.7) ist der Einfluss kleiner als 25 % des gesamten Prädiktionsfehlers.
- Uns interessiert vorallem der totale Prädiktionsfehler, mit andern Worten die Genauigkeit, mit der überhaupt Lotabweichungen und (Co-)Geoidhöhen in unserem Gebiet prädictiert werden können. Da wir (vgl. Kapitel 7) viele Sollwerte kennen, können wir diese Genauigkeit abschätzen. Wir könnten somit die Kovarianzfunktionen auch so bestimmen, dass wir diejenigen Parameter suchen, die im Mittel den kleinsten Prädiktionsfehler ergeben. (Siehe auch {Lauer, 1971}).

6.5 Die stochastischen Eigenschaften der Lotabweichungen

Im Abschnitt 6.3 haben wir allen Ueberlegungen die Geoidundulationen als homogenen, isotropen stochastischen Prozess zugrunde gelegt. Daraus folgt die statistisch homogene und isotrope Verteilung der Schwereanomalien und der Lotabweichungen (→ Längs- und Querkomponenten).

Allgemein gilt: Falls eine der Grössen homogen und isotrop verteilt ist, sind dies alle andern Grössen auch. ({Grafarend-Offermans, 1975}).

Diese Eigenschaft wurde bereits mehrfach für Schwereanomalien (Bsp.: {Kaula, 1959}) und Lotabweichungen (Bsp.: {Grafarend, 1971}) nachgewiesen.

Gerade bei lokal begrenzten Gebieten kann jedoch sowohl die Homogenität wie auch die Isotropie durch systematisch wirkende Anteile zerstört werden: Signalanteile, deren Wellenlängen in der Grössenordnung des betrachteten Gebietes liegen.

Leider genügt aber die Anzahl der uns zu Verfügung stehenden Lotabweichungen wie auch die Grösse des Gebietes kaum, um saubere Homogenitäts- und Isotropieuntersuchungen durchzuführen. Die Aufspaltung der empirischen Längs- und Querkovarianzen nach Azimutklassen lässt jedoch Anisotropien vermuten. Deshalb wurden verschiedene Trendanteile (Polynomansatz) bestimmt, von den Lotabweichungen abgespalten und die dazugehörenden Kovarianzfunktionen berechnet (Tabelle 6.7). Im Kapitel 7 wird der Einfluss dieser Trendabspaltungen auf die Prädiktionsergebnisse untersucht.

Ebensowenig konnten wir mit den vorhandenen Daten die Kovarianzfunktionen der nicht reduzierten LA bestimmen. Deshalb kann die in {Grafarend-Offermans, 1975} für das Gebiet von Deutschland nachgewiesene Eigenschaft, dass die charakteristische Distanz d für beobachtete wie für reduzierte LA nahezu identisch sei, für unser Gebiet nicht nachgeprüft werden. Die in der erwähnten Publikation gefundene Distanz von 48 km stimmt jedoch mit unseren Werten für die reduzierten LA gut überein (Tabelle 6.7, Trend P 1).

6.6 Interpolation von Lotabweichungen

Bosch und Wolf {1974} wiesen am Beispiel des Meridianprofils vom Gotthard nach, dass die Prädiktion von Lotabweichungen im Gebirge wesentlich verbessert werden kann, wenn diese vorgängig vom Einfluss der näheren Topographie (\rightarrow deterministischer Anteil!) befreit werden. Dies gilt, wie wir schon gesehen haben, natürlich nicht nur für die Prädiktion, sondern für alle LA-Interpolationsmethoden wie auch für die Bestimmung der entsprechenden Niveauflächen. Im folgenden werden wir stets die drei schon mehrmals erwähnten Massenmodelle (topographisches, topographisch-isostatisches und Moho-Modell) zur vorgängigen Reduktion verwenden. Zusätzlich können wir mit verschiedenen Polynomansätzen weitere Trendanteile abspalten.

Der Rechenaufwand der Prädiktion wird vorallem durch die Inversion der Kovarianzmatrix C_{xx} bestimmt. Da aber der Einfluss der Stützwerte mit zunehmendem Abstand vom zu interpolierenden Punkt stark abnimmt, kann die Rechenzeit beschränkt werden, indem nur Punkte zur Interpolation herangezogen werden, die näher als eine bestimmte Distanz vom Aufpunkt liegen: Für jeden Aufpunkt wird ein individuelles Einzugsgebiet gewählt.

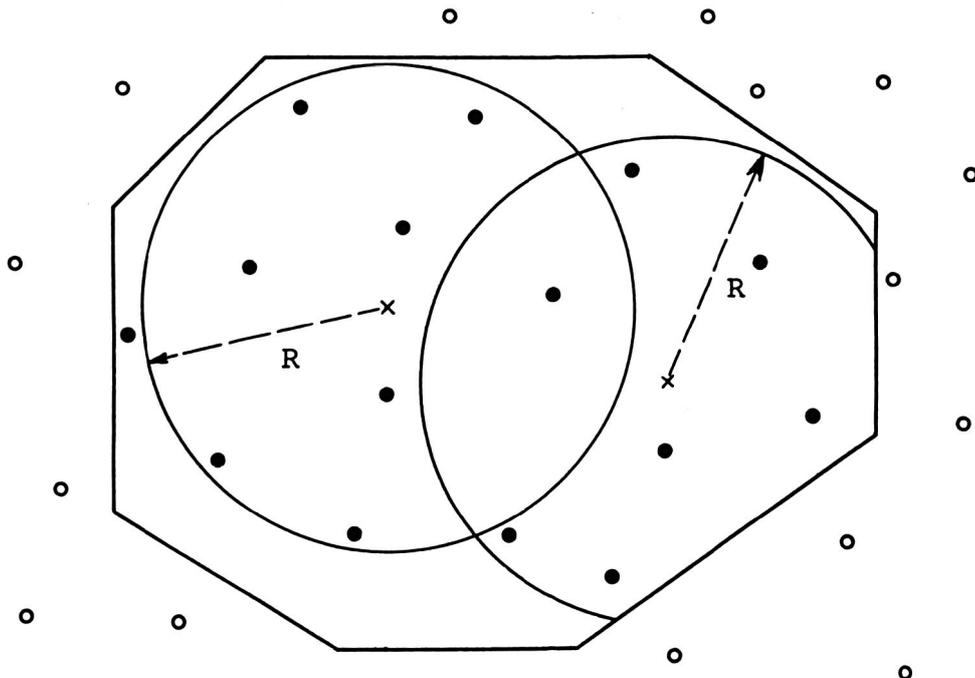


Fig. 6.8

Im Kapitel 7 wird der Einfluss verschiedener Trendabspaltungen und Einzugsgebieten auf die Lotabweichungsprädiktion anhand von Beispielen untersucht. Die Ergebnisse werden verglichen mit anderen Interpolationsmethoden.

6.7 Niveauflächenbestimmung

Bei den Ausführungen über das Flächennivellement wurde die Frage nach einer allfälligen Stützpunktverdichtung aufgeworfen. Wir können nun, ausgehend von einem beliebig verteilten Stützpunktfeld, in jedem dazwischenliegenden Punkt die Lotabweichungen präzisieren:

Die Festlegung einer Kovarianzfunktion und der zu benützenden Stützwerte ordnet dem ganzen Gebiet eindeutig einen stetigen Lotabweichungsverlauf zu.

Wir wollen uns nun überlegen, ob wir zur Bestimmung der Höhendifferenz zwischen zwei Punkten A und B kontinuierlich die Lotabweichungen interpolieren und das Integral $-\int_A^B \varepsilon \cdot ds$ exakt lösen können:

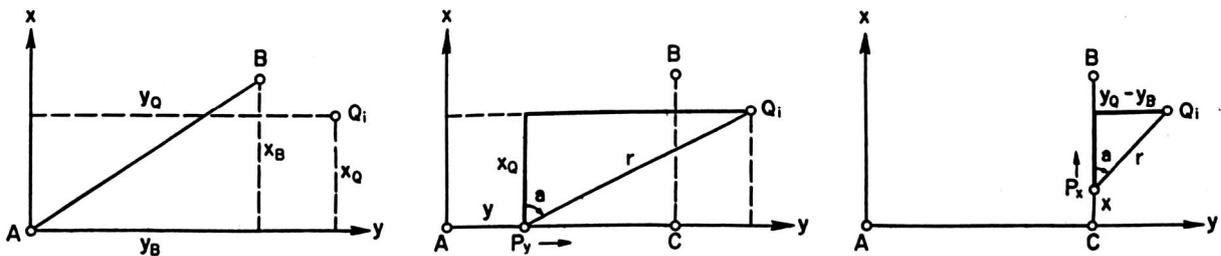


Fig. 6.9

Da das Integral $-\int_A^B \varepsilon \cdot ds$ wegunabhängig ist, integrieren wir zuerst in y-Richtung bis C, dann in x-Richtung bis B (vgl. Fig. 6.9):

$$\Delta N_{AB} = - \int_A^B \varepsilon ds = - \int_{y_A}^{y_C} \eta dy - \int_{x_C}^{x_B} \xi dx$$

η und ξ interpolieren wir mit Prädiktion: $\eta = \underline{c}_{\eta x} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{z}$

$$\xi = \underline{c}_{\xi x} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{z}$$

$\underline{c}_{\eta x}$ ist der Zeilenvektor der Kovarianzen zwischen η im Laufpunkt P_y und den Signalen ξ_i bzw. η_i in den Stützpunkten Q_i , $i = 1, m$

$$\underline{c}_{\eta x} = (\dots, c_{\eta \xi_{i-1}}, c_{\eta \eta_{i-1}}, c_{\eta \xi_i}, c_{\eta \eta_i}, c_{\eta \xi_{i+1}}, c_{\eta \eta_{i+1}}, \dots)$$

$\underline{c}_{\xi x}$ ist der Zeilenvektor der Kovarianzen zwischen ξ im Laufpunkt P_x und den Signalen ξ_i bzw. η_i in den Stützpunkten Q_i , $i = 1, m$

$$\underline{c}_{\xi x} = (\dots, c_{\xi\xi_{i-1}}, c_{\xi\eta_{i-1}}, c_{\xi\xi_i}, c_{\xi\eta_i}, c_{\xi\xi_{i+1}}, c_{\xi\eta_{i+1}}, \dots)$$

\underline{z} ist der Vektor der Stützwerte:

$$\underline{z}^T = (\dots, \xi_{i-1}, \eta_{i-1}, \xi_i, \eta_i, \xi_{i+1}, \eta_{i+1}, \dots)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta N_{AB} &= - \int_{y_A}^{y_C} \underline{c}_{\eta x} C_{xx}^{-1} \underline{z} \, dy - \int_{x_C}^{x_B} \underline{c}_{\xi x} C_{xx}^{-1} \underline{z} \, dx \\ &= \left[- \int_{y_A}^{y_C} \underline{c}_{\eta x} \, dy - \int_{x_C}^{x_B} \underline{c}_{\xi x} \, dx \right] C_{xx}^{-1} \underline{z} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Der Klammerausdruck bedeutet wieder einen Zeilenvektor, aus dem wir vorerst das Element, das die Beziehung zur Komponente η_i des Stützpunktes Q_i darstellt, herausgreifen wollen:

$$(\dots, - \int_{y_A}^{y_C} c_{\eta\eta_i} \, dy - \int_{x_C}^{x_B} c_{\xi\eta_i} \, dx, \dots)$$

Wir setzen nun in den Integralen für $c_{\eta\eta}$ bzw. $c_{\xi\eta}$ die von uns verwendeten Kovarianzfunktionen (6.26) ein:

$$- \int_{y_A}^{y_C} c_{\eta\eta} \, dy = - \int_{y_A}^{y_C} \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2}{d^2} \sin^2 a\right) e^{-r/d} \, dy$$

wobei (Fig. 6.9): $\sin^2 a = \frac{r^2 - x_Q^2}{r^2}$

$$y = y_Q - \sqrt{r^2 - x_Q^2}$$

$$dy = - \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_Q^2}} \, dr$$

$$= \sigma_{\epsilon}^2 \int_{r_A}^{r_C} \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r^2 - x_Q^2}{d^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_Q^2}} e^{-r/d} dr$$

$$= \sigma_{\epsilon}^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sqrt{r^2 - x_Q^2} \Big|_{r_A}^{r_C}$$

$$- \int_{y_A}^{y_C} c_{\eta\eta} dy = \sigma_{\epsilon}^2 r \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sin a \Big|_{r_A}^{r_C}$$

$$- \int_{x_C}^{x_B} c_{\xi\xi} dx = \int_{x_C}^{x_B} \sigma_{\epsilon}^2 \frac{r^2}{d^2} e^{-r/d} \sin a \cos a dx$$

wobei: $\sin a = \frac{y_Q - y_B}{r}$; $\cos a = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{r^2 - (y_Q - y_B)^2}$

$$x = x_Q - \sqrt{r^2 - (y_Q - y_B)^2}$$

$$dx = - \frac{r}{\sqrt{r^2 - (y_Q - y_B)^2}} dr$$

$$= - \sigma_{\epsilon}^2 \int_{r_C}^{r_B} \frac{r^2}{d^2} e^{-r/d} \frac{y_Q - y_B}{r} \frac{\sqrt{r^2 - (y_Q - y_B)^2}}{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (y_Q - y_B)^2}} dr$$

$$= - \sigma_{\epsilon}^2 \int_{r_C}^{r_B} (y_Q - y_B) \frac{r}{d^2} e^{-r/d} dr$$

$$- \int_{x_C}^x c_{\xi\xi} dx = \sigma_{\epsilon}^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} (y_Q - y_B) \Big|_{r_C}^{r_B} = \sigma_{\epsilon}^2 r \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sin a \Big|_{r_C}^{r_B}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 - \int_{y_A}^{y_C} c_{\eta\eta} dy - \int_{x_C}^{x_B} c_{\xi\eta} dx &= \sigma_\epsilon^2 r_B \left(1 + \frac{r_B}{d}\right) e^{-r_B/d} \sin a_{BQ} - \sigma_\epsilon^2 r_A \left(1 + \frac{r_A}{d}\right) e^{-r_A/d} \sin a_{AQ} \quad (6.36) \\
 &= c_{N\eta_Q}^{(B)} - c_{N\eta_Q}^{(A)}
 \end{aligned}$$

Analog gilt für die Komponente ξ von Q_i :

$$\begin{aligned}
 - \int_{y_A}^{y_C} c_{\eta\xi} dy - \int_{x_C}^{x_B} c_{\xi\xi} dx &= \sigma_\epsilon^2 r_B \left(1 + \frac{r_B}{d}\right) e^{-r_B/d} \cos a_{BQ} - \sigma_\epsilon^2 r_A \left(1 + \frac{r_A}{d}\right) e^{-r_A/d} \cos a_{AQ} \quad (6.36)' \\
 &= c_{N\xi_Q}^{(B)} - c_{N\xi_Q}^{(A)}
 \end{aligned}$$

Führen wir diese Integration für alle m Stützpunkte durch, erhalten wir sämtliche Elemente des Klammersausdruckes in (6.35), die wir in die Vektordifferenz $c_{Nx}^{(B)} - c_{Nx}^{(A)}$ zusammenfassen.

Wir können also setzen:

$$\Delta_{AB}^N = (c_{Nx}^{(B)} - c_{Nx}^{(A)}) C_{xx}^{-1} \underline{z} = c_{Nx}^{(B)} C_{xx}^{-1} \underline{z} - c_{Nx}^{(A)} C_{xx}^{-1} \underline{z} = N_B - N_A \quad (6.37)$$

Die Elemente der Zeilenvektoren c_{Nx} stellen nun offenbar die Kreuzkovarianzen zwischen den Niveauflächenhöhen N und den Lotabweichungskomponenten ξ bzw. η dar, wobei (6.36, 6.36'):

$$\begin{aligned}
 c_{N\xi} : \quad \Phi_{N\xi}(r,a) &= \sigma_\epsilon^2 r \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \cos a = \sigma_N \sigma_\epsilon \frac{r}{\sqrt{3} d} \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \cos a \\
 c_{N\eta} : \quad \Phi_{N\eta}(r,a) &= \sigma_\epsilon^2 r \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sin a = \sigma_N \sigma_\epsilon \frac{r}{\sqrt{3} d} \left(1 + \frac{r}{d}\right) e^{-r/d} \sin a
 \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\text{mit } \sigma_N = \sqrt{3} d \sigma_\epsilon \quad (\text{vgl. 6.27})$$

$\Phi_{N\xi}$ und $\Phi_{N\eta}$ entsprechen den Kovarianzfunktionen, die wir auf Seite 55 direkt mit den Beziehungen (6.19) und (6.20) hergeleitet haben: Eine Bestätigung der Selbstkonsistenz des statistischen Modelles.

Wir können uns somit für die Bestimmung des (Co-) Geoides vollständig von den geometrischen Methoden lösen: Wir erhalten die gesuchten Höhen direkt aus den Lotabweichungen der Stützpunkte mit Hilfe der multivariaten Prädiktion.

Die Varianz-Kovarianzmatrix für die Höhen in A und B finden wir mit Hilfe von (6.8)':

$$\Sigma_{NN} = C_{NN} - C_{Nx} C_{xx}^{-1} C_{Nx}^T \quad (6.39)$$

wobei:

$$C_{NN} = \begin{pmatrix} \Phi_{NN}(r=0) & \Phi_{NN}(r=r_{AB}) \\ \Phi_{NN}(r=r_{AB}) & \Phi_{NN}(r=0) \end{pmatrix} \quad ; \quad C_{Nx} = \begin{pmatrix} (A) \\ C_{Nx} \\ (B) \\ C_{Nx} \end{pmatrix}$$

Die Elemente der 1. Zeile von C_{Nx} werden gebildet aus den Kreuzkovarianzen zwischen der Höhe N_A (= zu interpolierendes Signal) und den Lotabweichungskomponenten ξ bzw. η der Stützpunkte. In der 2. Zeile finden wir die entsprechenden Grössen bezüglich N_B .

Die Varianz der prädizierten Höhen ist folglich

$$\sigma_{N_A}^2 = \Sigma_{NN}(1,1) \quad ; \quad \sigma_{N_B}^2 = \Sigma_{NN}(2,2) \quad (6.40)$$

und die Varianz der Höhendifferenz $\Delta N_{AB} = N_B - N_A$:

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \Sigma_{NN}(1,1) - 2\Sigma_{NN}(1,2) + \Sigma_{NN}(2,2) \quad (6.41)$$

Als Punkt A können wir beispielsweise den Fundamentalpunkt der Landesvermessung oder einen anderen geeigneten Punkt wählen, während der Punkt B der eigentliche Laufpunkt der Niveaufläche darstellt: Wir erhalten somit Höhendifferenzen und ihre Varianzen bezüglich unseres Ausgangspunktes A. (Damit verzichten wir auf die Berechnung der vollständigen Varianz-Kovarianz-Matrix aller Höhen).

Beispiel:

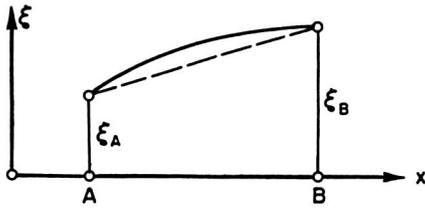


Fig. 6.10

Als kleines Beispiel wollen wir die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten A und B rechnen unter der Annahme, dass diese gleichzeitig die einzigen Stützpunkte sind und auf demselben Meridian liegen:

$$\Delta N_{AB} = (c_{N_B \xi_A} - c_{N_A \xi_A}, c_{N_B \xi_B} - c_{N_A \xi_B}) C_{xx}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix}$$

mit $c_{N_A \xi_A} = c_{N_B \xi_B} = 0$

und $c_{N_A \xi_B} = -c_{N_B \xi_A} = c_{N\xi}$ folgt:

$$\Delta N_{AB} = (-c_{N\xi}, -c_{N\xi}) C_{xx}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix}$$

Wir klammern in C_{xx} und $c_{N\xi}$ den Wert σ_ξ^2 aus, der sich dann bei der Multiplikation von $\frac{c_{N\xi}}{C_{xx}^{-1}}$ weghebt:

Damit wird:

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & c_{\xi\xi} \\ c_{\xi\xi} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_{xx}^{-1} = \frac{1}{1-c_{\xi\xi}^2} \begin{pmatrix} 1 & -c_{\xi\xi} \\ -c_{\xi\xi} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta N_{AB} = \frac{-1}{1-c_{\xi\xi}^2} (c_{N\xi}, c_{N\xi}) \begin{pmatrix} 1 & -c_{\xi\xi} \\ -c_{\xi\xi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix} = \frac{-c_{N\xi}}{1-c_{\xi\xi}^2} (1,1) \begin{pmatrix} 1 & -c_{\xi\xi} \\ -c_{\xi\xi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix}$$

$$\Delta N_{AB} = -\frac{c_{N\xi}}{1+c_{\xi\xi}} (\xi_A + \xi_B) \tag{6.42}$$

Für kleine r können wir den Wert $c_{N\xi}$ durch r , $c_{\xi\xi}$ durch 1 ersetzen (vgl. 6.38 und 6.26, $r/d \rightarrow 0$):

$$\underline{\Delta N_{AB}} \approx -\frac{r}{1+1} (\xi_A + \xi_B) = -\frac{r}{2} (\xi_A + \xi_B) \tag{6.43}$$

Für kleine r bewirken 2 Stützpunkte lineare Interpolation: Die ξ -Kurve wird durch eine Gerade ersetzt, die Höhendifferenz entspricht der Fläche des Trapezes. (Vgl. auch {Moritz, 1975}).

Es stellt sich nun noch die Frage, ob wir, wie bei der Lotabweichungsinterpolation, die Einzugsgebiete individuell festlegen können:

Für $r \rightarrow \infty$ geht die Kovarianzfunktion $\phi_{N\epsilon}$ gegen null. Entfernt sich also in (6.37) der Punkt A gegenüber Punkt B ins Unendliche, verschwindet der Vektor $\underline{c}_{Nx}^{(A)}$, und wir erhalten:

$$\Delta N_{A \rightarrow \infty, B} = \underline{N}_B = \underline{c}_{Nx}^{(B)} \cdot \underline{C}_{xx}^{-1} \cdot \underline{z} \quad (6.44)$$

N_B stellt also die Höhe des Punktes B gegenüber einem unendlich weit entfernten Punkt dar:

$$N_B = - \int_{-\infty}^B \epsilon ds \quad (6.45)$$

Diese "absolute" Höhe ist abhängig von den Werten aller Stützpunkte. Individuelle Einzugsgebiete verfälschen die Höhen der Punkte!

Beispiel:

Wir betrachten 10 Punkte, äquidistant auf der x-Achse angeordnet, mit dem in Figur 6.11 angegebenen Lotabweichungsverlauf.

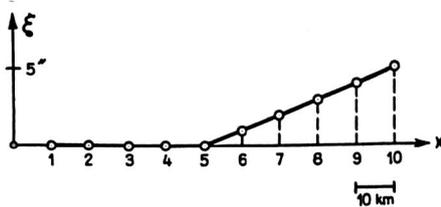


Fig. 6.11

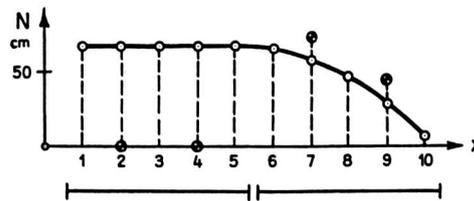


Fig. 6.12

Figur 6.12 zeigt den dazugehörigen Verlauf der Niveauläche, der sich unter Anwendung der Formel (6.44) ergibt.

Berechnen wir nun für die Punkte 2 und 4 die Höhen unter Beschränkung des Einzugsgebietes auf die Punkte 1 bis 5, erhalten wir die in der Figur mit \odot bezeichneten Werte. Ebenso beschränken wir das Einzugsgebiet für 7 und 9 auf die Punkte 6 bis 10.

Die so erhaltenen Höhen differieren vollständig von den Sollwerten. Die Höhendifferenzen $\Delta N_{2,4}$ und $\Delta N_{7,9}$ jedoch sind nahezu richtig. Dies rührt davon her, dass der interpolierte Lotabweichungsverlauf zwischen benachbarten Punkten von den weit entfernten Stützwerten praktisch nicht beeinflusst wird.

Somit erhalten wir nahezu richtige Höhendifferenzen für benachbarte Punkte, auch wenn wir für jede Höhendifferenz ein individuelles Einzugsgebiet bestimmen.

Falls uns also nur Höhendifferenzen benachbarter Punkte bzw. Höhen innerhalb eines kleinen Gebietes interessieren, lohnt es sich wegen des Rechenaufwandes, die Anzahl der Stützwerte entsprechend zu reduzieren.

Zum Aufbau einer grösseren Fläche ist diese Methode jedoch schlechter geeignet, da sich sehr bald Mehrdeutigkeiten bemerkbar machen: Es spielt eine Rolle, aus welchen Teilen eine Höhendifferenz zusammengesetzt wird. Die eindeutige Zuordnung bringt nur die Berücksichtigung aller Stützpunkte.

Im weiteren verliert man mit individuellen Einzugsgebieten die Möglichkeit, eine sinnvolle Varianz-Kovarianz-Matrix der Höhen (bzw. Höhendifferenzen bezüglich eines Ausgangspunkt) anzugeben.

Für die Bestimmung des Geoides in der Schweiz werden wir deshalb ein gemeinsames Einzugsgebiet verwenden.

Wir wollen noch kurz die Eigenschaften der "direkten" Undulationsprädiktion zusammenfassen:

- Direkte Bestimmung der Niveaufläche an beliebig vielen Punkten (Stützpunkten und Zwischenpunkten) ohne vorgängige Lotabweichungsinterpolation.
- Wir erhalten Genauigkeitsangaben beliebiger Höhendifferenzen, insbesondere bezüglich eines Ausgangspunktes.
- Eine gleichzeitige LA-Interpolation ist möglich: Es ist nur der Vektor \underline{c}_{Nx} durch die Zeilenvektoren $\underline{c}_{\xi x}$ und $\underline{c}_{\eta x}$ zu ersetzen. (6.44).
- Es kann ebenfalls gleichzeitig eine Filterung der Stützwerte durchgeführt werden.
- Stützpunkte mit nur einer LA-Komponente können auch verwendet werden.

- Zusätzlich zu den LA könnten Schwereanomalien als weitere Stützwerte eingeführt werden. Allerdings müssten sie sich auf dasselbe Referenzellipsoid beziehen und mit demselben Massenmodell reduziert werden wie die Lotabweichungen. Neben der Autokovarianzfunktion $\Phi_{gg}(r)$ (6.30) benötigen wir noch die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen Δg und den Lotabweichungen und (Co-)Geoidundulationen. Man findet sie für das Markovmodell 3. Ordnung beispielsweise in {Jordan, 1972}.
- Im weiteren können (Co-)Geoidhöhen als Beobachtungen oder Festwerte (beispielsweise als Resultat einer vorgängigen Profilauswertung) eingeführt werden. Dabei muss jedoch zusätzlich eine Nullpunktskorrektur N_0 bestimmt werden, die diese Höhen in das durch die LA gegebene System transformiert:

$$N = N_0 + N_{\text{SIGNAL}} \quad (+ N_{\text{NOISE}})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{SIGNAL}} + \varepsilon_{\text{NOISE}}$$

N_0 wird mit (6.12) bestimmt, wobei: $\underline{u} = N_0$; $A^T = (\dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots)$
 1.1 $\underline{x}^T = (\dots \xi_i \dots \eta_j \dots N_k \dots)$

und (6.11): $\Delta N_{AB} = (c_{Nx}^{(B)} - c_{Nx}^{(A)}) C_{xx}^{-1} (\underline{x} - A\underline{u})$

7. BERECHNUNGEN, VERGLEICHE, INTERPRETATIONEN

7.1 Einleitende Bemerkungen

Nachdem wir nun einige, für uns in Frage kommende Methoden der Niveauflächenbestimmung zusammengestellt und zum Teil weiterentwickelt haben, wollen wir im folgenden Kapitel die einzelnen Methoden anhand ausgewählter Beispiele auf ihre Leistungsfähigkeit prüfen und untereinander vergleichen.

Die 4 beobachteten Geoidprofile (Parallele von Zürich und Locarno, Meridiane vom Gotthard und von Lugano) ergeben für uns einerseits eine Vielzahl bekannter Lotabweichungen, andererseits, dank der sehr kurzen Punktabstände, ebenso viele genau bestimmte Geoidhöhen. Da mit den Methoden der Prädiktion und der Polynomdarstellung sowohl Lotabweichungen wie auch Geoidhöhen an beliebigen Punkten interpoliert werden können, haben wir die Möglichkeit, ausgehend von verschiedenen dichten Stützpunktnetzen *) die interpolierten Werte in den Profilverpunkten mit den Sollwerten zu vergleichen.

Als erstes berechnen wir im Abschnitt 7.2 die Geoidprofile neu und vergleichen die Resultate mit den Höhen, die in den Bänden 20, 22 und 24 der SGK publiziert sind.

Im Abschnitt 7.3 untersuchen wir die Interpolation von Lotabweichungen, im Abschnitt 7.4 die Niveauflächenbestimmung mit Hilfe der Prädiktion und der Polynomdarstellung.

Das Flächennivellement liefert nur Geoidhöhen in den Stützpunkten. Als Sollwerte benutzen wir zu seiner Untersuchung im Abschnitt 7.5 die aus der definitiven Geoidberechnung resultierenden Höhen. Im selben Abschnitt werden alle betrachteten Methoden der Niveauflächenbestimmung miteinander verglichen.

Im Abschnitt 7.6 berechnen wir den Einfluss der Fehler der Geoidhöhen auf die Reduktion von gemessenen Schrägdistanzen.

Endlich wollen wir im Abschnitt 7.7 das Geoid der Schweiz mit der (gemäss den Ergebnissen der numerischen Untersuchungen) geeignetsten Methode bestimmen.

*) Als Stützpunkte bezeichnen wir im folgenden immer Punkte, deren Lotabweichungen als Stützwerte in die Lotabweichungsinterpolation und Niveauflächenbestimmung eingeführt werden.

7.2 Geoidprofile

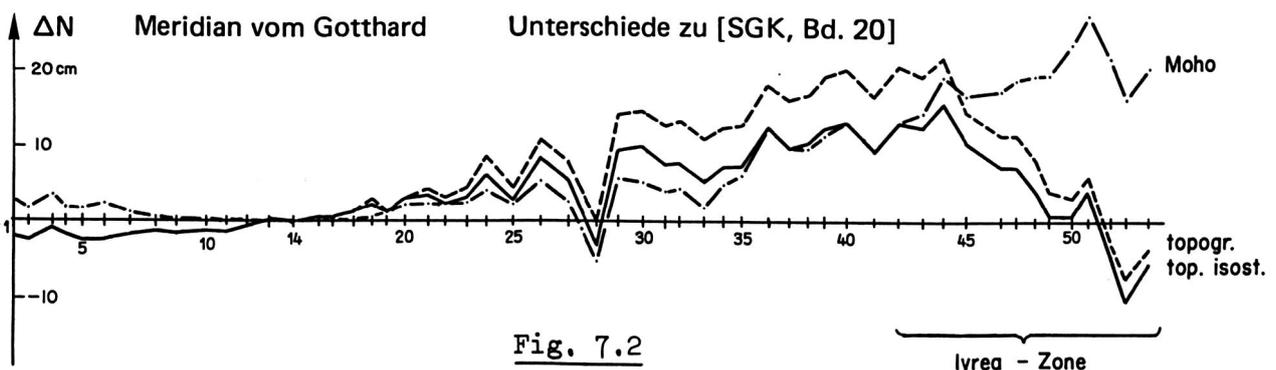
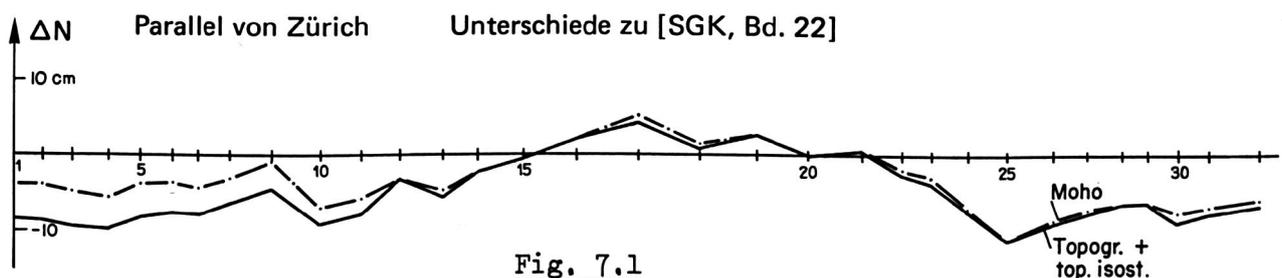
Vorerst haben wir für alle 102 Profilpunkte die mit den 3 Massenmodellen (topographisch-, topographisch-isostatisch-, moho-) reduzierten Lotabweichungen und die entsprechenden Störpotentialwerte berechnet (vgl. Fig. 4.21 - 4.23). Aus den reduzierten LA folgen, mit Hilfe der Prädiktion, die verschiedenen Cogeoid-schnitte (Bsp. in Fig. 4.15) und mit dem Satz von Bruns die entsprechenden Geoidhöhen.

Indem wir die Kovarianzmatrix C_{ss} der (reduzierten) Lotabweichungen um die Matrix C_{nn} der mittleren Beobachtungsfehler erweiterten, führten wir gleichzeitig mit der Höhenbestimmung eine Filterung der LA durch.

Die so gefilterten LA und die resultierenden Cogeoid- und Geoidhöhen benützen wir im folgenden als Soll- und Vergleichswerte zur Beurteilung der verschiedenen Interpolationsmethoden.

Die aus den drei Reduktionsarten resultierenden Geoidhöhen sollten nun theoretisch untereinander und mit den in {SGK Bd. 20, 22, 24} publizierten Werten übereinstimmen.

In den Figuren 7.1 und 7.2 sind die Differenzen der Geoidhöhen gegenüber den Höhen der SGK graphisch dargestellt:



Diese Unterschiede treten hauptsächlich aus den folgenden zwei Gründen auf:

1. Die Integration $\int \epsilon ds$ wurde in den Bänden der SGK über die Oberflächen-LA durchgeführt. Deren Verlauf ist aber sehr bewegt und trotz der engen Punkt-abstände schwierig darzustellen.

Die Integration $\int \Delta \epsilon ds$ über die reduzierten LA ist beträchtlich genauer.

2. In der Darstellung des Geoides via Cogeoid und Satz von Bruns steckt implizite, wie wir in Abschnitt 4.3.2 ausgeführt haben, die Berechnung der Lotkrümmungen. Ebenso auch in der in den erwähnten Bänden verwendeten orthometrischen Korrektur.

Der Vergleich einiger verschieden berechneter Lotkrümmungen zeigt nun beträchtliche Unterschiede; Im Einzugsgebiet der Ivreazone erhalten wir mit dem Moho-Massenmodell bis zu 4" andere Krümmungen als mit dem topographischen bzw. topographisch-isostatischen Modell. Damit lassen sich die Differenzen zwischen den verschieden berechneten Geoidhöhen vollständig erklären.

7.3 Interpolation von Lotabweichungen

7.3.1 Konzept

Wir legen den Untersuchungen zwei Stützpunktnetze verschiedener Dichte zu Grunde:

1. Netz : Durchschnittliche Dichte wie im Gebiet mit den wenigsten LA-Stationen (Graubünden): Total 37 Punkte mit 73 LA-Komponenten (Fig. 7.3).

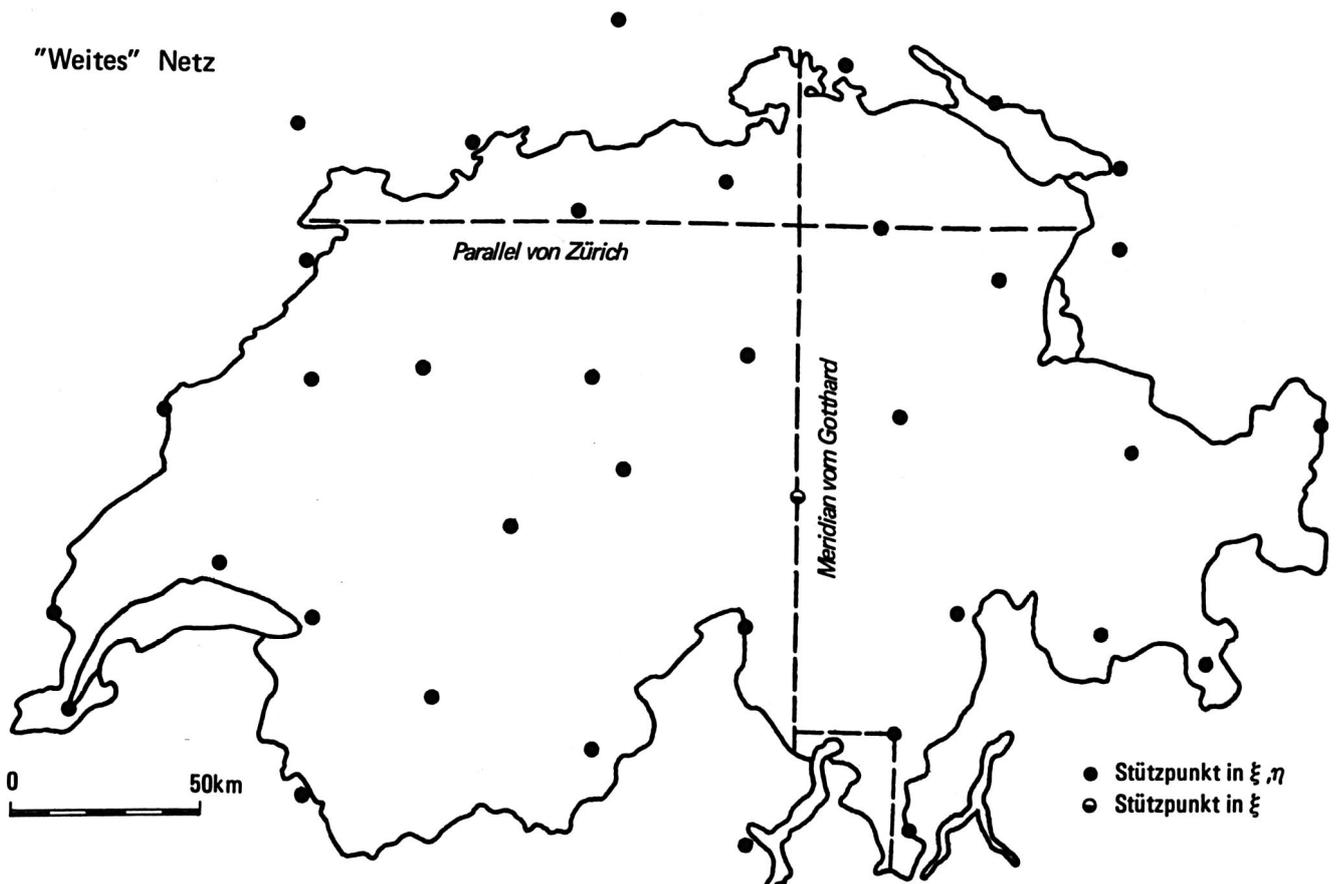


Fig. 7.3

2. Netz : Durchschnittliche Dichte etwa wie im Mittelland: Total 53
"enges Netz" Punkte mit 103 LA-Komponenten (Fig. 7.4)

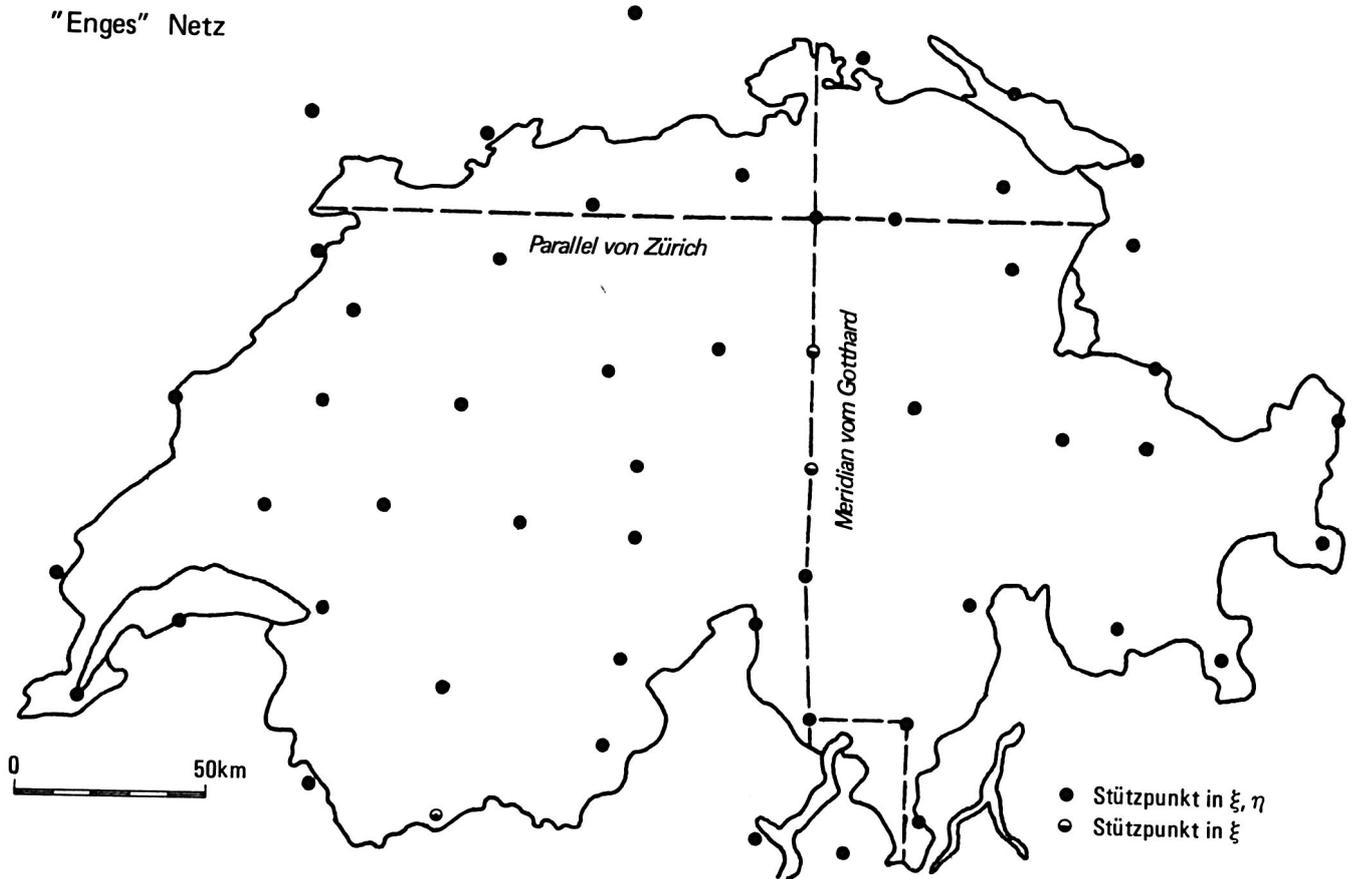


Fig. 7.4

Ausgehend von diesen Stützpunkten können wir nun die Lotabweichungen für die Profile bestimmen und mit den im Abschnitt 7.2 ermittelten Sollwerten vergleichen.

7.3.2 Prädiktion

Wir untersuchen den Einfluss folgender Parameter:

- Individuelle Einzugsgebiete verschiedener Radien bzw. ein gemeinsames Einzugsgebiet für alle zu interpolierenden Punkte.
- Verschiedene Trendabspaltungen: Polynome 1., 2. und 4. Grades. (Vgl. Bemerkung Seite 58 unten).
- Verschiedene Massenmodelle zur Reduktion der Lotabweichungen.

Als Stützwerte der Interpolation verwenden wir zunächst die Punkte des "engen Netzes". Wir ordnen ihnen mittlere Fehler gemäss der Tabelle Seite 3 zu, führen

also gleichzeitig eine Filterung der Stützwerte durch.

a) Einfluss der Einzugsgebiete

In Figur 7.5 sind die Interpolationsfehler für folgende Spezifikationen dargestellt:

- Trendpolynom P_1
- Topographisch-isostatische Reduktion
- enges Netz
- Meridian vom Gotthard
- individuelle Einzugsgebiete mit $R = 40$ km, $R = 70$ km und $R = \infty$ (= das gesamte Einzugsgebiet)

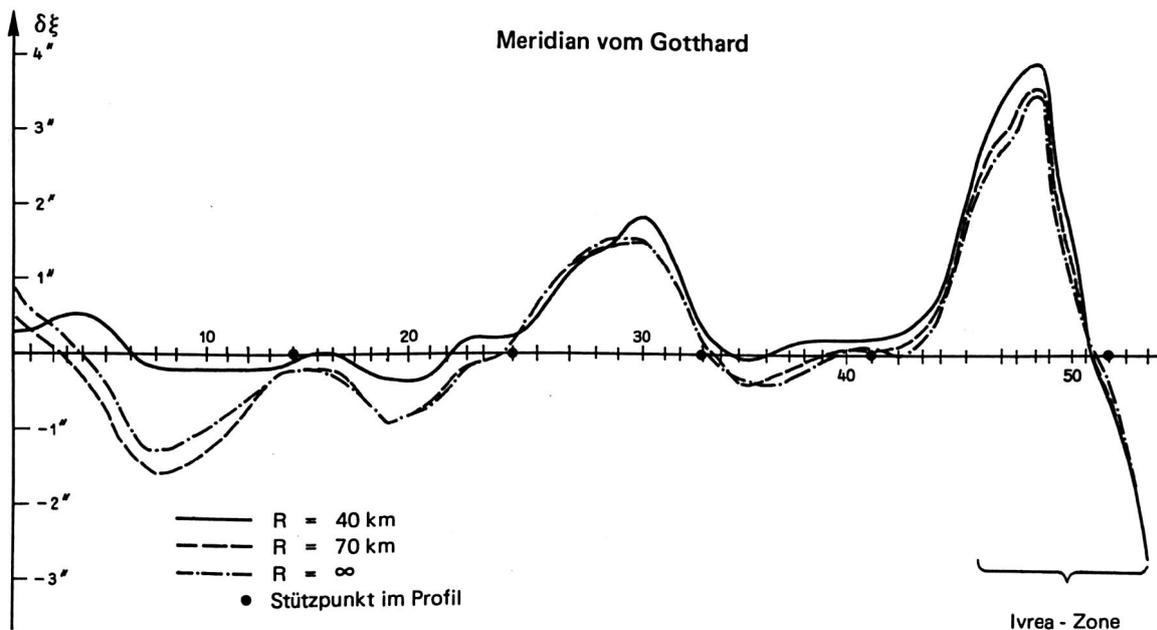


Fig. 7.5

Innerhalb des Einzugsgebietes mit Radius $R = 40$ km liegen für unser "enges Netz" im Durchschnitt ca. 4 Stützpunkte. Eine Vergrößerung des Radius, d.h. der Anzahl Stützwerte, bringt keine merkbare Erhöhung der Interpolationsgenauigkeit. Die LA-Interpolation kann lokal sehr begrenzt ausgeführt werden.

In der Figur 7.5 sind zusätzlich die in das Profil fallenden Stützpunkte des Testnetzes angegeben. Man beachte, wie die interpolierten Werte dieser Punkte in die Nähe der Sollwerte gezwungen werden. Die verbleibenden Abweichungen stellen den als Messfehler interpretierten, herausfiltrierten "noise" dar.

Anmerkung:

Nur wenn die entsprechenden Resultate der übrigen Geoidprofile wesentlich anders ausfallen, werden sie im folgenden speziell erwähnt. Die Ergebnisse der einzelnen Varianten liegen im Parallel von Zürich noch näher beisammen, da dessen reduzierte LA ruhiger verlaufen,

Die Verhältnisse im Meridian von Lugano und im Parallel von Locarno entsprechen ungefähr denjenigen im südlichsten Teil des Gotthardprofils (Einflussgebiet der Ivreazone!).

Ebenso gelten die Ueberlegungen auch, wo nicht anders vermerkt, für die topographisch und die moho- reduzierten Lotabweichungen,

b) Einfluss der Trendabspaltungen

Vorgängig jeder Prädiktion wird ein Trendanteil abgespalten, der vorher mit einem Polynomansatz beliebigen Grades bestimmt wurde. In der Figur 7.6 sind die Interpolationsfehler für folgende Spezifikationen dargestellt:

- Individuelles Einzugsgebiet $R = 50$ km
- Top.isost. Reduktion
- enges Netz
- Meridian vom Gotthard
- Trendpolynome 1., 2. und 4. Grades

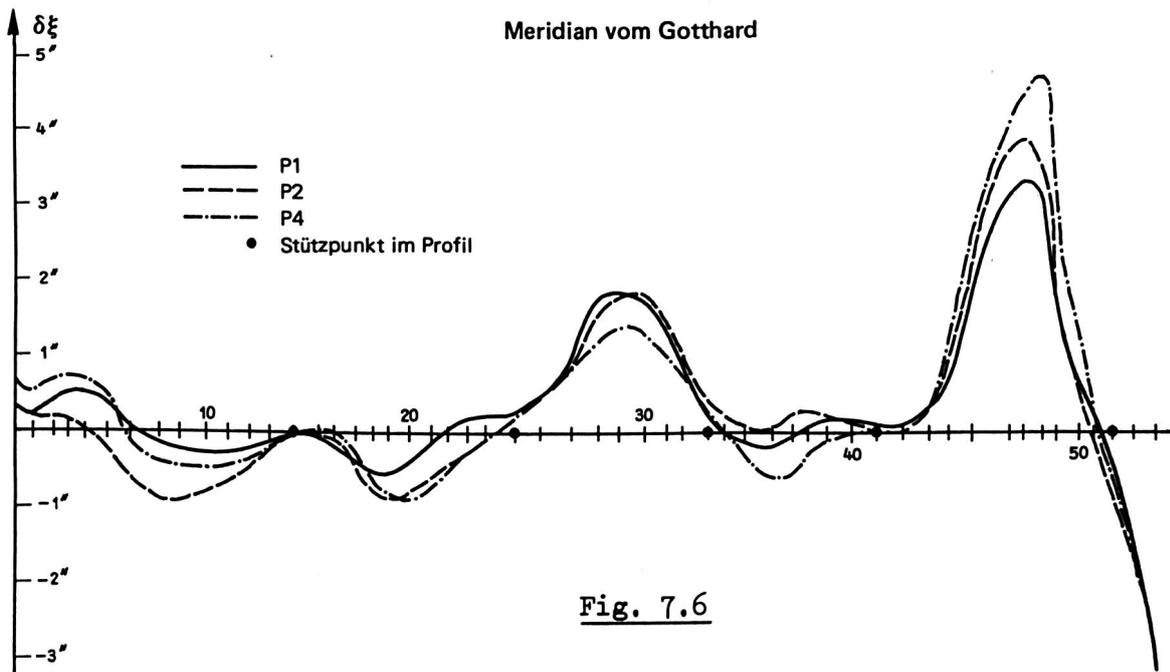


Fig. 7.6

Die Art der Trendabspaltung hat praktisch keinen Einfluss auf die Interpolationsgenauigkeit von reduzierten Lotabweichungen.

c) Einfluss der Reduktionen (Massenmodelle)

Die Figur 7.7 zeigt die Interpolationsfehler für folgende Spezifikationen:

- Trendpolynom P_1
- das gesamte Einzugsgebiet
- enges Netz
- Meridian vom Gotthard
- nicht-reduzierte LA im Geoid; topographisch-, top.isostatisch- und moho-reduzierte LA

Es fällt auf, dass die vorgängige Reduktion der Lotabweichungen eine wesentliche Genauigkeitssteigerung der Interpolation bringt. Dies bestätigt vollauf die Resultate der Untersuchungen von Bosch-Wolf [1974].

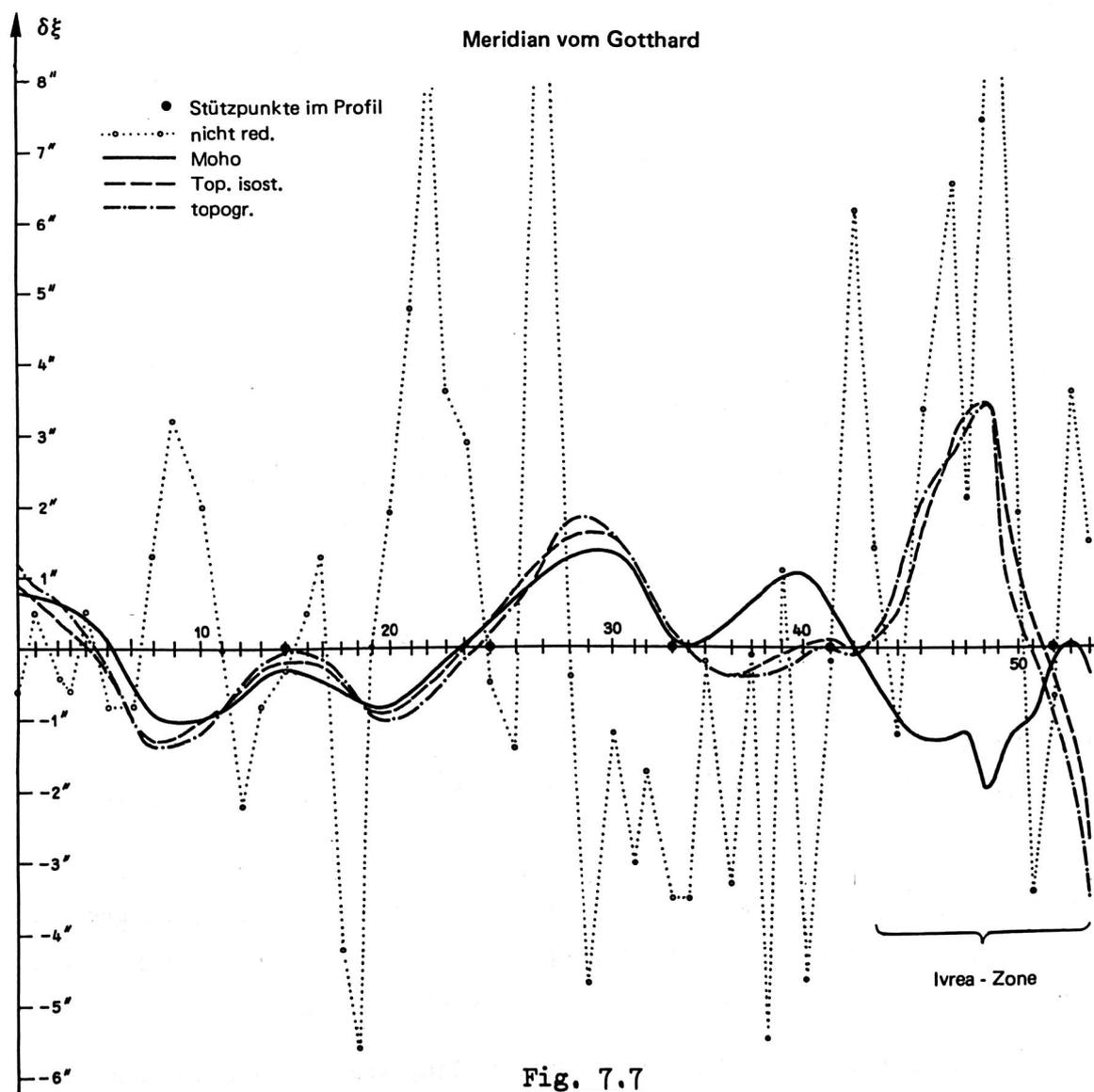


Fig. 7.7

d) Die Interpolationsgenauigkeit

Ausserhalb des Einflussgebietes der Ivreazone sind die Interpolationen der mit den drei verschiedenen Modellen reduzierten LA einander gleichwertig:

Der mittlere Interpolationsfehler, berechnet aus Differenzen zwischen den Soll- und den interpolierten Werten von 70 Profilpunkten, ergibt sich für alle Reduktionsmodelle zu

$$m_t \approx m_{ti} \approx m_M \approx 0{''}7$$

wobei als Stützpunkte diejenigen des "engen Netzes" verwendet wurden.

Im Einflussgebiet des Ivreakörpers senkt jedoch dessen Berücksichtigung (Moho-Modell) den Interpolationsfehler beträchtlich:

Der Vergleich der interpolierten LA mit den Sollwerten von 25 Profilpunkten des Tessins ergibt für die

$$\begin{aligned} \text{Topographisch-isostatische Reduktion: } m_{ti} &= 2'' \\ \text{Moho - Reduktion (inkl. Ivreakörper!): } m_M &= 1'' \end{aligned}$$

m_M liegt damit im Tessin in der gleichen Grössenordnung wie in der übrigen Schweiz.

Die Prädiktion liefert uns, bei Anwendung der Formel (6.8), ebenfalls den zu erwartenden mittleren Interpolationsfehler für alle interpolierten Werte. Er wird bestimmt durch die Verteilung und mittleren Fehler der Stützwerte, der Lage der zu interpolierenden Punkte sowie der Kovarianzfunktionen $\phi_{\xi\xi}$, $\phi_{\xi\eta}$ und $\phi_{\eta\eta}$ der Lotabweichungen. Entscheidend dabei ist insbesondere die Grösse $\sigma_\varepsilon^2 = \phi_{\varepsilon\varepsilon}(r=0)$.

Für unsere Spezifikationen liegt er zwischen 0{''}4 und 0{''}7, in guter Uebereinstimmung mit den empirischen, oben angegebenen Werten.

Das "enge Netz" entspricht einer Minimalpunktdichte von LA-Stationen, wie wir sie, mit Ausnahme der Kantone Graubünden und Wallis, in der ganzen Schweiz vorfinden.

Die Prädiktion moho-reduzierter LA gibt uns also die Möglichkeit, im grössten Teil der Schweiz mit den uns zur Verfügung stehenden Stützwerten Lotabweichungen zu interpolieren, deren mittlere Fehler kleiner als $\pm 1''$ sind.

In den Gebieten geringerer Punktdichte (Graubünden, Wallis) beträgt die Interpolationsgenauigkeit, wie analoge Untersuchungen mit dem "weiten Netz" zeigten, zwischen 0{''}7 und 1{''}3.

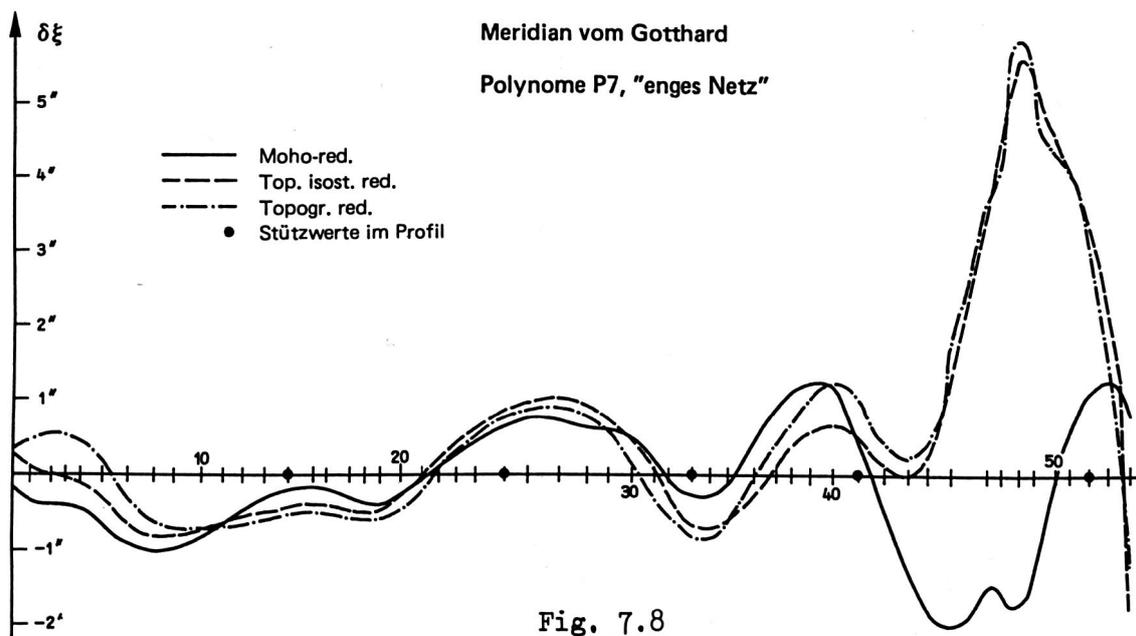
7.3.3 Polynominterpolation

Mit Hilfe der Formeln (3.14) können wir, ausgehend von einer Anzahl gegebener (reduzierter) Lotabweichungen die Koeffizienten einer Polynomdarstellung der entsprechenden Niveaufläche bestimmen. Anschliessend können wir diese Darstellung, bzw. ihre ersten Ableitungen, dazu benützen, weitere Lotabweichungskomponenten zu interpolieren. (Vgl. auch {Elmiger, 1969}).

Im folgenden wollen wir die Genauigkeit einer solchen Interpolation mit demselben Verfahren wie im vorherigen Abschnitt abschätzen, wobei wir uns auf die Darstellung der gesamten Niveaufläche der Schweiz beschränken, (Also keine "lokale" Interpolation; dieselbe Darstellung soll später auf ihre Eignung zur (Co-) Geoidbestimmung untersucht werden.)

Die kleinsten Interpolationsfehler erhalten wir, unabhängig von der Reduktionsmethode, falls wir das entsprechende Cogeoid mit einem Polynom 7. Grades darstellen (in Uebereinstimmung mit {Elmiger, 1975}).

Auch bei der Polynominterpolation sind ausserhalb des Einflussgebietes der Ivreazone die drei Reduktionsarten einander praktisch ebenbürtig. Im Südteil des Gotthardprofils (vgl. Fig. 7.8) wie auch in den Profilen von Locarno und Lugano bemerken wir aber eine wesentliche Verbesserung durch die Mohoreduktion.



Die aus der Polynominterpolation resultierenden mittleren Interpolationsfehler moho-reduzierter LA entsprechen in allen Geoidprofilen denjenigen der Prädiktionsfilterung.

7.3.4 Vergleich Prädiktion ↔ Polynominterpolation

Das Ergebnis des letzten Abschnittes, dass beide Interpolationsverfahren für moho-reduzierte LA dieselbe Genauigkeit liefern, stützt sich auf Untersuchungen mit dem "weiten" und dem "engen" Stützpunktnetz. Verdichten wir aber die Stützpunkte weiter, zeigt sich der Unterschied der beiden Methoden:

Jeder zusätzliche Stützwert verbessert bei der Prädiktion unmittelbar die Interpolationsgenauigkeit in der näheren Umgebung dieses Stützwertes. Auf das Interpolationspolynom hat er jedoch praktisch keinen Einfluss. Eine Erhöhung des Polynomgrades bringt oft in ganz anderen Gebieten unerwünschte Effekte.

Die Figuren 7.9 und 7.10 zeigen die Interpolationsfehler beider Methoden je für drei verschiedene Stützpunktdichte:

- "weites" Netz
- "enges" Netz
- Netz mit allen Stützwerten, die später zur definitiven Geoidbestimmung (Fig. 7.18) verwendet werden

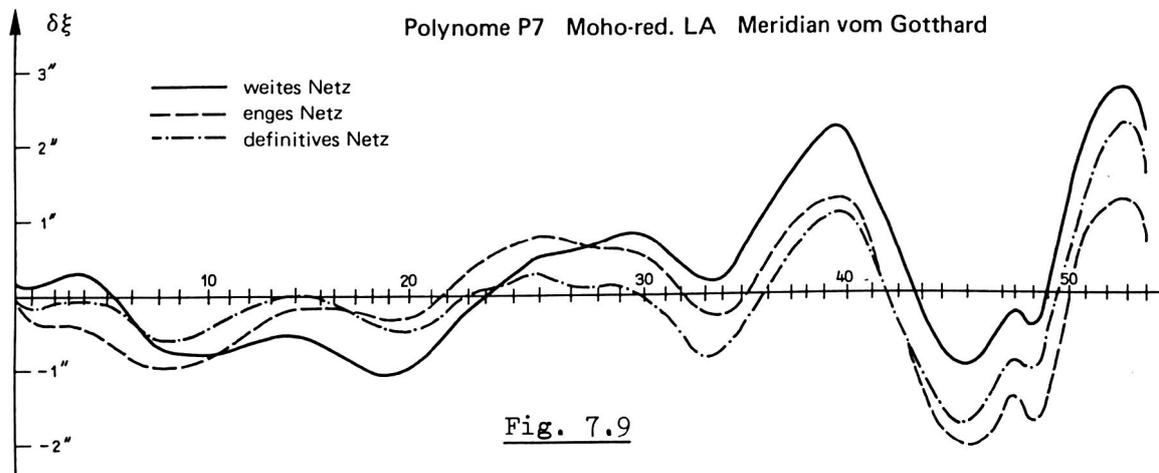


Fig. 7.9

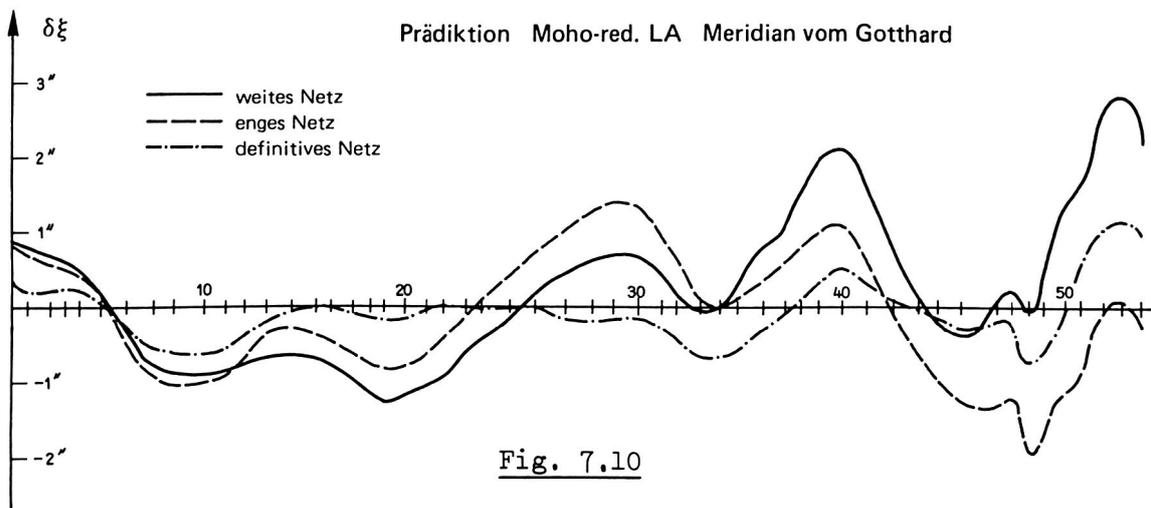


Fig. 7.10

Der Schritt vom engen zum definitiven Netz ergibt nur bei der Prädiktion eine weitere Verbesserung der Interpolation (v.a. im südlichen Teil des Profiles).

7.4 (Co-)Geoidbestimmung mit Prädiktion und Polynomapproximation

In diesem Abschnitt untersuchen wir die multivariate Prädiktion und die Polynomapproximation als Methoden der (Co-)Geoidbestimmung. Dabei gehen wir, wie im vorigen Abschnitt, wieder von verschiedenen dichten Stützpunktnetzen aus, berechnen die Cogeoid- und Geoidhöhen der Profilpunkte und vergleichen sie mit den in 7.2 bestimmten Sollhöhen.

Falls für die Beurteilung der LA-Interpolation nicht nur der Betrag, sondern auch die Vorzeichen der Interpolationsfehler berücksichtigt werden, bedeuten zwei gleichwertige Interpolationsmethoden im allgemeinen auch zwei gleichwertige entsprechende Methoden der Geoidbestimmung.

Wir können deshalb folgende Resultate des letzten Abschnittes auch auf die Geoidbestimmung übertragen:

1. Prädiktion: Die Art der vorgängigen Trendabspaltung hat keinen merkbaren Einfluss auf die Geoidhöhenbestimmung
2. Polynome: Ein Polynom 7. Grades ergibt für das Gebiet der Schweiz die beste Approximation der Cogeoide
3. Reduktionen: Im Einflussgebiet der Ivreazone ergibt die Mohoreduktion die kleinsten Höhenfehler.
Ausserhalb dieses Gebietes sind die drei betrachteten Reduktionsarten praktisch gleichwertig.

Als Illustration zeigen wir einige Beispiele. In den Figuren bedeutet δN jeweils $N_{\text{soll}} - N_{\text{int}}$.

Zu 1.: Wir vergleichen die Höhenfehler am Beispiel des Gotthardmeridians, "enges Netz", topographisch-isostatische Reduktion.

Die vorgängig abgespaltenen Trendanteile: Polynom 1., 2. bzw. 4. Grades.

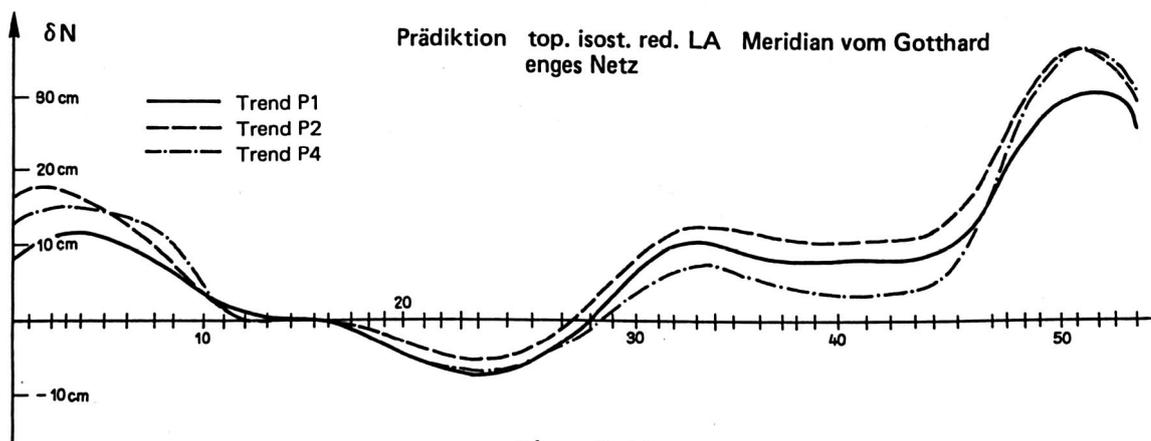
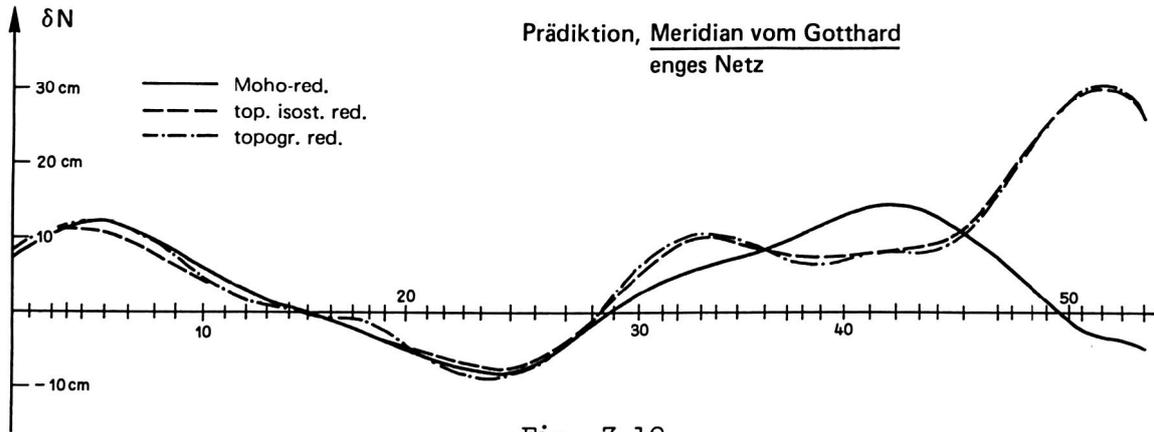
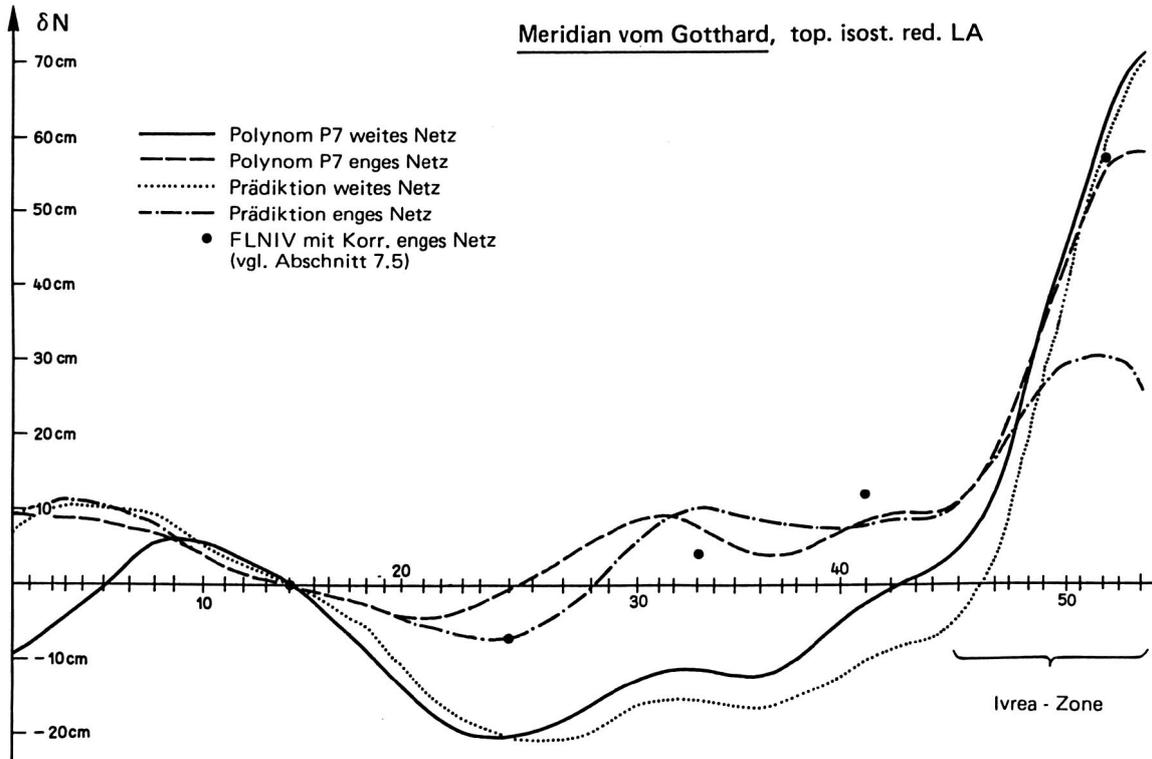


Fig. 7.11

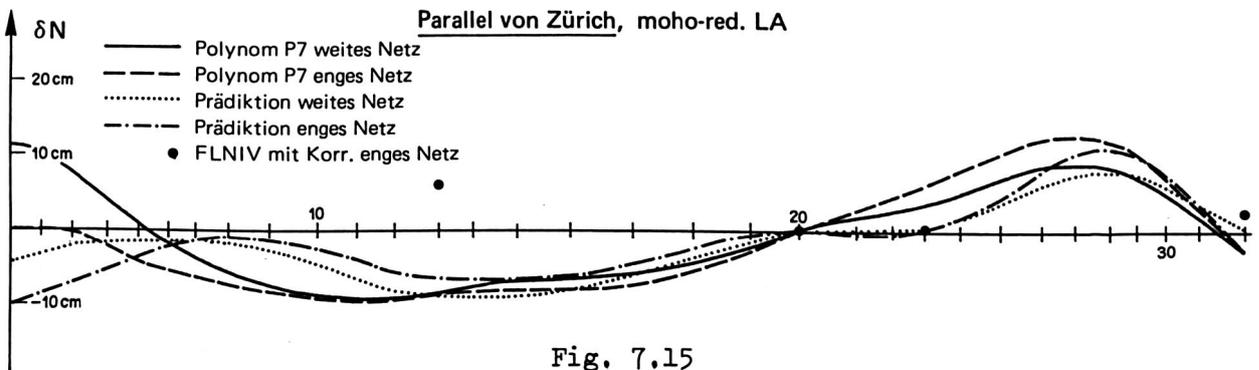
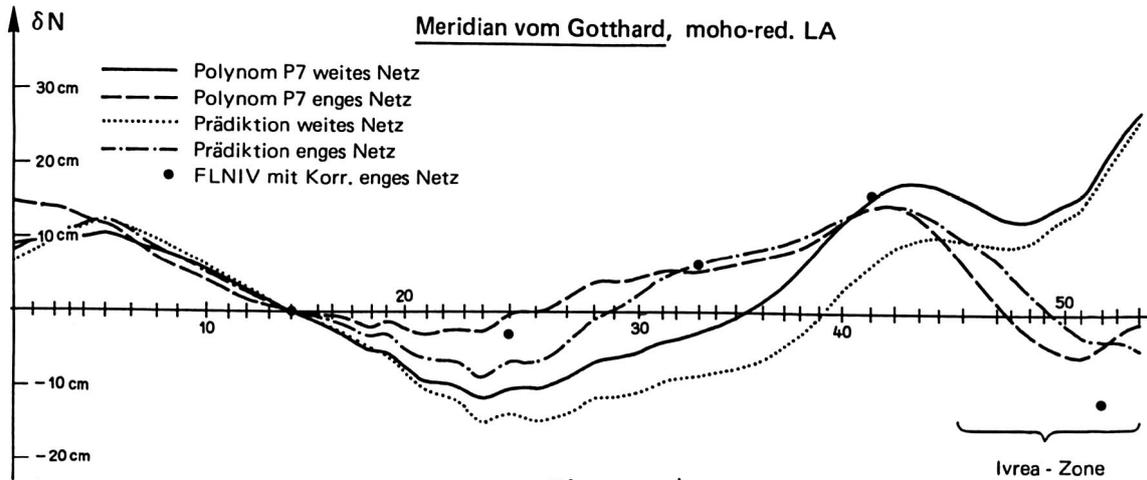
Zu 3.: Die Figur 7.12 zeigt die Höhenfehler bei den drei verschiedenen Reduktionen.



Durch den Uebergang vom "weiten" auf das "enge" Stützpunktnetz erhalten wir bei der Prädiktion gegenüber der Polynomapproximation mit topographisch-isostatisch reduzierten LA im bewegten Gebiet der Ivreazone eine ausgeprägtere Verbesserung:
Fig. 7.13



Für moho-reduzierte LA sind jedoch die beiden Methoden (in den betrachteten Geoidschnitten) einander gleichwertig; ein Unterschied lässt sich hier nicht feststellen. (Siehe aber Abschnitt 7.5).



Die mittlere Abweichung der Profilhöhen gegenüber den Sollwerten beträgt für die Mohoreduktion:

- ± 8 cm für das "enge" Netz
- ± 10 cm für das "weite" Netz.

Andererseits liefert uns das Verfahren der Prädiktion mittlere Fehler der Geoidhöhendifferenzen bezüglich unseres Ausgangspunktes Schwerzenbach (Schnittpunkt der Profile Zürich und Gotthard). Sie werden mit zunehmendem Abstand vom Ausgangspunkt grösser und betragen für den entferntesten Punkt (Brusata, Meridian von Lugano)

- ± 12 cm für das "enge" Netz
- ± 16 cm für das "weite" Netz.

Die tatsächlichen Abweichungen der berechneten Profilhöhen gegenüber den Sollwerten überschreiten nirgends die entsprechenden, mit Prädiktion berechneten, doppelten mittleren Fehler!

Wie bei der Interpolation von LA ergeben auch hier die berechneten mittleren Fehler ein gutes Bild der effektiv erreichbaren Genauigkeit.

7.5 (Co-)Geoidberechnung mit Hilfe des Flächennivellementes, Vergleich aller betrachteten Methoden

Das Flächennivellement liefert, im Unterschied zur Prädiktion und Polynomdarstellung, nur Höhen in den Stützpunkten. Der Vergleich der resultierenden Höhen mit den Sollwerten der Geoidprofile gemäss Abschnitt 7.4 muss sich folglich auf die wenigen Stützpunkte beschränken, die für das jeweilige Testnetz in oder knapp neben den Profilen liegen.

In den Figuren 7.13 bis 7.15 (Seite 84 ff) sind die entsprechenden Abweichungen von den Sollwerten für die Methode des Flächennivellementes (unter Berücksichtigung der Korrelationen, vgl. Abschnitt 3.3 Seite 13 ff) mit der Signatur • dargestellt. Die paar Beispiele zeigen bereits, dass diese Methode nicht wesentlich andere Resultate liefert als die beiden vorher betrachteten Methoden.

Um aber das Flächennivellement (FLNIV) genauer untersuchen zu können, brauchen wir Sollwerte der (Co-)Geoidhöhen in allen Stützpunkten der Testnetze. Wir benützen dazu im folgenden die aus der endgültigen Berechnung des Cogeoides und Geoides der Schweiz (Abschnitt 7.7) resultierenden Höhen.

Damit können wir nun jeweils die mittleren Abweichungen der Höhen der Testnetze gegenüber unseren, als fehlerfrei angenommenen Sollhöhen bestimmen.

Wir untersuchen folgende Punkte:

- Einfluss der Netzdefinition
- Einfluss der Gewichtswahl für die "Beobachtungen"
- Einfluss verschiedener Stützpunktdichten
- Nicht-reduzierte LA ↔ moho-reduzierte LA
- Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den als "Beobachtungen" eingeführten Höhendifferenzen

Neben den schon in den Abschnitten 7.3 und 7.4 verwendeten beiden Testnetzen benützen wir ein drittes, noch weitmaschigeres Netz mit total 20 Stützpunkten. Somit haben wir folgende Testnetze zur Verfügung:

Netz I	53 Punkte	mittl. Punktabstand ca. 40 km
Netz II	37 Punkte	mittl. Punktabstand ca. 50 km
Netz III	20 Punkte	mittl. Punktabstand ca. 65 km

Da das Flächennivellement in allen Stützpunkten beide LA-Komponenten verlangt, wurden vorgängig für 3 Punkte des Meridians vom Gotthard die fehlenden η -Komponenten mit Prädiktion bestimmt.

a) Einfluss der Netzdefinition

Bei der Verwendung des Flächennivellementes als Methode der Geoidbestimmung sind a priori nur die Anzahl und räumliche Verteilung der Stützpunkte gegeben. Man hat nun zu entscheiden, welche Höhendifferenzen zwischen den Stützpunkten aus den Lotabweichungen berechnet und als fingierte Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt werden sollen.

Wir untersuchen den Einfluss verschiedener Netzdefinitionen anhand unserer drei Testnetze, indem wir jeweils alle Höhendifferenzen zwischen den Stützpunkten bilden, deren Abstand eine zu variierende Maximaldistanz nicht überschreitet. Zusätzlich können wir die maximale Anzahl der Verbindungen pro Punkt vorgeben: Einerseits sollte durch eine genügende Anzahl Verbindungen der Einfluss der Approximationsfehler gesenkt, andererseits aber sollten allzu lange Visuren vermieden werden. Die Art der Netzdefinition ist jedoch wenig kritisch. Am günstigsten ist die Wahl der 5 - 8 kürzesten Verbindungen.

b) Einfluss der Gewichtswahl

Folgender Ansatz für den mittleren Fehler einer "Beobachtung" wurde verwendet:

$$\sigma_{\Delta N}^2 = \frac{1}{4\rho^2} \left[\Delta x^2 (m_{\xi_i}^2 + m_{\xi_k}^2) + \Delta y^2 (m_{\eta_i}^2 + m_{\eta_k}^2) \right] + a^2 s^{2b}$$

wobei: m_{ξ} , m_{η} : m.F. der LA-Komponenten (gemäß Klasseneinteilung Seite 3; auch konstant null gesetzt).

a : Approximationsfehler, distanzabhängig mit s^b
mit: a = 0, 5, 10 mm pro km^b
b = 1, 1.3, 1.5

und: $p_{\Delta N} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta N}^2}$

Bei Verwendung moho-reduzierter LA zeigt es sich, dass der Approximationsfehler a vernachlässigt werden kann. $\sigma_{\Delta N}$ ist praktisch nur noch abhängig von den mittleren Fehlern der Lotabweichungen und wächst linear mit der Distanz s.

Bestimmt man das Geoid direkt mit Hilfe nicht-reduzierter LA, kann über den Einfluss der Gewichtswahl nichts allgemeingültiges ausgesagt werden. Je nach Netzdichte und Netzaufbau ergeben sich andere optimale Ansätze.

c) Einfluss der restlichen Parameter, Vergleich aller Methoden

In der Tabelle 7.16 sind die mittleren Abweichungen der Stützpunkthöhen gegenüber den Sollwerten gemäss folgender Spezifikationen dargestellt:

- Testnetz I, II und III
- Nicht-reduzierte LA ↔ moho-reduzierte LA
- FLNIV ↔ FLNIV mit Berücksichtigung der Korrelationen
- Als Vergleich: Prädiktion und Polynomdarstellung (Polynome 6, und 7, Grades).

Testnetz	Reduktion	Prädiktion	FLNIV	FLNIV m. Korr.	Polynome	
					P6	P7
Netz I	moho-red	7 cm	9 cm	9 cm	16 cm	13 cm
	nicht-red	42	46	42	50	49
Netz II	moho-red	19	20	19	24	24
	nicht-red	53	68	66	64	61
Netz III	moho-red	32	33	33	38	44
	nicht-red	93	83	93	107	156

Tabelle 7.16

Diese Tabelle erlaubt folgende Aussagen:

1. Die Berücksichtigung der Korrelationen ergibt keine Verbesserung der Methode des Flächennivellementes.
2. Die Prädiktion liefert in den meisten Fällen die genauesten Resultate.
3. Die Polynomdarstellung ist auch bei Verwendung moho-reduzierter LA schlechter als die Prädiktion. (Im Gegensatz zu Abschnitt 7.4, Seite 85, wo in den Geoidprofilen kein Unterschied festgestellt werden konnte.)
4. Die Genauigkeit des FLNIV liegt etwa in der Grössenordnung der Prädiktion.
5. Die grösste Genauigkeitssteigerung der Geoidbestimmung erhalten wir durch die Verwendung (moho-)reduzierter LA und, an die Cogeoidbestimmung anschliessend, Verwendung des Satzes von Bruns (Abschnitt 4.3). Je nach Netzdichte lässt sich (gegenüber der direkten Geoidbestimmung) eine Verbesserung der Genauigkeit um den Faktor 3 - 6 erreichen! Die Methode, mit der die Cogeoidfläche bestimmt wird, ist wesentlich weniger wichtig. Sie dürfte nun vor allem

auf Grund anderer Kriterien (gleichzeitig LA-Interpolation, Darstellung der Niveaufläche, Genauigkeitsangaben, Verwendung von Stützpunkten mit nur einer LA-Komponente, Möglichkeit der Einführung von Schwereanomalien als zusätzliche Beobachtungen, aber auch Rechenzeit und Speicherbedarf) ausgewählt werden.

7.6 Der Einfluss von Fehlern der Geoidhöhen auf die Distanzreduktion

Die Reduktion schiefer Distanzen auf das Ellipsoid mit Hilfe ellipsoidischer Höhen verlangt, wie wir in der Einleitung ausgeführt haben, die Geoidhöhen N in den Endpunkten der Distanzen.

Entscheidend in der Fehlerbetrachtung ist nicht der Fehler der mittleren Geoidhöhe (Reduktion auf Höhe null), sondern der Fehler der Geoidhöhendifferenzen (Reduktion in die Horizontale).

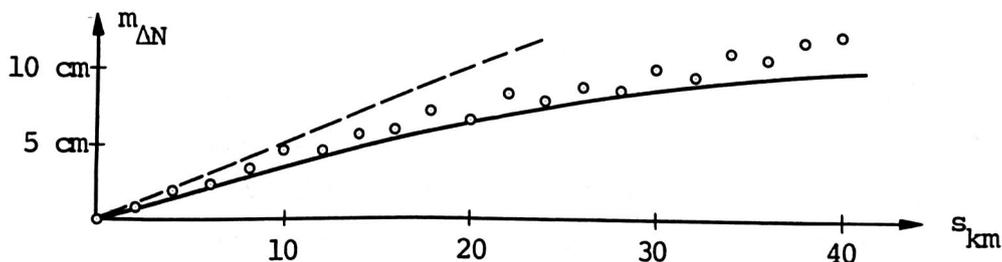
Uns interessieren deshalb die zu erwartenden mittleren Fehler der berechneten Geoidhöhendifferenzen und ihr Einfluss auf die Distanzreduktion.

Zu diesem Zweck ziehen wir die mit Hilfe der moho-reduzierten Stützwerte des "weiten Testnetzes" prädizierten Cogeoidhöhen bzw. die daraus ermittelten Geoidhöhen aller Profilpunkte heran. Wir bilden nun die Unterschiede zwischen allen möglichen, berechneten Geoidhöhendifferenzen und den entsprechenden, aus den Sollwerten des Abschnittes 7.2 folgenden Solldifferenzen.

Indem wir nun für verschiedene Distanzklassen die quadratischen Mittelwerte dieser Unterschiede bilden, erhalten wir eine a posteriori-Schätzung für den Verlauf des mittleren Fehlers von Geoidhöhendifferenzen in Funktion des Punktabstandes.

In der Figur 7.17 sind die quadratischen Mittelwerte in den Distanzklassen von je zwei Kilometern mit kleinen Kreisen dargestellt.

m.F. von Geoidhöhendifferenzen "weites Netz"



Figur 7.17

Die Formel (6.41) Seite 67 liefert uns die Möglichkeit, für das gegebene Stützpunktnetz die mittleren Fehler von Geoidhöhendifferenzen a priori zu berechnen.

Die ausgezogene Kurve in Fig. 7.17 stellt nun diese, mit (6.41) ermittelten a priori-Werte dar, berechnet für eine Anzahl Geoidhöhendifferenzen im mittleren Teil des "weiten Testnetzes".

Wie bereits in den Abschnitten 7.3.2 (Seite 80) und 7.4 (Seite 86), zeigt sich auch hier wieder eine gute Uebereinstimmung mit den empirisch ermittelten a posteriori - Fehlern.

Um den Einfluss der Fehler auf die reduzierten Distanzen abschätzen zu können, setzen wir:

$$d_{\text{red}} \approx \sqrt{d^2 - \Delta H^2}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m_{d_{\text{red}}}^2 &= \frac{d^2}{d^2 - \Delta H^2} m_d^2 + \frac{\Delta H^2}{d^2 - \Delta H^2} m_{\Delta H}^2 \\ &= \frac{d^2}{d_{\text{red}}^2} m_d^2 + \frac{\Delta H^2}{d_{\text{red}}^2} (m_{\Delta h}^2 + m_{\Delta N}^2) \end{aligned}$$

und, indem wir uns auf $m_{\Delta N}$ beschränken:

$$m_{d_{\text{red}}} = \frac{\Delta H}{d_{\text{red}}} m_{\Delta N}$$

Setzen wir

$$m_{\Delta N} = 5 \text{ mm} \cdot d_{\text{red}}, \quad d_{\text{red}} \text{ in km}$$

(gestrichelte Gerade in Fig. 7.17), erhalten wir:

$$\underline{m_{d_{\text{red}}} = \Delta H_{[\text{km}]} \cdot 5 \text{ mm}}$$

Da wir dieser Fehlerabschätzung das Testnetz zu Grunde gelegt haben, das bezüglich Punktdichte den Gebieten mit den wenigsten Stützpunkten der definitiven Geoidbestimmung entspricht (Graubünden, Wallis), stellt der resultierende mittlere Fehler der reduzierten Distanzen einen oberen Grenzwert dar.

Unsere definitive Geoidbestimmung dürfte somit den Anforderungen der angewandten Geodäsie genügen.

7.7 Die definitive Cogeoid- und Geoidberechnung

Gestützt auf die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen in den Abschnitten 7.3 - 7.5 und den Vergleich der Möglichkeiten der einzelnen Methoden entschliesen wir uns, das Geoid der Schweiz mit Hilfe moho-reduzierter Lotabweichungen zu bestimmen, wobei wir das entsprechende Cogeoid direkt mit der multivariaten Prädiktion berechnen wollen.

Wir benützen dazu die in Figur 7.18 dargestellten 121 Stützpunkte mit total 204 LA-Komponenten.

Vor dem eigentlichen Prädiktionsvorgang wird als Trend nur ein konstanter Anteil je für die beiden LA-Komponenten abgespalten (Zentrierung auf den Mittelwert). Als mittlere Fehler der Beobachtungen verwenden wir wieder die auf Seite 3 angegebene Klasseneinteilung.

Die Inversion der symmetrischen $(204 \times 204) C_{xx}$ -Matrix benötigt auf der IBM 370 - 158 Anlage der Universität Bern 53 Sekunden, die Berechnung einer Cogeoidhöhe, zusammen mit der Interpolation der beiden LA-Komponenten und den mittleren Interpolationsfehler, 1.6 Sekunden.

Erläuterungen zu den folgenden Abbildungen und den Karten im Anhang

Die Höhenkurven in den Figuren 7.18, 7.20, 7.21 und in den Karten im Anhang wurden freundlicherweise von Herrn Dr. Klingelé des Instituts für Geophysik der ETH Zürich mit Hilfe seines Plotprogrammes PAS-A-PAS erzeugt. Zu diesem Zweck bestimmten wir die Cogeoid- bzw. Geoidhöhen in einem Raster von 10 x 10 km, in den dann die Kurven mit dem Programm hineininterpoliert und gezeichnet wurden.

- Fig. 7.18 zeigt das Mohocogeoid, das als Grundlage für die Bestimmung des Geoides der Schweiz dient, zusammen mit den verwendeten Stützpunkten.
- Fig. 7.19 Die Methode der multivariaten Prädiktion liefert gleichzeitig (Formeln 6.39, 6.41) die mittleren Fehler der prädizierten Cogeoidhöhen bezüglich eines Ausgangspunktes (Schwerzenbach), die hier in Form von Isolinien dargestellt sind.

Im grössten Teil der Schweiz betragen sie weniger als 10 cm.

Moho - Cogeoid

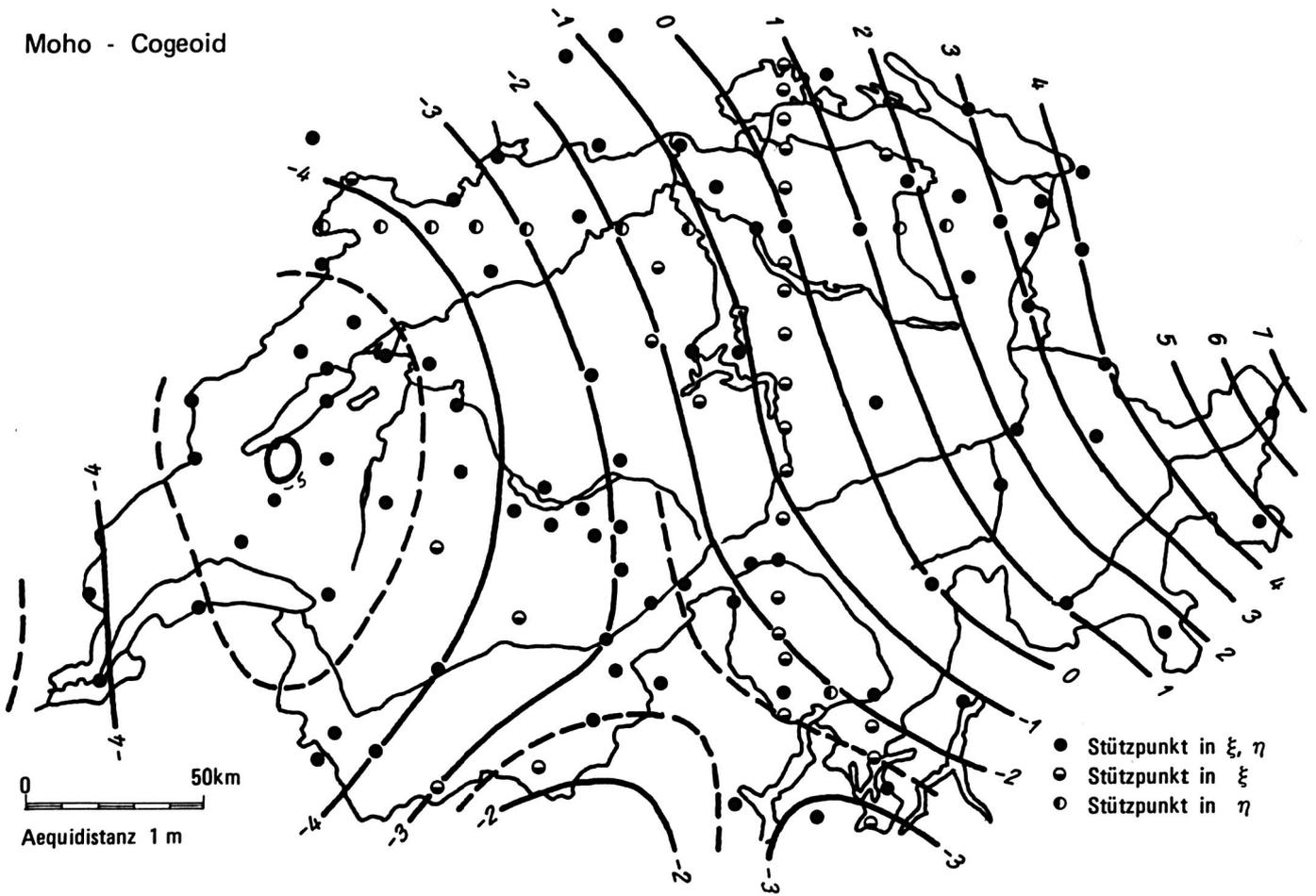


Fig. 7.18

mittlere Fehler der
Moho - Cogeoidhöhen
bzgl. Schwerzenbach

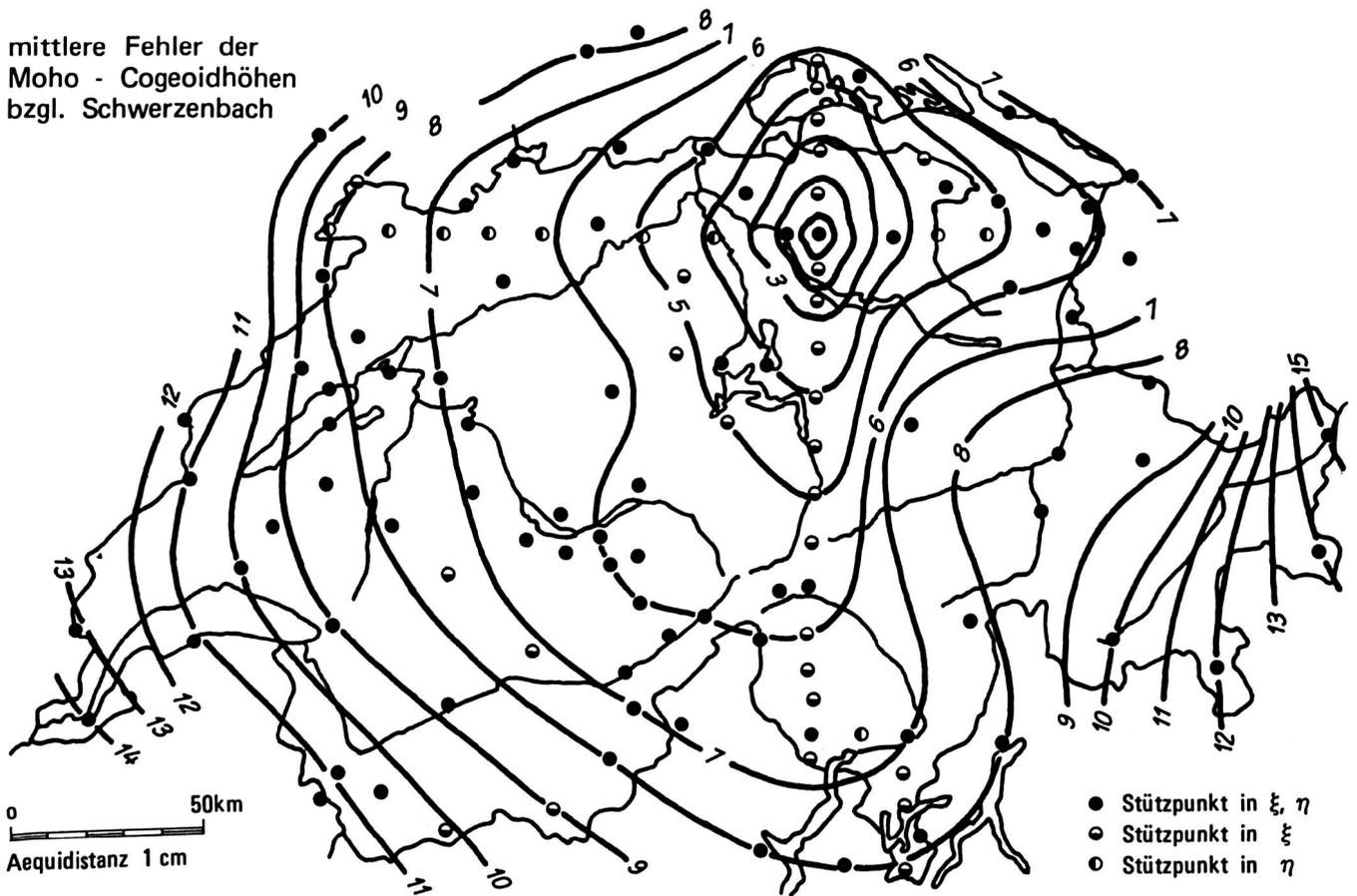


Fig. 7.19

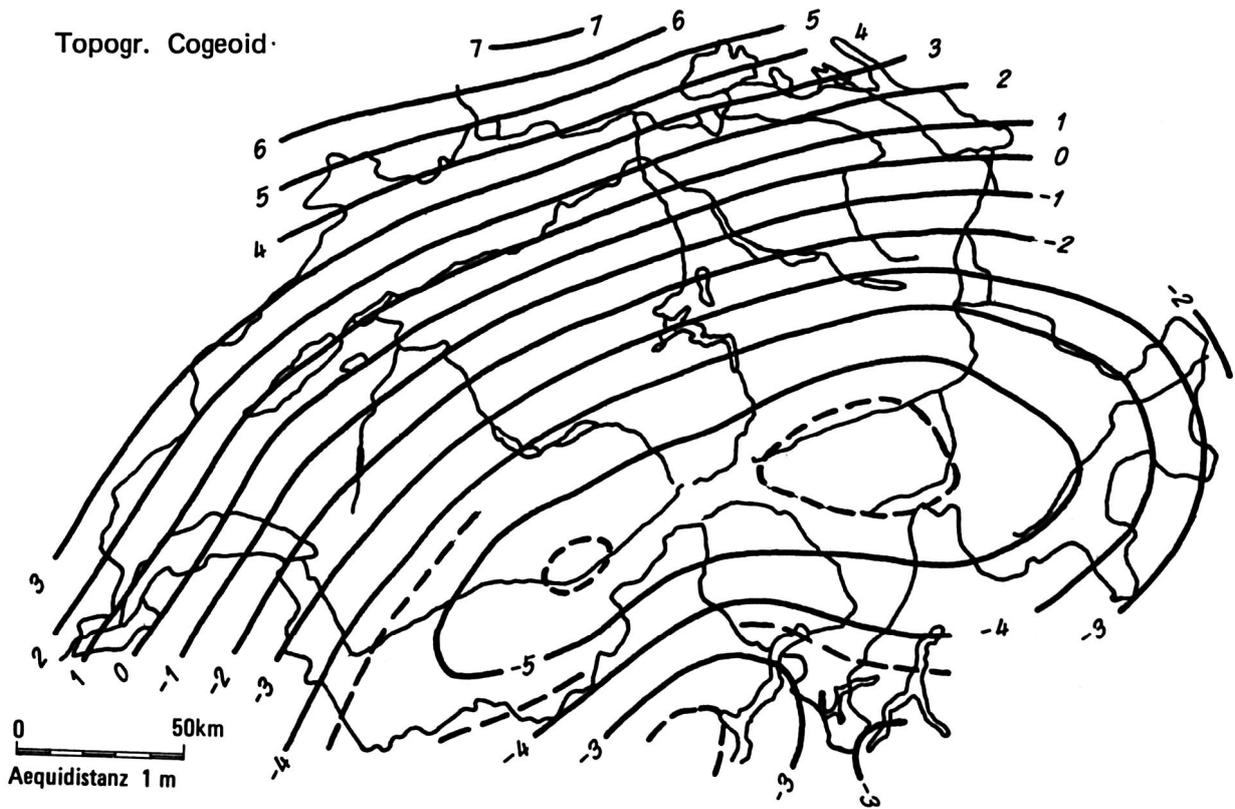


Fig. 7.20

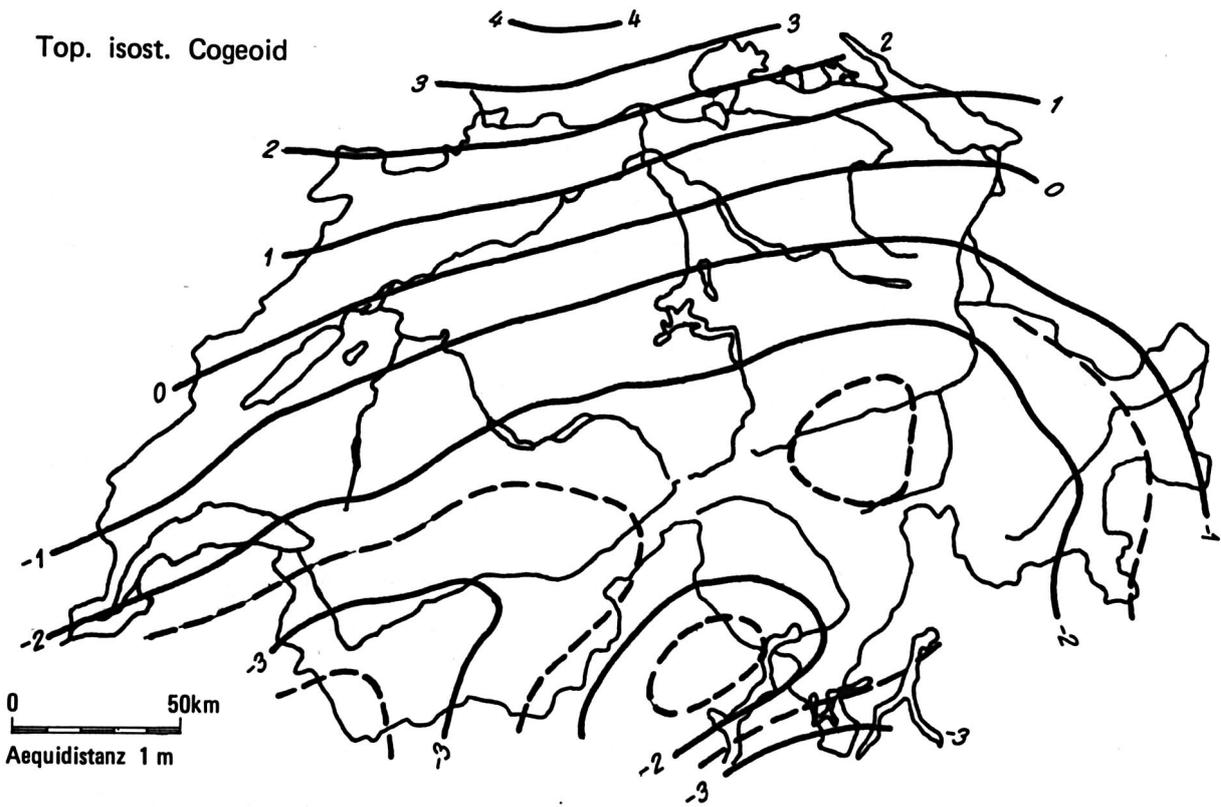


Fig. 7.21

- Fig. 7.20 Als Vergleich zeigen wir noch das aus topographisch bzw. topo-
Fig. 7.21 graphisch-isostatisch reduzierten LA berechnete Cogeoid. Es fällt
auf, dass bei zusätzlicher Berücksichtigung des Isostasiemodelles
(Pratt-Hayford) gegenüber der rein topographischen Reduktion das
Massendefizit unter den Alpen zu einem grossen Teil eliminiert
wird. Die Absenkung des Cogeoides unter der Alpenkette beträgt
jedoch immer noch ca. 2,5 m. (Vgl. auch den Meridianschnitt durch
die Cogeoide, Fig. 4.16 Seite 35).

- Karte I Ein völlig anderes Bild zeigt nun das hier nochmals dargestellte
Moho-Cogeoid. Die Korrelation der Fläche mit der Alpenkette ver-
schwindet vollständig. Die noch verbleibenden Abweichungen der
Fläche gegenüber einer Ebene rühren vor allem von folgenden
Faktoren her:

- Randeffekte des asymmetrischen, für alle Punkte gemeinsamen
Massenmodelles auf die Berechnung der reduzierten Lotabweichungen
- Grössere Massen ausserhalb des Einzugsgebietes
- Fehler der angenommenen Mohodiskontinuität (vor allem im Westen)
- Fehler des Ivreamodelles (Südschweiz)

Die Neigung der Fläche ist abhängig von der Lagerung des Referenz-
ellipsoides.

- Karte II zeigt das Geoid der Schweiz. Da dessen Unterschied zum Cogeoid nur
von den Modellmassen herrührt, gelingt uns eine nahezu beliebig
feine Darstellung seiner Detailstruktur. Man beachte insbesondere
die Senkungen des Geoides in den grossen Alpentälern (Wallis, Aare-
tal, Reusstal, Tessin) wie auch den Ausschnitt aus dem Geoid im
Berner Oberland, Fig. 4.15 Seite 34).

Die mittleren Fehler der Geoidhöhen setzen sich aus drei Teilen
zusammen:

1. Mittlere Fehler der Cogeoidhöhen, die aus der eigentlichen
Flächenbestimmung herrühren. Sie können der Figur 7.19 ent-
nommen werden.
2. Fehler, die von nicht berücksichtigten Störmassen herrühren,
welche zu klein sind, um sich auf eine genügende Anzahl Stütz-
werte (reduzierte LA) und damit auf den Verlauf des Cogeoides

auszuwirken. Gewisse Anteile von kleineren Störmassen werden, vorallem wenn sie nur einen Stützpunkt beeinflussen, als Messfehler interpretiert und damit wegfiltriert.

Die gute Uebereinstimmung zwischen den in den Geoidprofilen empirisch ermittelten mittleren Fehlern und den mit Hilfe der Formel (6.41) berechneten Werten zeigt jedoch, dass wir diese zusätzlichen Einflüsse in der Darstellung der Fig. 7.19 nicht noch speziell beachten müssen.

3. Die Differenz zwischen dem Einfluss unberücksichtigter Störmassen auf die Oberflächenpunkte und auf die entsprechenden Punkte des Geoides bewirkt eine weitere Verfälschung der berechneten Niveaufläche (Fehler in den Lotkrümmungen). Mit der Einführung eines Modelles des Ivreakörpers wird der grösste Anteil dieses Fehlers eliminiert.

Eine weitergehende Verbesserung der Geoidhöhen dürfte aber erst mit der Berücksichtigung von Schwereanomalien als zusätzliche Beobachtungen und mit einer weiteren Verfeinerung des Massenmodelles erwartet werden.

Damit die resultierenden Geoidhöhen mit früher bestimmten Werten direkt vergleichbar sind ({SGK Bd. 20, 22, 24}, {Elmiger,1975}), wurde auch in der vorliegenden Arbeit die Geoidhöhe von Schwerzenbach (Schnittpunkt der Profile von Zürich und vom Gotthard) gleich null gesetzt.

- Karte III zeigt das Geoid im Datum ED-50.

Die Transformationsformel für die Aenderung der Geoidhöhen beim Uebergang auf ein neues Referenzellipsoid lautet {Heiskanen-Moritz, 1967 S.208}:

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{a} = & - (\cos B_0 \sin B - \sin B_0 \cos B \cos \Delta L) \delta \xi_0 - \cos B \sin \Delta L \delta \eta_0 - \frac{\delta a}{a} + \\ & (\sin^2 B - 2 \sin B_0 \sin B) \cdot \delta f + \\ & (\sin B_0 \sin B + \cos B_0 \cos B \cos \Delta L) \left(\frac{\delta N_0}{a} + \frac{\delta a}{a} + \sin^2 B_0 \delta f \right) \end{aligned}$$

Die mit "0" indizierten Grössen beziehen sich auf den Ursprung Bern. Für den Uebergang Bessel-Ellipsoid → Internationales Ellipsoid gilt:

$$\delta f = 2.4230 \cdot 10^{-5} \quad \delta a = 990.84 \text{ m}$$

Zur Bestimmung der $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, δN_0 benützen wir einerseits ca. 40 Punkte, deren Koordinaten B,L in beiden Systemen bekannt sind {Verzeichnis der Eidg. Landestopographie}, andererseits einige Punkte der Geoidprofile, deren Geoidhöhen im Datum ED-50 der Darstellung von {Levallois, 1973} entnommen wurden.

Damit erhalten wir:

$$\delta\xi_0 = 1''497 \quad \delta\eta_0 = - 0''369 \quad \delta N_0 = - 2.41 \text{ m}$$

(wobei Schwerzenbach im Schweizer Datum: $N_S = 0 \text{ m}$)

Sobald die Resultate der europäischen (EDOC-2) und der deutsch-österreichischen Dopplercampagnen von 1977 vorliegen, können die Transformationsparameter (vorallem δN_0) überprüft oder allenfalls neu bestimmt werden.

- Karte IV zeigt die Punkte im betrachteten Gebiet, auf denen bis heute Lotabweichungen gemessen wurden.

Das anschliessende Verzeichnis enthält folgende Grössen der Lotabweichungsstationen:

Kol. 1 entspricht der Klasseneinteilung der beiden LA-Komponenten gemäss der Tabelle Seite 3.

Die Kol. 3 - 5 enthalten die Koordinaten der Stationen (Schweizerisches Projektionssystem).

In den Kol. 6 und 7 sind die gemessenen und prädierten LA-Komponenten aufgeführt. Die grössten Unterschiede (noise!) treten bei den η -komponenten der Stationen Chalet/Lausanne (7''5), Garsellakopf (4''5), Iselle (4''1), Egg (3''1) und Portalban (3''0) auf: Ausnahmslos Punkte, deren Ost-West-Komponenten aus gemessenen Azimuten berechnet wurden. In der Kolonne 8 sind die mit Hilfe des Moho-Massenmodelles reduzierten Lotabweichungen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ dargestellt.

Die Kol. 9 und 10 enthalten die Geoidhöhen im Schweizer Datum und im Datum ED-50.

Als Stützpunkte verwendete Stationen sind in der Kolonne 11 mit * markiert. (Vgl. Fig. 7.18).

8. ZUSAMMENFASSUNG

Da im Gebiet der Schweiz (Alpenland) die Lotabweichungen und somit auch das Geoid einen sehr unruhigen Verlauf zeigen, ergibt die direkte Bestimmung des Geoides aus seinen Flächennormalen (gemessene, um die Lotkrümmung korrigierte Lotabweichungen) bei der vorliegenden Stützpunktdichte eine relativ geringe Genauigkeit. Letztere lässt sich etwa um den Faktor 3 - 6 steigern, indem das Geoid indirekt, mit dem Umweg über ein Cogeoid, bestimmt wird:

Das tatsächliche Störpotential wird zerlegt in zwei Teile:

- Der erste Anteil wird von einem Massenmodell (sichtbare Topographie mittlerer Dichte, bekannte Störmassen, unterschiedliche Krustenmächtigkeit - soweit bekannt - , erzeugt.
- Der zweite Anteil wird von den Modellfehlern, d.h. von den Abweichungen des Massenmodelles gegenüber der tatsächlichen Massenverteilung gebildet.

Die Modellfehler drücken sich aus als Differenzen der beobachteten und der aus dem Modell berechneten Lotabweichungen. Diese sogenannten reduzierten Lotabweichungen definieren eine neue Niveaufläche, das Cogeoid, das einen beträchtlich ruhigeren Verlauf als das Geoid zeigt, mithin also wesentlich genauer zu bestimmen ist.

Das Geoid selbst erhält man, indem zu den Cogeoidhöhen der Quotient aus Störpotential des Massenmodelles am betreffenden Punkt und Normalschwere (Satz von Bruns) addiert wird. Dadurch lässt sich die Detailstruktur des Geoides nahezu beliebig fein darstellen.

Das verwendete Massenmodell besteht aus den Massen konstanter Dichte zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid, den durch den ungefähren Verlauf der Mohorovičić-Diskontinuität festgelegten Kompensationsmassen konstanter Dichtendifferenz sowie einem Modell des Ivrea - Störkörpers.

Die Methode, mit der das entsprechende Cogeoid aus den reduzierten Lotabweichungen bestimmt wird, ist nun, dank dem sehr glatten Verlauf der Fläche, wenig kritisch.

Als gut geeignet erweist sich die multivariate Prädiktion, mit der aus den gleichzeitig gefilterten - reduzierten Lotabweichungen direkt Cogeoidhöhen interpoliert werden können. Als statistische Grundlage verwenden wir das von Jordan 1972 vorgeschlagene, für Δg , ξ , η und N selbstkonsistente Markov-Modell dritter Ordnung.

Diese auf stochastischen Prozessen basierende Methode der Niveauflächenbestimmung wird - am Beispiel der Schweiz - mit andern, rein geometrischen Methoden (Flächennivellement, Polynomdarstellung) verglichen und die erreichbare Genauigkeit abgeschätzt.

Es zeigt sich, dass mit den vorhandenen Lotabweichungen die Cogeoidhöhen und damit auch die Geoidhöhen gegenüber einem frei gewählten Ausgangspunkt (Schwyzbach) im grössten Teil der Schweiz mit einer Genauigkeit von besser als ± 10 cm bestimmt werden können. Der Einfluss der Fehler auf die Reduktion von gemessenen Schrägdistanzen ist vernachlässigbar.

Die Darstellung des Cogeoides durch Polynome oder mit Hilfe der Prädiktion liefert gleichzeitig Lotabweichungen in beliebigen Punkten. Deshalb werden auch die Probleme der Lotabweichungsinterpolation kurz gestreift. Insbesondere dank der Einführung des Ivrea-Körpers in das verwendete Massenmodell können nun auch in der Südschweiz Lotabweichungen mit einem mittleren Fehler von etwa $\pm 1''$ interpoliert werden.

Auf den später möglichen Einbezug von Schwereanomalien als zusätzliche Beobachtungen in das Konzept der Prädiktion wird an der entsprechenden Stelle hingewiesen. Damit, wie auch durch eine weitere Verbesserungen des Massenmodelles, könnten insbesondere noch vorhandene Fehler in der Lotkrümmungsberechnung verkleinert werden.

LITERATURVERZEICHNIS

- Abkürzungen: SGK Schweizerische Geodätische Kommission
 DGK Deutsche Geodätische Kommission
 SMPM Schweiz. mineral. petrogr. Mitteilungen
 SAO Smithsonian Astrophysical Observatory
- Arnold, L. (1973) Stochastische Differentialgleichungen.
 R. Oldenbourg Verlag, München/Wien
- Berckhemer, H. (1968) Topographie des 'Ivrea-Körpers' abgeleitet aus
 seismischen und gravimetrischen Daten. SMPM,
 Bd. 48, Heft 1, 235-246
- Bomford, G. (1971) The astrogeodetic geoid in Europe and connected
 areas. Appendix to Mrs. I. Fisher's Report for
 Study Group V-29, IUGG-Kongress Moskau 1971
- Bosch, W., H. Wolf (1974) Ueber die Wirkung von topographischen Lokal-
 Effekten bei profilweisen Lotabweichungs-
 Prädiktionen. Mitt. Inst. f. Theor. Geodäsie
 der Universität Bonn, Nr. 28
- Brennecke, J., E. Groten,
R. Rummel, H. Schaab (1975) Variationen zum Geoid in Deutschland.
 DGK - A Heft 83
- Choudhury, M., P. Giese,
G. deVisintini (1971) Crustal structure of the Alps: Some general
 features from explosion seismology. Boll. geof.
 teor. ed applic. 13. No. 51/52, 211-240
- Edel, J.B., K. Fuchs,
C. Gelbke, C. Prodehl (1975) Deep structure of the southern Rhinegraben area
 from seismic refraction investigations. J. Geophys.
 41, 333-356
- Elmiger, A. (1969) Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus
 Massen, Interpolation von Lotabweichungen und
 Geoidbestimmung in der Schweiz. Diss. ETH Zürich
- Elmiger, A. (1975) Erste Ergebnisse einer Geoidbestimmung für die
 Schweiz aus astronomischen und interpolierten Lot-
 abweichungen. Bericht an die SGK.
- Ganeko, Y. (1976) Astrogeodetic geoid of Japan. SAO Special Report
 372.
- Grafarend, E. (1971) Lotabweichungsverteilungen Westdeutschlands und
 ihre gruppentheoretische Struktur. Mitt. Inst.
 f. Theor. Geodäsie der Universität Bonn, Nr. 1

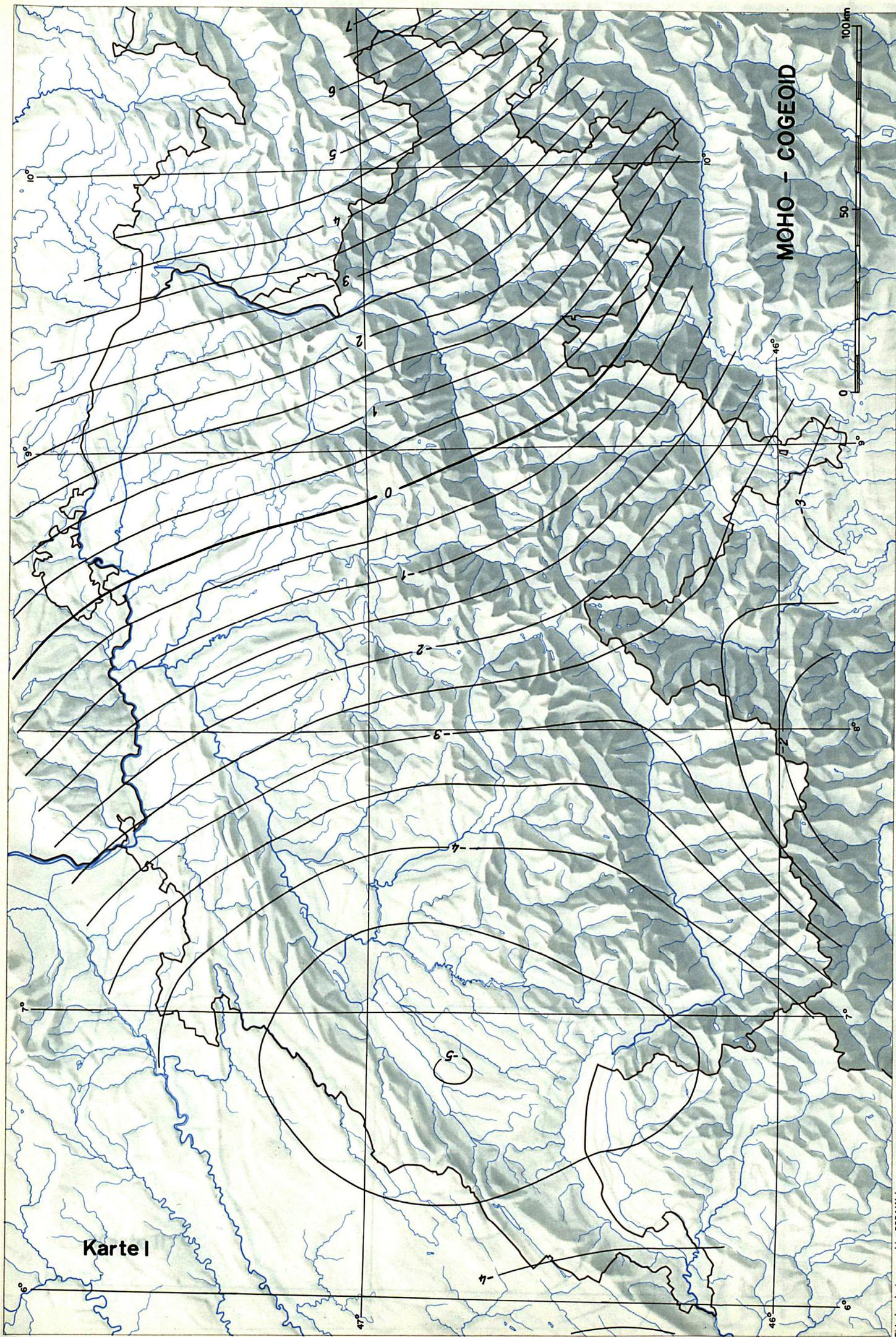
- Grafarend, E. (1976) Geodetic applications of stochastic processes. Phys. Earth Planet. Inter., 12: 151-179
- Grafarend, E., G. Offermanns (1975) Eine Lotabweichungskarte Westdeutschlands nach einem geodätisch konsistenten Kolmogorov-Wiener-Modell. DGK - A Heft 82
- Heiskanen, W.A., H. Moritz (1967) Physical geodesy. W.H. Freeman and Compagny, San Francisco and London
- Heitz, S. (1967) Ein Vorschlag zur Interpolation von astronomisch-geodätisch bestimmten Lotabweichungen, DGK - A Heft 55
- Heitz, S. (1968) Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen. DGK - C Heft 124
- Helmert, F.R. (1880) Höhere Geodäsie. Band I. Teubner Verlag, Leipzig
- Jordan, S.K. (1972) Self-consistent statistical models for the gravity anomaly, vertical deflections, and undulation of the geoid. J. Geophys. Res., Vol. 77, No. 20, 3660-3670
- Jordan/Eggert/Kneissl (1969) Handbuch der Vermessungskunde, Band V: Astronomische und physikalische Geodäsie, von K. Ledersteger, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart
- Kahle, H.G., E. Klingelé, St. Müller, R. Egloff (1976) The variation of crustal thickness across the Swiss Alps based on gravity and explosion seismic data. Pageoph, Vol. 114, 479-494
- Kaminski, W., H. Menzel (1968) Zur Deutung der Schwereanomalie des Ivrea-Körpers. SMPM Bd. 48, Heft 1, 255-260
- Kasper, J.F. (1971) A second-order Markov gravity anomaly model. J. Geophys. Res., Vol. 76, 7844-7849
- Kaula, W.M. (1959) Statistical and harmonic analysis of gravity. J. Geophys. Res., Vol. 64, 2401-2421
- Lauer, S. (1971) Ueber die stochastischen Eigenschaften lokaler Schwereanomalien und ihre Prädiktion. Diss. Bonn
- Levallois, J.J. (1973) Institut Géographique National: Géoides Européen. Karte 1 : 5 Mio, Paris
- MacMillan, W.D. (1958) The theory of the potential. Dover Publ. New York
- Moritz, H. (1970) Least-squares estimation in physical geodesy. DGK - A Heft 69
- Moritz, H. (1973) Elements of collocation. Lecture notes Int. Summer School, Ramsau

- Moritz, H. (1975) Integral formulas and collocation. Report No. 234, Department of Geodetic Science, Ohio State Univ.
- Rummel, R. (1975) Zur Behandlung von Zufallsfunktionen und -folgen in der physikalischen Geodäsie. DGK - C Heft 208
- Schürer, M. (1961) Das Geoid in der Schweiz. Festschrift 100 Jahre SGK.
- Shaw, L., I. Paul, P. Henrikson (1969) Statistical models for the vertical deflection from gravity-anomaly models. J. Geophys. Res., Vol. 74, 4259-4265
- Späth, H. (1973) Spline-Algorithmen, Oldenburg Verlag, München, Wien
- Steenbeck, M. (1963) Monatsber. Deutsche Akad. Wiss., 5, 625-629
- Wassouf, Y. (1975) Contribution à l'étude des déviations de la verticale dans la région du Tessin et au nord-ouest de l'Italie. Diss. ETH-Zürich
- Wiener, N., P. Masani (1957) Prediction theory of multivariate stochastic processes. Acta Math., 98, 111-150
- Wolf, H. (1956) Versuch einer Geoidbestimmung im mittleren Europa aus astronomisch-geodätischen Lotabweichungen. DGK - A Heft 18

SGK: Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz
(bis Band 9: Das Schweizerische Dreiecksnetz)

- Band 9: Messerschmitt, J.B. (1901) Polhöhen und Azimutmessungen. Das Geoid in der Schweiz.
- Band 20: Niethammer, Th. (1939) Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard.
- Band 22: Engi, P., Hunziker, E. (1944) Das Geoidprofil im Parallelkreis der Eidgenössischen Sternwarte zu Zürich.
- Band 24: Engi, P., Hunziker, E. (1951) Die Geoidprofile im Parallelkreis von Locarno und im Meridian von Lugano.
- Band 26: Wunderlin, N. (1967) Lotabweichungen, Geoid und Meereshöhen in den Schweizer Alpen

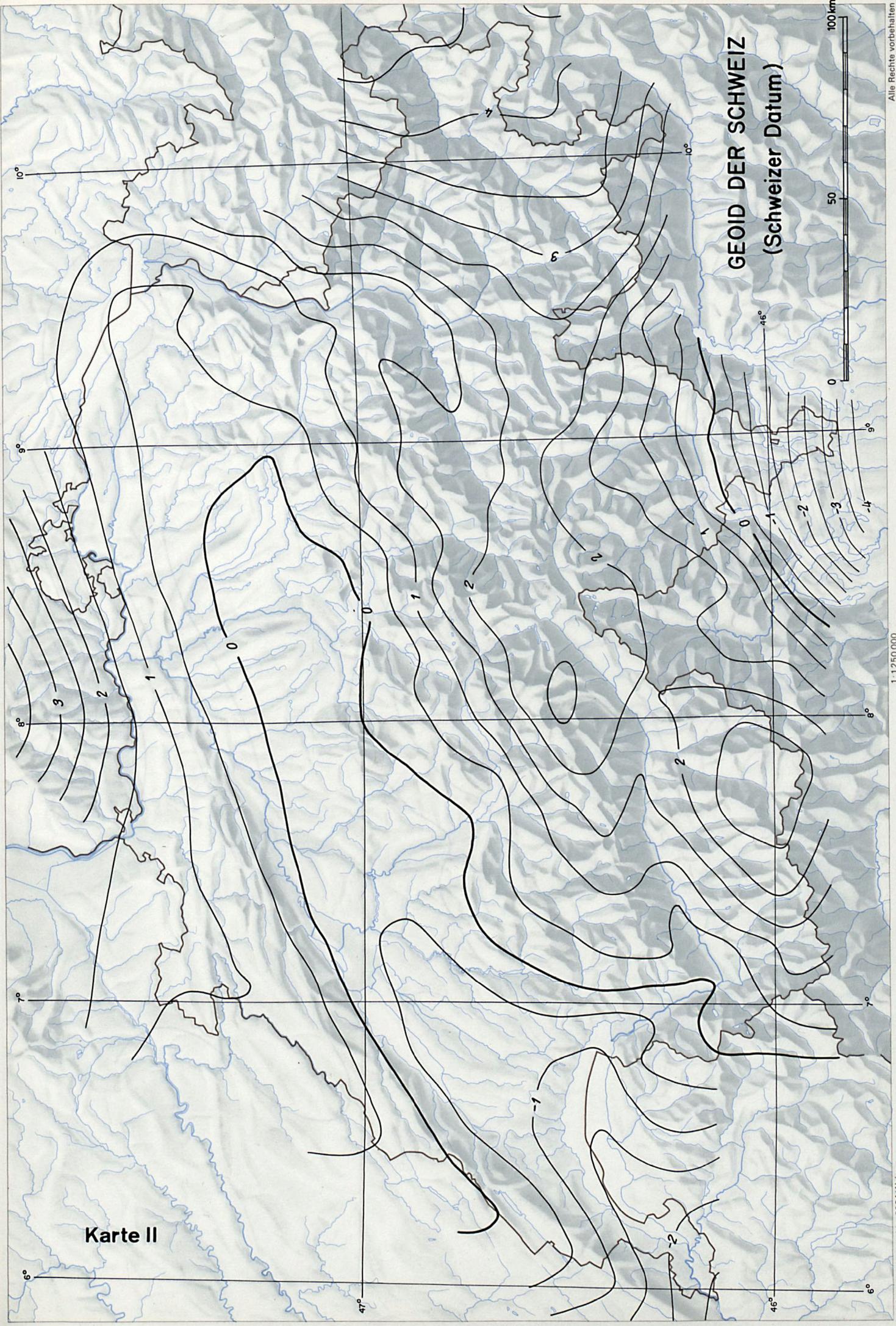
Verschiedene Protokolle (Procès-verbaux) der Jahressitzungen der SGK.



Karte I

MOHO - COGEOID

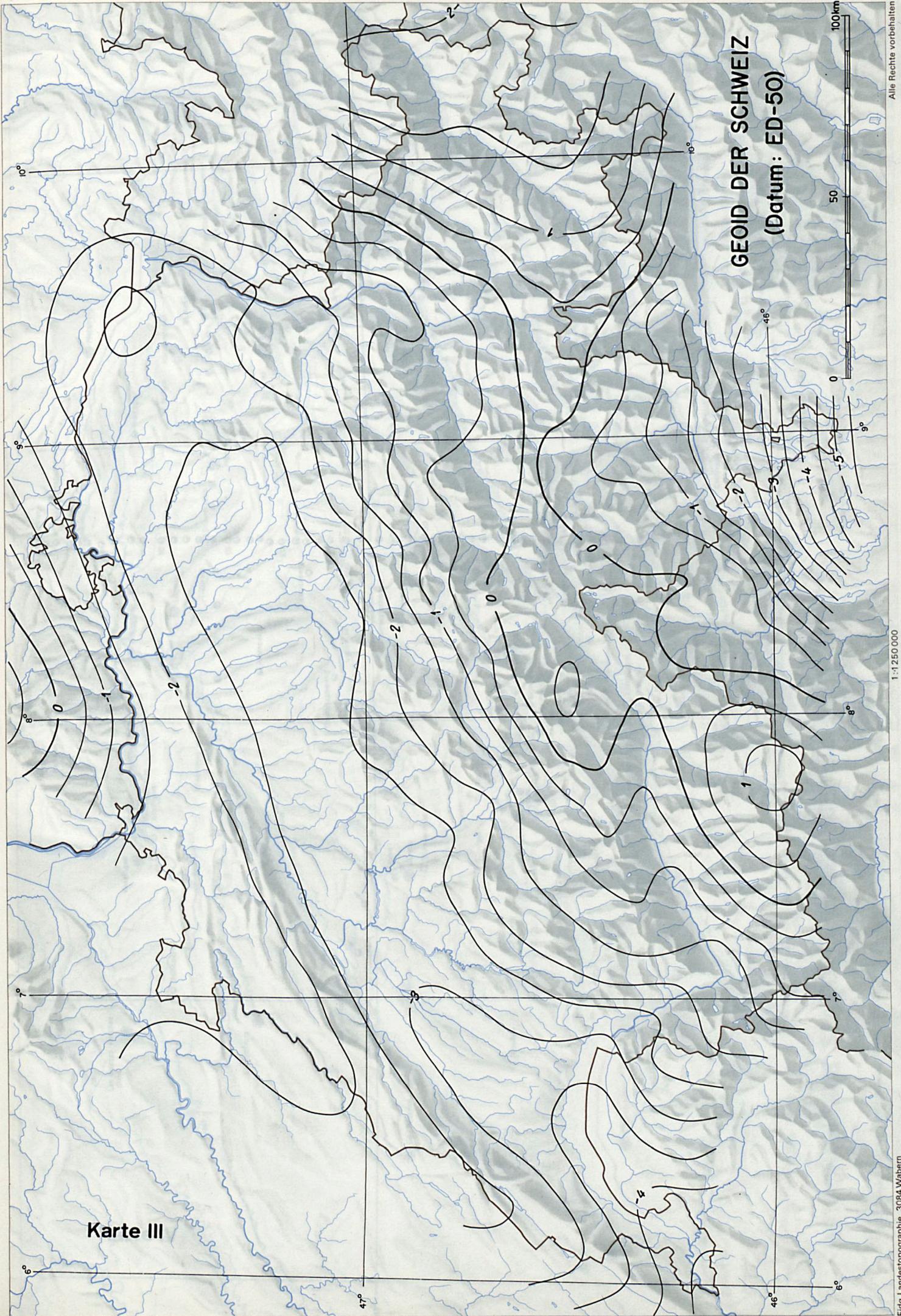




Karte II

**GEOID DER SCHWEIZ
(Schweizer Datum)**



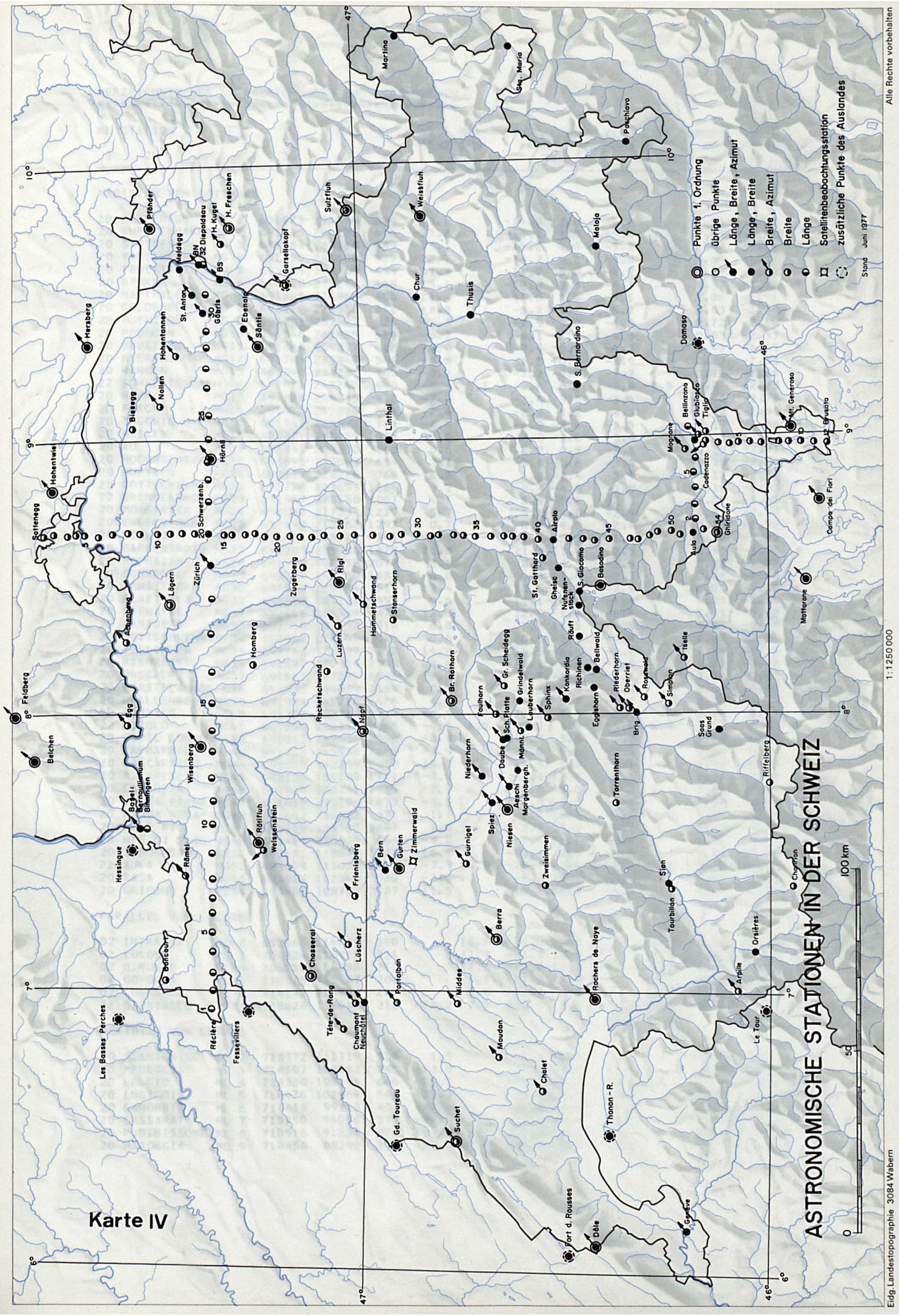


GEOID DER SCHWEIZ (Datum: ED-50)

Karte III

Karte IV

ASTRONOMISCHE STATIONEN IN DER SCHWEIZ



Stand Juni 1977

1:1250 000

Eidg. Landestopographie 3084 Wabern

Alle Rechte vorbehalten

VERZEICHNIS DER LOTABWEICHUNGEN UND GEODHOEHN

KL	STATION	Y	X	H	XI	ETA	XI	ETA	XI	ETA	GEOD	GEOD	S
1	2	3	4	5	GEMESSEN	6	PRAED.	7	MOHD-RED	8	SD	ED-50	11

MERIDIAN VOM GOTTHARD

20	SOTTENEGG	MG 1	691073	294596	634	-13.8	-14.0	7.6	-6.0		2.33	-0.82	*
20	BUETTENHARD	MG 2	691305	291101	675	-13.8	-14.1	7.0	-5.6		2.09	-1.02	
20	STETTEN	MG 3	691084	288068	589	-15.1	-15.2	6.0	-5.5		1.88	-1.21	*
20	TANSCHERHDE	MG 4	691250	285386	439	-12.7	-13.2	4.8	-4.8		1.69	-1.37	
20	FEUERTALEN	MG 5	691089	282769	439	-11.3	-11.7	5.0	-4.7		1.52	-1.52	
20	BENKEN	MG 6	690770	279248	468	-13.1	-13.3	2.3	-4.7		1.32	-1.68	*
20	MARTHALEN	MG 7	691285	274968	406	-11.4	-11.0	2.6	-5.1		1.06	-1.91	
20	GOLDENBERG	MG 8	691819	270351	511	-8.8	-8.2	2.2	-5.0		0.83	-2.09	*
20	HUENIKON	MG 9	691741	267523	525	-8.3	-7.9	3.0	-4.8		0.72	-2.18	
20	PFUNGEN	MG10	691546	262935	519	-6.2	-6.1	1.9	-4.3		0.53	-2.33	
20	BRUETTEN	MG11	691644	259377	618	-8.0	-7.4	0.4	-4.7		0.40	-2.43	*
20	NUERENSDORF	MG12	691743	255947	548	-8.6	-8.5	-0.6	-3.9		0.27	-2.53	
20	WANGEN	MG13	691948	252294	505	-7.2	-7.2	-0.7	-3.7		0.13	-2.64	
22	SCHWERZENBACH	14	691971	248240	448	-5.4	0.1	0.2	-3.4	-9.5	0.0	-2.73	*
20	MAUR	MG15	691834	244345	621	-2.4	-2.4	3.0	-3.4		-0.08	-2.78	
20	FORCH	MG16	691970	242078	696	-2.4	-2.4	1.2	-3.3		-0.12	-2.80	
20	TOGGWIL	MG17	691942	238677	701	-6.4	-6.3	-2.4	-3.3		-0.19	-2.85	*
20	MEILEN	MG18	692321	236455	536	-7.0	-6.8	-2.0	-3.4		-0.25	-2.89	
20	AU	MG19	691448	233852	468	0.6	1.2	0.5	-3.8		-0.29	-2.91	
20	HOCHWACHT	MG20	691893	230043	654	3.1	3.6	-0.6	-3.5		-0.25	-2.84	*
20	HUFETTEN	MG21	692177	226216	768	6.2	6.3	-2.4	-2.9		-0.17	-2.73	
20	GOTTSCHALK.	MG22	691770	223653	1164	9.2	9.4	-4.8	-2.9		-0.10	-2.63	
20	GRINDELEGG	MG23	691947	220150	1087	4.1	3.9	-8.1	-2.3		-0.02	-2.53	
20	MORGARTEN	MG24	692582	217334	1239	5.7	5.8	-7.8	-2.4		0.07	-2.42	*
20	ENGELSTOCK	MG25	691649	212562	1297	0.7	0.9	-14.0	-2.4		0.13	-2.32	
20	SCHWYZ	MG26	692423	208720	541	2.5	2.1	-13.3	-1.7		0.20	-2.22	
20	BAERENTROSS	MG27	692209	203780	1628	20.8	21.3	-11.9	-2.5		0.43	-1.95	*
20	ROPHAIEN	MG28	691979	198133	2077	8.4	8.7	-16.7	-2.5		0.72	-1.62	
20	EGGBERGE	MG29	692717	195250	1688	6.0	6.3	-17.0	-2.7		0.88	-1.44	
20	SCHATTDORF	MG30	692838	190994	511	13.4	13.3	-12.1	-2.5		1.01	-1.28	*
20	PLAETTEL	MG31	692419	187231	551	9.6	10.1	-10.7	-3.4		1.23	-1.04	
20	SEEWATTE	MG32	692448	185369	471	12.6	12.9	1.4	-3.4		1.33	-0.92	
20	ARNIBERG	MG33	692550	181152	1318	6.0	7.2	11.5	-4.5		1.55	-0.67	
20	MEITSCHLINGEN	34	692062	178495	661	9.4	10.6	2.7	-4.8		1.67	-0.54	*
20	FELLIHORN	MG35	691782	175127	2112	14.8	15.5	-6.3	-4.2		1.84	-0.34	
20	RIENZERST.	MG36	691532	170914	2957	8.6	9.1	-6.4	-4.0		2.03	-0.12	
20	OBERALP	MG37	691887	167274	1994	7.0	6.5	-6.3	-3.1		2.14	0.01	
20	FIRSTPLANGGE	G38	691933	164889	2169	0.1	0.3	-10.4	-3.8		2.19	0.07	*
20	GFALLENBERG	MG39	691999	161718	2626	4.6	4.8	5.3	-4.1		2.25	0.15	
20	GIUBING	MG40	691700	157710	2777	-8.4	-10.0	5.4	-2.7		2.24	0.17	
22	AIROLO	MG41	691256	153310	1166	-4.9	4.0	-5.2	3.9	-6.9	2.11	0.07	*
20	P.DIL CORNO	MG42	691112	149688	2500	-0.9	-0.9	5.5	-5.7		2.10	0.08	
20	ZANBAROIDE	MG43	691743	145438	2484	-3.9	-4.0	9.6	-6.3		2.02	0.03	
20	MASCARPINO	MG44	691253	142299	2450	-15.0	-13.6	5.8	-8.1		1.92	-0.05	*
20	A.LARESCIO	MG45	692136	138130	1721	-3.9	-3.4	12.2	-7.4		1.76	-0.19	
20	LA COSTA	MG46	691940	132741	1585	-2.7	-2.8	-5.0	-6.2		1.61	-0.31	*
20	COSTA PIANA	MG47	692015	130294	1870	-8.0	-7.8	-4.5	-6.3		1.58	-0.33	
20	PIODA NERA	MG48	692642	126922	471	1.1	2.5	10.7	-7.0		1.49	-0.40	
20	ALPE PII	MG49	693325	124703	1647	1.6	2.7	15.0	-6.3		1.49	-0.38	*
20	MTE DI LOCO	MG50	693414	120695	2064	-8.0	-7.4	11.5	-5.0		1.46	-0.39	
20	S.MOSOGNO	MG51	692641	118672	1727	-14.6	-13.9	8.9	-4.6		1.44	-0.40	
22	AULA	MG52	693609	115052	1416	-7.9	14.8	-10.5	15.4	-3.2	1.23	-0.59	*
20	RASA	MG53	693924	112349	923	-2.3	-5.3	12.6	-0.5		1.09	-0.72	
20	GRIDONE	MG54	693481	108705	2187	-11.5	-10.2	16.8	-4.8		0.99	-0.80	*

PARALLEL VON LOCARNO

02	INTRAGNA	PL 2	697564	114809	340	16.5	-10.0	16.7	-3.3		0.90	-0.92		
02	LOSONE	PL 3	701324	114902	224	11.7	-15.8	10.9	-2.8		0.64	-1.19		
02	MINUSIO	PL 4	706138	114888	247	12.1	-23.6	11.0	-3.2		0.41	-1.42	*	
02	GORDOLA	PL 5	710025	115147	206	5.5	-21.5	4.6	-4.2		0.29	-1.55		
02	CUGNASCO	PL 6	714132	114759	274	3.6	-22.2	3.7	-5.9		0.18	-1.66		
22	GIUBIASCO	P7/M1	718626	114666	212	-16.2	2.5	-15.9	2.9	-8.5	-6.8	0.08	-1.77	*

MERIDIAN VON LUGANO

20	S.ANTONINO	ML 2	718772	111719	513	1.5	-0.1	-2.8	-6.4		-0.04	-1.87	
20	MEDEGLIA	ML 3	718507	108182	740	-13.0	-13.4	-3.8	-7.5		-0.19	-2.00	
20	LEGLIO	ML 4	718330	105196	666	-20.5	-21.0	-0.7	-7.4		-0.42	-2.22	*
20	LUGAGGIA	ML 5	718476	102464	541	-22.2	-22.1	0.1	-7.9		-0.70	-2.48	
20	CANOBBIO	ML 6	718618	99213	402	-22.4	-22.2	-0.9	-7.9		-1.04	-2.81	
20	CASSARATE	ML 7	718350	96058	273	-24.6	-24.2	-0.9	-8.1		-1.39	-3.14	*
20	P.D.BISSONE	ML 8	718516	91237	273	-19.5	-17.9	-7.8	-9.1		-1.84	-3.57	
20	MAROGGIA	ML 9	718656	88292	273	-22.8	-21.2	-5.7	-9.1		-2.13	-3.84	

VERZEICHNIS DER LOTABWEICHUNGEN UND GEODHOEHEN

KL	STATION	Y	X	H	XI	ETA	XI	ETA	XI	ETA	GEOD	GEOD	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			

MERIDIAN VON LUGANO (FORTSETZUNG)

20	RIVA S.VITALE	10	718771	85108	296	-22.1	-22.0	2.3	-7.3	-2.43	-4.13	
20	RANCATE	ML11	718574	81170	395	-27.5	-27.0	2.3	-7.6	-2.90	-4.58	
20	BRUSATA	ML12	718438	78234	386	-23.9	-23.3	1.7	-7.4	-3.26	-4.93	*

PARALLEL VON ZUERICH

02	RECLERE	PZ 1	561680	247451	594	-2.5	0.4	-2.4	-1.2	0.96	-1.91	*		
02	CHEVENEZ	PZ 2	566965	247658	690	-1.9	3.9	-1.7	-2.0	1.01	-1.85			
02	CALABRI	PZ 3	571732	247336	709	-1.1	3.5	-1.1	-2.5	1.03	-1.81			
02	S.LA CROIX	PZ 4	577663	247249	775	-0.4	-1.1	-0.5	-3.2	1.04	-1.79	*		
02	LA CAQUERELLE	5	582918	247396	827	0.2	-3.4	0.2	-4.1	1.05	-1.76			
02	M.DEVELIER	PZ 6	588129	247395	832	1.8	-8.5	2.0	-5.0	1.03	-1.77			
02	DELEMONT	PZ 7	592213	247363	546	3.1	-8.7	3.3	-5.5	0.98	-1.81	*		
02	VADRY	PZ 8	597826	247473	772	-1.4	-4.1	-0.9	-6.5	0.95	-1.83	*		
02	GRINDEL	PZ 9	604494	247651	568	-0.2	-0.8	-0.4	-6.4	0.94	-1.83	*		
02	MFLTINGERB.	PZ10	612425	247285	852	-1.3	-2.3	-1.4	-7.2	0.95	-1.81			
02	BUERTEN	PZ11	619023	247377	981	3.4	-1.8	3.2	-7.5	0.92	-1.83	*		
02	WALDENBURG	PZ12	625002	247888	825	1.2	-2.8	1.2	-7.9	0.86	-1.89			
02	HAUENSTEIN	PZ13	632322	247460	702	4.2	-10.7	4.5	-8.4	0.74	-2.00			
02	LOSTORF	PZ14	638150	247739	458	4.4	-11.7	4.5	-8.1	0.63	-2.10			
02	AARAU	PZ15	645859	247724	430	4.1	-8.0	4.1	-7.9	0.49	-2.24	*		
02	STAUFEN	PZ16	654766	247735	425	3.0	-7.1	3.2	-8.1	0.35	-2.37			
02	NIEDERWIL	PZ17	664553	247922	406	3.7	-6.9	4.0	-8.4	0.21	-2.51	*		
02	URDORF	PZ18	674347	247937	444	2.0	-5.3	2.3	-8.8	0.11	-2.61			
33	ZUERICH	PZ19	683983	248056	469	-7.3	-1.6	-7.3	-1.1	-3.6	-9.5	0.02	-2.71	*
02	PFAEFFIKON	PZ21	701529	248337	566	-4.0	-6.6	-4.1	-9.6	0.08	-2.66			
02	BAUMA	PZ22	707816	248368	621	-4.3	-3.7	-4.6	-9.6	0.18	-2.57			
02	STERNENBERG	PZ23	713054	248711	909	-3.7	-0.8	-3.3	-10.5	0.25	-2.51			
02	DREIEN	PZ24	719740	248632	685	-0.5	-2.1	-0.1	-10.8	0.28	-2.48			
02	GANTERSCHWIL	Z25	725038	248896	644	-3.9	1.3	-3.3	-11.2	0.29	-2.48	*		
02	DEGERSHEIM	PZ26	732491	249020	876	-2.2	2.7	-2.1	-10.6	0.40	-2.39			
02	HERISAU	PZ27	738097	249162	754	-2.3	3.8	-1.6	-11.1	0.46	-2.34	*		
02	STEIN	PZ28	743787	249203	809	-1.9	3.8	-1.5	-10.5	0.52	-2.29			
02	BUEHLER	PZ29	748521	249318	834	-3.9	1.6	-3.2	-10.6	0.57	-2.25			
32	GAEBRIS	PZ30	753215	249815	1251	2.6	-0.5	2.5	-1.2	-2.6	-9.2	0.60	-2.24	*
02	ALTSTAETTEN	PZ31	758425	249578	475	5.3	-1.8	4.7	-9.6	0.52	-2.33			
02	DIEPOLDsau	PZ32	767347	249743	408	-9.4	3.6	-9.6	-11.0	0.65	-2.22			

PUNKTE 1. ORDNUNG

22	BASODINO		679179	140540	3273	-8.7	6.6	-8.0	6.3	-5.7	-4.8	2.26	0.30	*
22	BELCHEN	D	629533	296960	1414	-4.5	-11.6	-4.6	-11.0	-7.7	-8.5	3.36	0.18	*
35	BERRA		580516	169450	1719	7.4	-10.7	6.7	-10.5	2.2	-4.1	-0.03	-2.27	*
22	CAMPO DEI FIORI		702791	80561	1226	-21.6	6.6	-21.7	6.4	-4.7	2.4	-2.57	-4.23	*
35	CHASSERAL		571223	220294	1606	-10.9	6.2	-10.4	4.9	-3.2	-0.5	0.70	-1.92	*
22	DOLLE		497074	142440	1677	-10.8	4.9	-10.8	4.6	0.8	5.7	-0.76	-3.11	*
22	FELDBERG(D)		642314	302718	1493	-4.7	-4.1	-4.6	-4.1	-8.1	-6.8	3.96	0.73	*
22	M. GENEROSO		722656	87869	1703	-20.7	-5.9	-21.4	-5.4	-7.1	-4.4	-2.04	-3.76	*
12	GURTEN B		600393	196243	858	3.0	-0.4	2.9	-0.2	-0.5	-5.4	-0.48	-2.86	*
22	HERSBERG		743521	281485	455	-9.2	-0.8	-10.0	-0.4	-1.7	-10.6	0.76	-2.33	*
22	HOERNLI		713529	247763	1133	-1.7	-2.9	-1.4	-3.1	-3.6	-9.9	0.25	-2.50	*
22	HOHENTWIEL		703470	291368	690	-12.8	5.3	-12.2	6.0	-6.1	-9.5	1.80	-1.33	*
35	H.FRESCHEN(A)		776853	242194	2004	7.9	-19.3	9.0	-18.7	-2.7	-12.6	1.64	-1.19	*
35	LAEGERN		672507	259416	856	-9.7	3.2	-10.1	3.2	-3.7	-8.2	0.61	-2.21	*
22	MOTTARONE(I)		678805	81595	1491	-19.7	20.6	-19.7	19.6	-0.2	8.4	-0.81	-2.46	*
35	NAPP		638130	205962	1407	3.4	-1.1	3.0	-0.6	-1.9	-8.7	-0.02	-2.42	*
22	NIESEN		616367	166133	2362	17.0	2.9	17.9	2.8	-0.9	-5.6	0.45	-1.70	*
22	PFAENDER		776376	264479	1064	-3.2	-13.2	-3.0	-13.3	-3.1	-11.1	1.08	-1.94	*
22	ROCHERS DE NAYE		564444	142379	2042	-0.3	-20.0	-0.3	-19.6	1.4	-2.3	-0.26	-2.37	*
22	ROETIFLUH		606757	234122	1397	-9.3	4.9	-9.2	5.0	-4.1	-6.7	0.56	-2.10	*
35	ROTHORN(BRIENZ)		646448	181951	2350	3.9	-2.2	4.1	-3.9	-1.3	-6.5	0.74	-1.49	*
22	RIGI		679520	212273	1797	12.6	-3.7	12.3	-4.4	-1.7	-8.6	-0.17	-2.61	*
11	SAENTIS A		744169	234919	2503	5.3	-5.2	4.7	-5.2	-2.3	-10.4	0.89	-1.80	*
35	SUCHET		525731	180594	1588	-9.4	9.0	-9.0	8.3	-0.2	4.6	-0.04	-2.52	*
35	SULZFLUH(A)		782548	209638	2817	0.5	-8.7	2.0	-10.6	-7.0	-9.4	2.68	0.09	*
22	WEISSFLUH		779675	189819	2844	5.8	-12.8	6.3	-12.4	-5.8	-10.5	2.82	0.38	*
22	WISENBERG		633458	250274	1002	-6.8	2.4	-7.5	2.7	-4.1	-8.3	0.85	-1.91	*

WESTSCHWEIZ

30	BONCOURT		569537	260719	506	-2.6		-2.5	-1.8	-5.7		1.08	-1.88	*
37	CHALET/LAUSANNE		539406	156828	798	-5.9	3.6	-6.4	-3.9	2.9	9.7	-1.06	-3.33	*
36	CHAUMONT		563139	208101	1018	-17.8	6.5	-18.6	8.8	-1.4	-3.4	0.14	-2.41	*
36	GENEVE		500724	117296	404	-4.4	-2.4	-4.5	-2.8	0.0	5.0	-2.20	-4.39	*

VERZEICHNIS DER LOTABWEICHUNGEN UND GEODIDHOFHEN

3

KL	STATION	Y	X	H	XI GFMESSEN	ETA	XI PRAED.	ETA	XI MOHO-RED	ETA	GEOD SD	GEOD EN-50	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
WESTSCHWEIZ (FORTSETZUNG)													
35	MIDDES	562936	179871	732	1.2	-3.8	1.5	-3.2	0.1	-2.9	-0.71	-3.06	*
35	MOUDON	548675	169048	833	-2.5	1.1	-2.9	1.1	2.3	0.5	-0.83	-3.15	*
36	NEUCHATEL	563124	205597	487	-15.6	6.8	-16.3	7.4	-1.4	-1.8	-0.06	-2.59	*
36	PORTALBAN	563065	196137	462	-5.3	-2.3	-4.9	0.7	-1.8	-4.7	-0.50	-2.97	*
36	TETE-DE-RANG	555776	211742	1330	-10.7	8.3	-10.6	7.5	-2.6	0.7	0.60	-2.00	*
ZENTRAL- UND NORDSCHWEIZ													
35	ACHENBERG	661842	271028	534	-14.0	4.2	-14.0	2.8	-5.4	-5.8	1.36	-1.56	*
33	BASEL BERNOULL.	610685	267764	279	-7.0	-1.4	-6.4	-1.2	-6.8	-7.7	1.39	-1.55	*
22	BERN (NULLPT)	600000	200000	540	-0.8	-0.1	-0.5	0.0	-1.2	-5.3	-0.50	-2.91	*
35	EGG	639358	270663	715	-17.9	3.0	-18.0	-0.1	-6.1	-4.0	1.80	-1.13	*
35	FRIENISBERG	592389	208524	725	-1.7	-0.3	-1.5	0.0	-1.9	-4.9	-0.34	-2.83	*
35	GURNIGEL	601687	177660	1542	15.1	5.3	15.1	4.1	0.5	-3.5	0.02	-2.23	*
36	HAMMELSCHWAND	672991	205920	1128	13.7	-0.2	14.2	-1.5	-2.4	-8.1	-0.19	-2.58	*
30	HOMBERG	656409	236409	788	-7.6		-6.4	3.4	-5.5		0.0	-2.63	*
36	LUESCHERZ	579017	210022	564	-8.5	5.1	-8.5	4.3	-1.9	-2.1	-0.20	-2.73	*
35	LUZERN	667021	212479	542	2.1	0.6	2.8	0.1	-3.0	-8.7	-0.40	-2.84	*
36	RAEMEL	598601	254945	840	-2.7	0.1	-2.9	-0.2	-4.6	-5.9	1.12	-1.73	*
30	RECKETSCHWAND	654821	216023	845	2.7		2.4	2.3	-2.5		-0.29	-2.76	*
30	STANSERHORN	668665	198023	1898	17.3		16.8	-6.9	-1.2		0.26	-2.07	*
35	WEISSENSTEIN	605462	233519	1289	-11.3	1.4	-13.2	3.7	-2.1	-8.7	0.55	-2.11	*
00	ZIMMERWALD	602016	191760	903			3.2	1.5			-0.43	-2.78	*
30	ZUGERBERG	683583	222404	989	4.7		4.7	-6.3	-2.6		-0.27	-2.79	*
30	ZWEISIMMEN	595009	155936	945	4.5		4.8	-2.1	0.4		0.61	-1.51	*
OSTSCHWEIZ													
22	BASIS NORD	766538	251249	414	2.0	-6.8	2.1	-7.3	-2.5	-10.5	0.60	-2.28	*
22	BASIS SUED	762535	245200	476	3.4	-4.9	2.3	-4.4	-0.8	-11.4	0.54	-2.28	*
30	BISSEGG	720655	269270	532	-4.2		-4.4	2.6	-3.3		0.58	-2.36	*
22	EBENALP	749194	238775	1639	7.9	4.7	7.9	5.4	-2.7	-11.0	0.78	-1.95	*
36	GARSELLAKOPF(A)	761370	226471	2113	11.4	-16.6	10.4	-12.1	-2.3	-16.1	1.07	-1.59	*
36	HOHENTANNEN	740795	257520	869	1.9	-1.0	1.6	-2.1	-2.7	-9.1	0.44	-2.43	*
35	HOHE KUGEL(A)	772089	245191	1645	8.0	-18.8	9.0	-19.0	-2.7	-11.5	1.17	-1.67	*
22	MELDEGG	764937	256570	657	-1.4	0.2	-0.8	-0.5	-3.5	-9.9	0.55	-2.37	*
35	NOLLEN	726887	261679	731	-2.4	1.6	-2.9	0.4	-2.7	-9.0	0.41	-2.48	*
22	ST ANTON	758028	253127	1120	-2.1	1.3	-2.0	1.3	-3.0	-10.1	0.56	-2.31	*
WALLIS													
36	ARPILLE	566568	102938	2085	12.0	5.5	11.6	3.0	3.2	-0.3	0.25	-1.64	*
30	CHANRION	595535	87530	2460	-6.3		-7.4	-15.4	9.6		2.01	0.27	*
22	ORSIERES	576733	96838	938	10.9	-4.7	10.5	-3.6	5.6	-7.8	0.64	-1.19	*
30	RIFFELBERG	623712	93429	2535	9.1		9.7	-7.1	8.0		2.79	1.06	*
22	SAAS GRUND	638802	107196	1579	6.8	3.6	6.7	2.8	7.2	-1.0	2.48	0.70	*
22	SION	595973	120700	496	2.0	-6.5	2.1	-6.9	3.8	-4.6	0.58	-1.33	*
30	TORRENTHORN	618485	136262	2998	-8.4		-8.5	-7.7	2.6		1.61	-0.35	*
30	TOURBILLON	594616	120602	652	-2.3		-1.2	-5.5	2.7		0.54	-1.37	*
BERNER OBERLAND / GOTTHARD													
22	AESCHIALLMEND	622427	166098	1122	21.3	-7.6	20.5	-8.6	0.8	-5.4	0.51	-1.63	*
22	BELLWALD	655358	141410	1539	-11.6	-3.2	-12.5	-3.0	-0.4	-6.0	2.17	0.21	*
33	BRIG OBSERVATOR.	643568	130769	680	-5.6	-4.6	-5.3	-4.6	1.4	-4.7	1.68	-0.23	*
22	DAUBE	635847	167307	2076	16.1	-17.0	15.3	-16.8	0.9	-7.2	1.00	-1.14	*
34	EGGISHORN	650390	142435	926	-11.5	4.8	-12.7	4.3	0.3	-5.6	2.31	0.34	*
46	FAULHORN(GRW.)	642885	169441	2680	18.0	-14.0	18.3	-13.2	-0.6	-8.1	1.31	-0.84	*
32	PIANO DEL GHEISC	683432	152593	1898	-12.1	9.1	-12.2	9.9	-4.3	-7.8	2.30	0.27	*
22	SAN GIACOMO	677388	146311	2498	2.5	4.6	1.9	4.5	-3.9	-6.0	2.38	0.39	*
22	GRINDELWALD ETH	646451	163085	1007	22.0	-17.1	22.3	-17.5	-0.7	-6.7	1.85	-0.25	*
47	ISFLFF OBS.	658768	117549	631	-3.2	5.1	-3.7	9.2	2.6	-5.9	1.68	-0.15	*
44	KONKORDIA	647119	150081	2820	-7.6	-9.5	-5.1	-6.5	-3.6	-9.6	2.63	0.61	*
22	LAUBERHORN	639028	160250	2472	21.7	-17.3	20.6	-18.2	0.8	-5.9	1.73	-0.36	*
25	MAENNLICHEN	638255	163114	2343	21.7	-17.5	21.3	-15.7	0.3	-8.7	1.44	-0.67	*
22	MORGENBERGHORN	627185	163499	2249	23.3	-11.5	23.3	-10.9	0.0	-7.4	0.97	-1.15	*
22	NIEDERHORN	625596	173336	1950	3.7	-14.5	3.1	-14.3	0.7	-6.8	0.38	-1.81	*
32	NUFENENSTOCK VS	672934	146636	2866	1.9	-0.2	1.1	-0.5	-2.9	-5.7	2.44	0.45	*
36	OBERRIED	644126	132997	1384	-18.6	2.7	-17.4	1.4	0.0	-3.7	1.77	-0.15	*
22	RAFUET	664697	146602	2276	8.9	-9.3	8.5	-9.2	-2.1	-6.2	2.37	0.38	*
22	RICHINEN	655942	144243	2433	-19.3	4.8	-19.6	4.3	-1.2	-5.6	2.32	0.34	*
26	RIEDERHORN	644425	135726	2230	-15.5	2.1	-16.2	1.7	1.5	-5.0	1.94	0.00	*
36	ROSSWALD	647422	128730	2088	-1.2	-19.2	-1.1	-17.0	1.4	-6.6	1.86	-0.03	*
36	GR. SCHEIDEGG	650922	167281	2036	22.2	-11.5	23.3	-13.2	-1.9	-5.9	1.81	-0.32	*

VERZEICHNIS DER LOTABWEICHUNGEN UND GEODHOFHEN

KL	STATION	Y	X	H	XI	ETA	XI	ETA	XI	ETA	GEOD	GEOD	S
1	2	3	4	5	6	7	7	8	8	9	10	11	
					GEMESSFN	PRAED.	MOHO-RED	SD	ED-50				

BERNER OBERLAND / GOTTHARD (FORTSETZUNG)

22	SCHYNIGE PLATTE	636033	166977	2067	11.8-15.3	12.2-14.8	-0.3 -7.5	1.04	-1.10				
57	SIMPLON-HOSPIZ	645514	121866	1997	7.0 -5.2	7.6 -4.3	2.8 -4.2	1.98	0.12				*
46	SPHINX	641906	155281	3571	17.4-14.8	17.6-16.8	-1.0 -4.7	2.35	0.29				
22	SPIEZ-BUEHL	618183	170411	668	13.7 -1.2	12.7 -1.7	1.1 -5.4	0.14	-2.04				
30	ST.GOTTHARD ASTR	686570	156590	2093	-5.5	-5.4 4.1	-4.2	2.28	0.22				

TESSIN

03	BELLINZONA	722505	116760	307		-5.7	-9.7 -5.8		-6.8	0.20	-1.66		
36	CADENAZZO	717768	112348	211	-2.8	0.6	-5.0 -0.5	-5.7	-4.9	-0.04	-1.87		
36	GIUBIASCO	720527	113971	228	-6.2	-7.5	-8.1 -3.4			0.04	-1.80		
36	MOGNONE	716743	117147	1465	-26.9	8.0	-27.3 8.4	-7.7	-6.9	0.40	-1.46		
36	TIGLIO	721281	111913	1122	1.0-11.5		-0.9-11.0	-6.5	-6.8	0.01	-1.82		

GRAUBUENDEN / GLARUS

23	CHUR	758469	191548	582	8.3 -6.5	5.8 -5.6	-0.3-12.2	1.40	-1.00				*
22	LINTHAL	718698	197373	681	9.6 0.3	10.6 0.0	-5.3 -8.0	1.30	-1.06				*
22	MALOJA	773935	141617	1813	-6.5 -9.8	-7.2 -9.7	-10.1 -7.6	2.96	0.85				*
22	MARTINA	830571	197063	1035	-2.1 -4.5	-2.2 -4.3	-6.8-13.5	4.61	1.94				*
23	POSCHIAVO	801763	133215	1004	-13.1 1.2	-13.0 0.9	-11.6 -8.5	3.17	1.02				*
22	S.BERNARDINO	734669	147318	1613	-10.8 -2.6	-11.0 -2.9	-7.3 -7.7	2.12	0.06				*
22	STA. MARIA	828870	165742	1373	4.7 -2.2	4.8 -2.1	-10.8-12.8	4.30	1.85				*
33	THISIS ASTRO	753338	175060	672	8.9 -6.0	8.7 -6.0	-4.4-10.5	1.72	-0.55				*

ZUSAETZLICHE PUNKTE DES AUSLANDES

33	BASSES PERCHES F	557123	275182	425	-7.5 -2.4	-7.1 -2.8	-8.1 0.7	1.30	-1.82				*
33	FESSVILLERS F	559399	236710	887	1.0 -2.3	0.4 -2.0	-2.2 -1.1	0.98	-1.81				*
33	FORT D ROUSSES F	493601	148676	1132	-5.3 -5.8	-4.6 -7.1	0.3 6.6	-0.56	-2.97				*
33	GRAND TAUREAU F	523151	196445	1323	-2.0 -3.6	-1.7 -3.2	-1.6 3.0	0.42	-2.18				*
33	HESSINGUE F	604762	268901	321	-6.4 -1.2	-5.6 -0.2	-7.2 -8.1	1.40	-1.56				*
33	LF TOUR F	561790	94680	1462	2.9-12.6	4.4-14.1	1.4 -1.0	0.48	-1.38				*
33	THONON-RIPAILEF	526820	138613	384	3.0 -5.3	4.1 -4.9	-0.4 2.2	-1.57	-3.78				*
33	DOMASO I	746080	112992	210	-21.6 5.9	-21.6 4.0	-10.3 -2.6	-0.22	-2.10				*

PUNKTE 1. ORDNUNG OHNE LOTABWEICHUNGEN

00	ALTELS	618434	141982	3629		7.8 -7.8		1.69	-0.31				
00	CALANDA	754560	196306	2806		6.6 -2.9		1.40	-1.02				
00	CHRISCHONA	618168	269173	543		-9.3 -3.7		1.55	-1.39				
00	CIMA DI PIAZZI	818789	144591	3439		-5.3 -0.5		3.95	1.67				
00	DENT DU MIDI	560189	112309	3257		11.0 -5.0		0.15	-1.80				
00	DFNT D' OCHE	545559	133754	2220		10.7-11.0		-0.71	-2.82				
00	FAUX D'ENSON	563749	245918	927		0.5 -2.3		0.99	-1.86				
00	FINSTERAARHORN	652741	154231	4274		4.3 0.9		2.65	0.61				
00	GLASERBERG	590906	255973	785		-1.7 0.8		1.16	-1.71				
00	ILLFURTH(F)	588094	280756	389		-5.3 -2.1		1.63	-1.46				
00	LE SOLIAT	545323	198029	1463		-8.0 5.7		0.20	-2.33				
00	LES VOIRONS	516413	120466	1480		2.5 -9.2		-1.64	-3.78				
00	MOMPICCIO	827621	177409	3162		-3.1 0.3		4.50	1.98				
00	MONTENDRE	513518	161011	1679		-7.5 6.6		-0.22	-2.62				
00	M. DISGRAZIA	778122	126839	3678		-16.8 -6.6		2.46	0.42				
00	MONTE PALANZUOLO	736923	80486	1436		-25.0 -1.5		-2.80	-4.50				
00	MONTREUX-VIEUX F	568831	274873	360		-6.4 -1.1		1.38	-1.71				
00	MUTTLER	823965	198582	3294		-4.4 -1.0		4.63	1.97				
00	OLDENHORN	583278	130895	3123		5.5 -9.2		0.81	-1.19				
00	PIZ BEVERIN	746903	168609	2997		12.2 1.3		2.07	-0.14				
00	P.CRAMOSINO	708090	135612	2718		-4.8 5.5		1.50	-0.45				
00	P. GNIFETTI	634010	86266	4556		-10.0 15.9		2.68	0.99				
00	PIZZO MENONE	731865	109442	2245		-16.8 1.6		0.04	-1.80				
00	PIZ MICHEL	769112	164934	3159		6.9-15.7		2.80	0.56				
00	PIZ TGIETSCHEN	721127	167305	2857		5.9 -0.7		2.04	-0.12				
00	POUILLEREL	551543	217758	1276		-1.9 0.0		0.83	-1.83				
00	RUINETTE	597041	91952	3875		0.2-16.3		2.16	0.40				
00	SCHAEERHORN	706101	187151	3295		8.5-10.1		1.82	-0.46				
00	SCHEYE	717987	213204	2259		9.0 1.2		0.80	-1.68				
00	SCHWARZHORN GR	791280	179112	3146		3.2-10.6		3.65	1.25				
00	SCHWARZHORN VS	624555	118419	3201		13.9 -1.0		2.03	0.17				
00	SIX MADUN	693826	164204	2928		3.3 -1.4		2.21	0.10				
00	TAMBOHORN	741521	151124	3274		-2.2 -4.7		2.31	0.22				
00	TITLIS	676312	180581	3239		14.8 -5.0		1.76	-0.45				
00	VORAB	730974	192857	3028		6.5 -1.5		1.56	-0.79				
00	WASENHORN	649878	124100	3246		4.8 -2.3		2.02	0.15				